

1 Calcul du spectre de l'opérateur compact \mathbf{K}_I

Cette section est la plus élaborée de l'article : elle décrit le calcul du spectre de l'opérateur compact \mathbf{K}_I de

$$\langle \eta | \mathbf{K}_I(\xi) \rangle = \frac{1}{2e'(1_+)} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) (Q\epsilon)(\exp(|v|)) dx dv, \quad (1)$$

pour un intervalle $I \subset [-\log 2, \log 2]$ de longueur $\log 2$. En fait, nous considérerons l'intervalle

$$I = \left[-\frac{\log 2}{2}, \frac{\log 2}{2} \right].$$

La première difficulté que nous rencontrons concerne le calcul de la fonction $Q\epsilon(\rho)$, dans la formule

$$Q\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} T_n(\rho), \quad (2)$$

où

$$T_n(\rho) = \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx + \rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) - \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho) \quad (3)$$

car dans l'équation (2) interviennent de façon compliquée des fonctions sphéroïdales prolates et leurs dérivées. Heureusement, on peut la calculer par ordinateur du fait de la décroissance rapide

$$|\lambda(n)| \leq \frac{2^{2n} \pi^{2n+\frac{1}{2}} ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n+\frac{3}{2})} \sim (4n+1)^{-2n-\frac{1}{2}} (e\pi)^{2n+\frac{1}{2}}.$$

De plus, nous montrons dans l'appendice F (Lemme F.1) que la somme des 11 premiers termes dans la série donne une approximation uniforme de la fonction $Q\epsilon(\rho)$ jusqu'à 10^{-11} . La seconde difficulté analysée dans cette section est de gérer la dimension infinie de l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur \mathbf{K}_I agit. Cela semble, a priori, exclure l'utilisation de la puissance de l'ordinateur pour comprendre ce spectre. Ici, la stratégie que nous suivons consiste à utiliser notre idée originale de "q → 1" qui a sous-tendu, depuis le début, notre travail algébrique [2,3,4]. Donc, nous remplaçons le groupe multiplicatif R_+^* par le sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}$, et nous approximons l'espace de dimension infinie par celui de dimension finie où l'intervalle I (en notation additive) est remplacé par l'ensemble fini I_q de taille $N \sim \log 2 / \log q$, des multiples entiers de $\omega = \log q$ qui appartiennent à I . Il s'avère que la discrétisation naturelle de l'opérateur \mathbf{K}_I (§1.1) est une matrice de Toeplitz et on peut rechercher numériquement son spectre (§1.2) pour voir comment il varie, quand $q \rightarrow 1$. Ce qu'on découvre c'est que, alors que pour des intervalles de longueur un peu plus petite que $\log 2$ la plus grande valeur propre λ_{\max} de \mathbf{K}_I est inférieure à 1, de telle façon que \mathbf{N}_I (voir la définition de \mathbf{N}_I dans la première proposition **Prop** du §1.1) est négatif, cela n'est plus vrai quand la longueur de l'intervalle devient plus proche de $\log 2$ (voir la Figure 1. En regardant plus précisément le spectre de \mathbf{K}_I , on voit que l'écart à la plus grande valeur propre reste toujours plus petit que 1 ! L'étape suivante consiste alors à utiliser la théorie puissante des matrices auto-adjointes de Toeplitz [5,1] qui montre que le vecteur propre ξ associé à la plus grande valeur propre remplit une sorte de "version bébé" de RH. Si l'on regarde ξ comme une fonction à valeurs complexes $\xi : I_q \rightarrow \mathbb{C}$ en formant l'expression

$$\tilde{\xi}(z) = \sum \xi(\log q^j) z^j \in C[z, z^{-1}],$$

alors tous les zéros de cette fonction sont des nombres complexes de module 1. Ils sont au nombre de $N \sim \log 2 / \log q$. En calculant ces N racines, nous remarquons qu'elles sont distribuées comme les $(N+1)$ -ièmes racines de l'unité sauf pour la racine triviale 1. De plus, on a la symétrie $z \mapsto z^{-1}$ due à l'égalité $\tilde{\xi}(z^{-1}) = \tilde{\xi}(z)$. Quand on remet à l'échelle les arguments pris dans $[-\pi, \pi]$, en les multipliant par $(N+1)/2$, leur forme générale converge quand $q \rightarrow 1$ (voir (10) pour les premières valeurs). La théorie générale des matrices de Toeplitz T montre également [5] que les racines ci-dessus peuvent être utilisées comme une transformée de Fourier discrète pour fournir la formule canonique de la matrice de Toeplitz de plus petit rang positif $\lambda_{\max} \text{Id} - T$, comme une combinaison linéaire à coefficients positifs $d(j)$ de la forme

$$\lambda_{\max} \text{Id} - T = \lambda_{\max} \sum d(j) e(j)$$

trad. Denise Vella-Chemla, novembre 2020.

L'article original en anglais est à lire ici : <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>.

où les $e(j)$ sont les projections à une dimension (également des matrices de Toeplitz) associées aux racines ci-dessus. Il s'avère que la forme générale des coefficients scalaires $d(j)$ converge également quand $q \rightarrow 1$ (voir (13)). L'étape suivante est présentée au §1.3 et consiste à deviner, de l'approximation discrète et des formes générales des racines et des $d(j)$, une fonction du paramètre continu $\rho \in [\frac{1}{2}, 2]$ qui approxime $Q\epsilon(\rho)$. Ce choix est alors vérifié numériquement et donne, par une simple estimation, une bonne approximation de \mathbf{K}_I et un bon contrôle de son spectre en utilisant un opérateur de rang fini (voir §1.4). Finalement, les paragraphes 1.5 et 1.6 fournissent le calcul du spectre de cet opérateur de rang fini ainsi que le vecteur propre de valeur propre maximale, et la preuve que l'opérateur \mathbf{K}_I devient < 1 dans le complémentaire orthogonal de ce vecteur. (La preuve du théorème principal (Théorème 9) peut être trouvée dans l'article original¹).

1.1 Approximation discrète des intervalles variables

Nous discrétisons l'espace en remplaçant R_+^* par $q^{\mathbb{Z}}$, où $q > 1$ et faisons alors tendre $q \rightarrow 1$. En posant $\omega = \log q$, nous remplaçons l'intervalle $I = [0, a]$ par ses intersections finies avec le réseau $\omega\mathbb{Z}$, dont les éléments $j\omega$ sont étiquetés par $j \in \{0, \dots, N\}$, où N est la partie entière de a/ω . Alors nous remplaçons les intégrales par des sommes et nous considérons, dans l'espace de Hilbert de dimension finie $\ell^2(\{0, \dots, N\})$, la forme quadratique suivante qui est la version discrétisée de (6)

$$\mathcal{Q}_q(\xi) := \omega \sum_{j=0}^N \sum_{k=-j}^{N-j} \overline{\xi(j)} \xi(j+k) (Q\epsilon)(q^{|k|}). \quad (4)$$

En suivant la proposition \mathfrak{Ftop} :

Soit $I \subset [-\log 2, \log 2]$ un intervalle de longueur $\leq \log 2$.

(i) L'égalité suivante définit un opérateur borné \mathbf{N}_I dans l'espace de Hilbert $L^2(I, dx)$

$$\langle \eta | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle = E_+(Q_+ f), \quad f = \eta^* * \xi, \quad f(v) = \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) dx. \quad (5)$$

(ii) On a $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+) (Id - \mathbf{K}_I)$, où \mathbf{K}_I est l'opérateur compact défini par

$$\langle \eta | \mathbf{K}_I(\xi) \rangle = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) (Q\epsilon)(\exp(|v|)) dx dv, \quad (6)$$

on doit comparer \mathcal{Q}_q avec le produit intérieur $2\epsilon'(1_+) \sum_{j=0}^N \overline{\xi(j)} \xi(j)$.

On remplace (4) par

$$\mathcal{Q}_q(\xi) = \omega \langle \xi | \mathcal{T}_q \xi \rangle,$$

où la matrice de Toeplitz \mathcal{T}_q est de la forme

$$\mathcal{T}_q = \begin{pmatrix} Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q^3) & \dots & Q\epsilon(q^N) \\ Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(q^2) & \dots & Q\epsilon(q^{N-1}) \\ Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & \dots & Q\epsilon(q^{N-2}) \\ Q\epsilon(q^3) & Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & \dots & Q\epsilon(q^{N-3}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q\epsilon(q^N) & Q\epsilon(q^{N-1}) & Q\epsilon(q^{N-2}) & Q\epsilon(q^{N-3}) & \dots & Q\epsilon(1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Puis on compare la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q$ avec 1 puisque cela teste la positivité de $Id - \mathbf{K}_I$.

1. <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>, section 6.7.

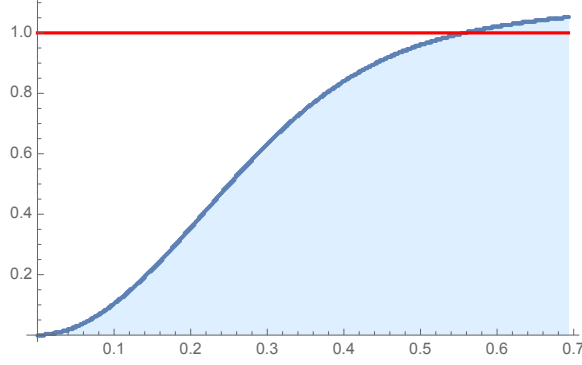


FIGURE 1 : Plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$, pour $a \in [0, \log 2]$ et $q = \exp(10^{-3})$.

La figure 1 montre que, pour $\omega = 10^{-3}$ et $q = \exp(10^{-3})$, la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$, *i.e.* $\lambda \sim 1.05177$, excède légèrement 1 quand on considère l'intervalle complet $[0, \log 2]$.

1.2 Approximation discrète et matrices de Toeplitz

Fixons maintenant l'intervalle $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$: symétrique et de longueur $\log 2$. En calculant les premières valeurs propres de la matrice de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$, on trouve que la valeur propre juste avant la valeur propre la plus grande $\lambda = \lambda_1$ est $\lambda_2 \sim 0.687925$: plutôt bien en-dessous de 1. Ainsi, le manque de positivité de $\text{Id} - \mathbf{K}_I$ est dû à un seul vecteur propre ζ . Dans la section suivante, nous utilisons la théorie générale des matrices de Toeplitz [1,5]. Un premier résultat-clef classique dans la théorie affirme que le vecteur propre de valeur propre maximale d'une matrice auto-adjointe de Toeplitz est d'une forme très spéciale puisque l'équation polynomiale associée a ses racines de module 1. Dans nos notations, cela signifie que si nous dénotons les composantes du vecteur propre ζ par $\zeta(\log q^j) = \zeta(j\omega)$ qui sont définies pour $|j|\omega \leq \frac{1}{2} \log 2$, et que nous posons $\tilde{\zeta}(z) = \sum \zeta(j\omega)z^j \in C[z, z^{-1}]$, alors on a l'implication

$$z \in C \ \& \ \tilde{\zeta}(z) = 0 \implies |z| = 1. \quad (8)$$

Quand nous avons calculé ces zéros la première fois avec la valeur de q utilisée au §1.1 (*i.e.* $\omega = 10^{-3}$, $q = \exp(10^{-3})$), nous avons trouvé qu'en effet, ces zéros sont tous de module 1 et vérifient la symétrie $z \mapsto \bar{z}$, cela étant dû au fait que les coefficients $\zeta(j\omega)$ sont réels (ils respectent aussi la contrainte $\zeta(-j\omega) = \zeta(j\omega)$). Avec le choix symétrique de $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$, le nombre fini N d'éléments dans $I \cap \omega Z$ est impair $N = 2m + 1$ et le calcul montre que les N racines de $\tilde{\zeta}(z) = 0$ ressemblent aux racines $N + 1$ -ièmes non triviales de l'unité, *i.e.* toutes sauf $z = 1$. Puisqu'elles sont symétriques, ces racines peuvent être mieux écrites sous la forme

$$z_j^\pm = \exp\left(\pm \frac{2\pi i \alpha_j}{N+1}\right), \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

et il s'avère que $z = -1$ est aussi une racine et qu'ainsi, elle devrait être ajoutée à cette liste de $2m$ éléments.

De cette façon, on découvre que lorsque les racines sont étiquetées comme dans (9), les nombres obtenus α_j , qui dépendent du choix de $q = \exp(\omega)$, se stabilisent quand $q \rightarrow 1$ et la différence $\alpha_j - j$ tend vers zéro quand l'index $j \rightarrow \infty$. La table suivante montre les premières valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, indexées par leur partie

entière *i.e.* $j = \text{PartieEntière}(\alpha_j)$:

$$\begin{array}{cccccc}
 \alpha_1 = 1.33371 & \alpha_2 = 2.10964 & \alpha_3 = 3.07018 & \alpha_4 = 4.0524 & \alpha_5 = 5.04184 & \\
 \alpha_6 = 6.03484 & \alpha_7 = 7.02984 & \alpha_8 = 8.0261 & \alpha_9 = 9.0232 & \alpha_{10} = 10.0209 & \\
 \alpha_{11} = 11.019 & \alpha_{12} = 12.0174 & \alpha_{13} = 13.016 & \alpha_{14} = 14.0149 & \alpha_{15} = 15.0139 & \\
 \alpha_{16} = 16.013 & \alpha_{17} = 17.0123 & \alpha_{18} = 18.0116 & \alpha_{19} = 19.011 & \alpha_{20} = 20.0104 & \\
 \alpha_{21} = 21.0099 & \alpha_{22} = 22.0095 & \alpha_{23} = 23.0091 & \alpha_{24} = 24.0087 & \alpha_{25} = 25.0083 & \\
 \alpha_{26} = 26.008 & \alpha_{27} = 27.0077 & \alpha_{28} = 28.0074 & \alpha_{29} = 29.0072 & \alpha_{30} = 30.007 & \\
 \alpha_{31} = 31.0067 & \alpha_{32} = 32.0065 & \alpha_{33} = 33.0063 & \alpha_{34} = 34.0061 & \alpha_{35} = 35.006 & \\
 \alpha_{36} = 36.0058 & \alpha_{37} = 37.0056 & \alpha_{38} = 38.0055 & \alpha_{39} = 39.0053 & \alpha_{40} = 40.0052 & \\
 \alpha_{41} = 41.0051 & \alpha_{42} = 42.005 & \alpha_{43} = 43.0048 & \alpha_{44} = 44.0047 & \alpha_{45} = 45.0046 & \\
 \alpha_{46} = 46.0045 & \alpha_{47} = 47.0044 & \alpha_{48} = 48.0043 & \alpha_{49} = 49.0043 & \alpha_{50} = 50.0042 & \\
 \alpha_{51} = 51.0041 & \alpha_{52} = 52.004 & \alpha_{53} = 53.0039 & \alpha_{54} = 54.0039 & \alpha_{55} = 55.0038 & \\
 \alpha_{56} = 56.0037 & \alpha_{57} = 57.0037 & \alpha_{58} = 58.0036 & \alpha_{59} = 59.0035 & \alpha_{60} = 60.0035 &
 \end{array} \tag{10}$$

La liste ci-dessus donne une idée des valeurs numériques des α_j . Les valeurs numériques précises (pour $\omega = 1/5000$) ne sont pas des entiers et nécessitent davantage de chiffres.

On peut les télécharger ici [lien pour télécharger les angles](#).

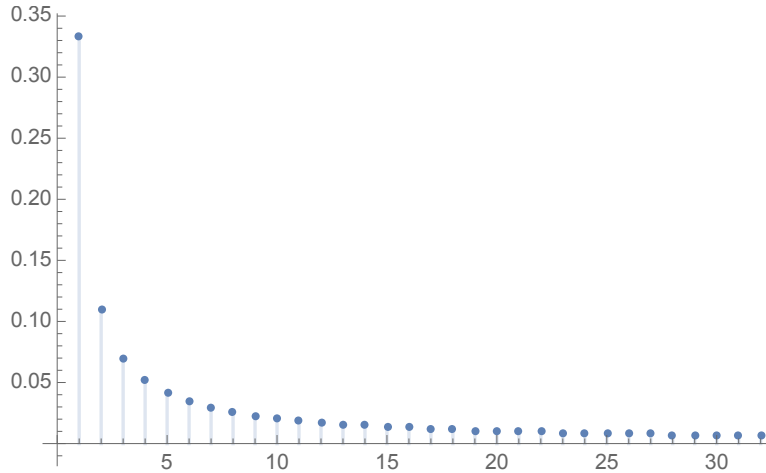


FIGURE 2 : Graphe de $\alpha_j - j$.

Le second résultat-clef classique [1,5] de la théorie des matrices de Toeplitz est que pour une matrice de Toeplitz positive T de co-rang 1 (*i.e.* le rang égal à la dimension de la matrice moins 1), l'allure de T dans le cône positif est un cône basé sur un simplexe. Cela découle du fait qu'il y a une unique décomposition de T comme somme d'éléments de rayons extrêmes du cône positif. De plus, les rayons extrêmes du cône sont les matrices de Toeplitz (positives) de rang 1, et elles sont paramétrées (à un scalaire multiplicatif positif près) par le cercle des unités $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$, formé par les projections $e(z)$ de rang 1. De plus, les seuls nombres complexes de module 1 intervenant dans la décomposition $T = \sum d(j)e(z_j)$ sont précisément les racines (les zéros) du polynôme associé au vecteur dans le noyau de T . Nous utilisons ce résultat et l'appliquons à la matrice de Toeplitz

$$S = \lambda \text{Id} - \frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q \tag{11}$$

(λ est la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q$). Par construction et en utilisant la simplicité de la plus grande valeur propre λ , la matrice de Toeplitz obtenue S est de co-rang 1 de telle manière qu'elle admet une décomposition canonique de la forme

$$S = \lambda \sum d(j)e(z_j), \quad \{z_j\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{\zeta}(z) = 0\}. \tag{12}$$

Nous avons calculé la liste des scalaires positifs $d(j)$ correspondant à cette unique décomposition et avons trouvé que quand $q \rightarrow 1$, ils se comportent similairement à des angles, *i.e.* quand ils sont étiquetés par les

z_j correspondant, ils convergent vers une valeur fixe.

Nous donnons un exemple des premières valeurs dans la table suivante (13), où nous utilisons le même étiquetage que dans (10) de façon à ce que les termes se correspondent bijectivement

$$\begin{array}{cccccc}
d(1) = 1.17111 & d(2) = 1.12443 & d(3) = 1.05904 & d(4) = 1.03248 & d(5) = 1.02052 & \\
d(6) = 1.01414 & d(7) = 1.01033 & d(8) = 1.00787 & d(9) = 1.00619 & d(10) = 1.005 & \\
d(11) = 1.00411 & d(12) = 1.00344 & d(13) = 1.00292 & d(14) = 1.00251 & d(15) = 1.00217 & \\
d(16) = 1.0019 & d(17) = 1.00167 & d(18) = 1.00148 & d(19) = 1.00132 & d(20) = 1.00119 & \\
d(21) = 1.00107 & d(22) = 1.00097 & d(23) = 1.00088 & d(24) = 1.0008 & d(25) = 1.00073 & \\
d(26) = 1.00067 & d(27) = 1.00062 & d(28) = 1.00057 & d(29) = 1.00052 & d(30) = 1.00048 & \\
d(31) = 1.00045 & d(32) = 1.00042 & d(33) = 1.00039 & d(34) = 1.00036 & d(35) = 1.00034 & \\
d(36) = 1.00031 & d(37) = 1.00029 & d(38) = 1.00027 & d(39) = 1.00026 & d(40) = 1.00024 & \\
d(41) = 1.00022 & d(42) = 1.00021 & d(43) = 1.0002 & d(44) = 1.00018 & d(45) = 1.00017 & \\
d(46) = 1.00016 & d(47) = 1.00015 & d(48) = 1.00014 & d(49) = 1.00013 & d(50) = 1.00013 & \\
d(51) = 1.00012 & d(52) = 1.00011 & d(53) = 1.0001 & d(54) = 1.0001 & d(55) = 1.00009 & \\
d(56) = 1.00008 & d(57) = 1.00008 & d(58) = 1.00007 & d(59) = 1.00007 & d(60) = 1.00006 &
\end{array} \tag{13}$$

À nouveau, ceci est juste destiné à donner une idée de ces valeurs, et (pour $\omega = 1/5000$), les valeurs numériques précises contiennent davantage de chiffres.

On peut les télécharger ici [lien pour télécharger les coefficients](#).

Pour obtenir un bon contrôle de l'opérateur compact \mathbf{K}_I , nous avons alors besoin d'approximer la fonction $(Q\epsilon)(\exp(x))$ pour tout $x \in [0, \log 2]$, et non juste seulement pour un ensemble fini de multiples de ω . Dans la prochaine section, nous allons montrer comment la décomposition de Toeplitz ci-dessus (11) permet de deviner une approximation efficace de la fonction $(Q\epsilon)(\exp(x))$ par une somme trigonométrique finie. Il s'avère alors que cette approximation permet, par un calcul par ordinateur, d'obtenir le contrôle souhaité.

1.3 L'approximation de base de $(Q\epsilon)(\exp(x))$

En combinant (11) et (12), la matrice de Toeplitz $T_q = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$ peut être réécrite ainsi

$$T_q = \lambda \left(\text{Id} - \sum d(j)e(z_j) \right) \tag{14}$$

où les $e(z_j)$ sont les matrices de projections sur une dimension obtenues en conjuguant la projection à une dimension sur la fonction constante par les opérateurs unitaires

$$(U(\alpha)\xi)(x) := \exp\left(\frac{i2\pi\alpha x}{\log 2}\right) \xi(x).$$

Cela suggère que l'on peut approximer la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(x))/(2\epsilon'(1_+))$ dans $[0, \log 2]$ par une expression trigonométrique de la forme

$$\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x) := \frac{2\lambda}{\log 2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \left(\cos \frac{2\pi n x}{\log 2} - d(n) \cos \frac{2\pi \alpha_n x}{\log 2} \right) \right). \tag{15}$$

Le fait suivant est vérifié :

La distance dans $L^1([0, \log 2], dx)$ de la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(|x|))/(2\epsilon'(1_+))$ à la fonction $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ de (15) (pour $m = 1732$, et avec les valeurs des angles α_j et des coefficients $d(j)$ fixés ci-dessus) vérifie

$$2 \int_0^{\log 2} |\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x) - \chi(x)| dx \sim 0.00122. \tag{16}$$

Démonstration : La preuve est un calcul par ordinateur de la norme dans $L^1([0, \log 2], dx)$ de la différence des deux fonctions. La fonction $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ oscille (ces oscillations sont visibles au voisinage de $\log 2$) mais sinon, elle approxime très bien la fonction $\chi(x)$ comme cela est montré par des calculs par ordinateur de la L^1 -norme de la différence

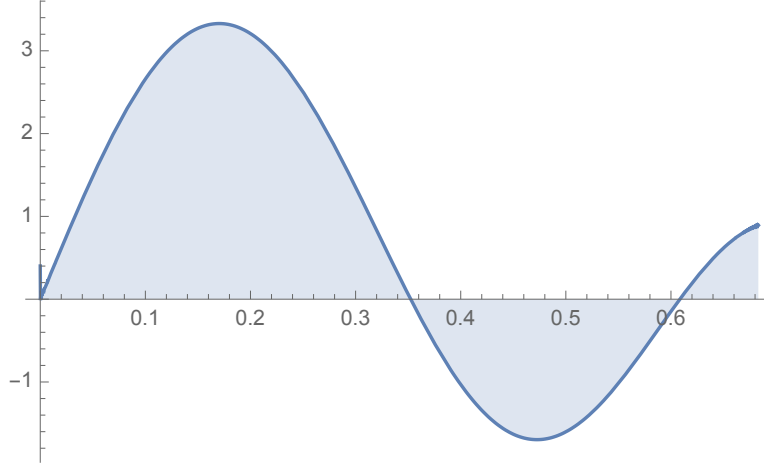


FIGURE 3 : Graphe de $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ dans $[0, \log 2]$ pour $m = 1732$.

Pour justifier (16), on utilise d'abord (57) de l'Appendice pour remplacer, sans aucune perte, la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(x))/(2\epsilon'(1^+))$ en utilisant la contribution des 11 premiers termes de la série (56) définissant $Q\epsilon$. \square

1.4 L'approximation de \mathbf{K}_I par un opérateur de rang fini T

Ici, le but est d'estimer la forme quadratique obtenue quand on remplace la fonction $\chi(x)$ par son approximation $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$.

Lemme 1. *Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ une fonction lisse paire de support contenu dans l'intervalle fermé $[-\log 2, \log 2]$. Alors, après avoir réarrangé l'ordre de sommation, on obtient*

$$\frac{2}{\log 2} \int_{-\log 2}^{\log 2} \left(\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \cos \frac{2\pi n x}{\log 2} \right) f(x) dx = f(0) \quad (17)$$

Démonstration : L'égalité découle de l'application de la formule de Poisson. Appelons $L = Z \log 2$ le réseau des multiples entiers de $\log 2$ et $L^\perp = Z/\log 2$ le réseau dual.

La sommation par la formule de Poisson donne

$$\sum_L f(x) = \frac{1}{\log 2} \sum_{L^\perp} \hat{f}(y), \quad \hat{f}(y) = \int f(u) \exp(-2\pi i u y) du.$$

Puisque f est paire et que son support est contenu dans l'intervalle fermé $[-\log 2, \log 2]$, on a,

$$\sum_L f(x) = f(0), \quad \hat{f}(y) = \int_{-\log 2}^{\log 2} \exp(2\pi i y x) f(x) dx = \int_{-\log 2}^{\log 2} \cos(2\pi y x) f(x) dx$$

et la formule de Poisson donne ainsi

$$f(0) = \frac{1}{\log 2} \sum_{L^\perp} \hat{f}(y) = \frac{1}{\log 2} \sum_Z \int_{-\log 2}^{\log 2} \cos \left(\frac{2\pi n x}{\log 2} \right) f(x) dx$$

ce qui donne (17). \square

Considérons alors l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2\left[-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2\right], dx$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous appelons

$$\xi_\alpha(x) := (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i \alpha x}{\log 2}\right), \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2\right] \quad (18)$$

et $\mathbf{e}_\alpha = |\xi_\alpha\rangle\langle\xi_\alpha|$ la projection orthogonale associée,

$$\mathbf{e}_\alpha(\xi) = \xi_\alpha \langle \xi_\alpha | \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

On a alors pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, en utilisant la forme spéciale (18) du vecteur ξ_α

$$\langle \eta | \mathbf{e}_\alpha(\xi) \rangle = \langle \eta | \xi_\alpha \rangle \langle \xi_\alpha | \xi \rangle = \frac{1}{\log 2} \int_{I \times I} \overline{\eta(x)} \exp\left(\frac{2\pi i \alpha x}{\log 2}\right) \xi(y) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha y}{\log 2}\right) dx dy$$

de telle façon que l'on obtient

$$\langle \eta | \mathbf{e}_\alpha(\xi) \rangle = \frac{1}{\log 2} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha v}{\log 2}\right) dx dv. \quad (19)$$

Le lemme suivant joue un rôle crucial dans le processus d'approximation.

Lemme 2. Appellons $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ une approximation de la fonction $\chi(x)$ de telle façon que la norme L^1 de la différence $\tau(\lambda, \alpha, d, m) - \chi$ soit $\leq \epsilon$. Alors l'opérateur compact \mathbf{K}_I de (6), pour $I = \left[-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2\right]$, est à une distance normée moindre que ϵ de l'opérateur de rang fini

$$T = \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbf{e}_n - d(|n|) \mathbf{e}_{\alpha_n}). \quad (20)$$

Ici, on définit $\alpha_{-n} = -\alpha_n \forall n$ et $d(0) = 0$; alors que pour $n > m$, on définit $\alpha_n = n$ et $d(n) = 1$ de telle façon que tous les termes dans la somme ci-dessus pour $|n| > m$ s'évanouissent.

Démonstration : Par (15), on a

$$\tau(\lambda, \alpha, d, m)(v) = \frac{\lambda}{\log 2} \sum_{-m}^m \left(\exp\left(\frac{-2\pi i n v}{\log 2}\right) - d(|n|) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha_n v}{\log 2}\right) \right)$$

de telle façon que, par (19), l'opérateur T de (20) sur $\mathcal{H} := L^2\left[-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2\right], dx$ vérifie l'égalité

$$\langle \eta | T(\xi) \rangle = \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) \tau(\lambda, \alpha, d, m)(v) dx dv. \quad (21)$$

L'opérateur compact \mathbf{K}_I de (6) vérifie la même égalité, avec $\chi(x)$ à la place de $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ dans l'intégrale. Ainsi, la norme de $\mathbf{K}_I - T$ est bornée par l'inégalité

$$\left| \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) a(v) dx dv \right| \leq \|\xi\| \|\eta\| \int_{-\log 2}^{\log 2} |a(v)| dv \quad (22)$$

qui découle de l'inégalité de Schwarz $\left| \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) dx \right| \leq \|\xi\| \|\eta\|$. \square

1.5 Le vecteur propre de valeur propre maximale

Dans le but de comprendre l'opérateur de rang fini T de (20), nous construisons d'abord un vecteur $\zeta \in \mathcal{H}$ orthogonal à tous les vecteurs ξ_{α_n} pour $n \neq 0$, en utilisant les conventions du Lemme 2 : *i.e.* pour $n > m$, nous posons $\alpha_n = n$. Nous considérons d'abord le produit infini

$$h(z) := \prod_{n>0} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_n^2}\right)$$

qui est convergent comme le produit définissant $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ et est, par construction, le produit de $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ par une fraction rationnelle dont le rôle est de remplacer les zéros $\pm n$ pour $n \in \{1, \dots, m\}$, par les $\pm \alpha_n$. Nous considérons alors la transformée de Fourier de $h(z \log 2)$. Nous utilisons les notations du Lemme 2.

Lemme 3. La transformée de Fourier $\psi(x) = \frac{1}{\log 2} \widehat{h}\left(\frac{x}{\log 2}\right)$ de $h(z \log 2)$ a son support dans l'intervalle $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$. On a $T\psi = \lambda\psi$ et (en utilisant les conventions du Lemme 2)

$$\langle \xi_0 | \psi \rangle = (\log 2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \langle \xi_{\alpha_n} | \psi \rangle = 0, \quad \forall n \neq 0. \quad (23)$$

Démonstration : Par construction, on a

$$\prod_{0 < n \leq m} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_n^2}\right) \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{0 < n \leq m} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) h(z). \quad (24)$$

La transformée de Fourier de $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors que la transformée de Fourier du côté gauche de (24) est une distribution avec support dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ainsi, par (24), la transformée de Fourier \widehat{h} de la fonction $h(z)$ vérifie l'équation différentielle de degré $2m$

$$\prod_{0 < n \leq m} \left(1 + \frac{\partial^2}{(2\pi n)^2}\right) \widehat{h}(x) = 0, \quad \forall x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (25)$$

Puisque l'espace des solutions de cette équation différentielle est constitué des fonctions qui sont des combinaisons linéaires des $2m$ fonctions trigonométriques $\exp(\pm 2\pi i n x)$ pour $|n| \leq m, n \neq 0$, on voit que toutes ces fonctions sont périodiques de période 1; ainsi, puisque \widehat{h} est de carré intégrable, elle doit s'évanouir en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En remettant à l'échelle par $\log 2$, *i.e.* en utilisant $\psi(x) = \frac{1}{\log 2} \widehat{h}\left(\frac{x}{\log 2}\right)$, on obtient que ψ a son support dans l'intervalle $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$. Par inversion de Fourier, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\alpha_n} | \psi \rangle &= (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \int_I \psi(x) \exp\left(-\frac{2\pi i \alpha_n x}{\log 2}\right) dx \\ &= (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \int \widehat{h}(y) \exp(-2\pi i \alpha_n y) dy = (\log 2)^{-\frac{1}{2}} h(\alpha_n) = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne (23) (puisque $h(1) = 1 \Rightarrow \langle \xi_0 | \psi \rangle = (\log 2)^{-\frac{1}{2}}$). Le fait que ψ soit orthogonal à tous les vecteurs ξ_{α_n} montre en utilisant (20) que $T\psi = \lambda \sum_{\mathbb{Z}} \mathbf{e}_n \psi = \lambda\psi$, puisque les vecteurs ξ_n forment une base orthonormée de \mathcal{H} . \square

Notons que la fonction ψ n'est pas normalisée. Le calcul des normes L^2 donne

$$\|\psi\|_2 = (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \|h\|_2, \quad \|h\|_2 \sim 1.05143, \quad \text{pour } m = 1732 \quad (26)$$

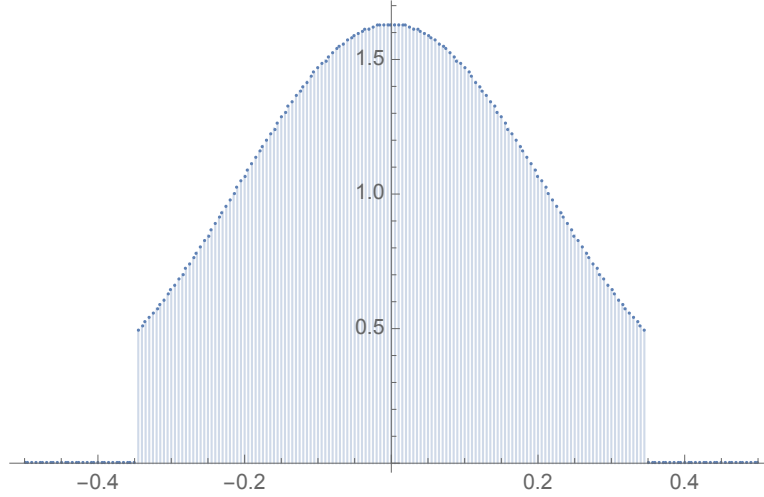


FIGURE 4 : Graphe de $\zeta(x) = \psi(x)/\|\psi\|_2$ dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

L'important fait numérique est que :

Pour $m = 1732$, on a : $\langle \xi_0 | \zeta \rangle \sim 0.94865$, où $\zeta(x) = \psi(x)/\|\psi\|_2$.

1.6 Calcul du spectre de T

La première méthode pour calculer le spectre de l'opérateur T de (20) est d'approximer cet opérateur de rang fini en utilisant la projection orthogonale $P(n)$ sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs ξ_j , pour $|j| < n$. Nous utilisons l'expression suivante du carré de la norme $\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|^2$.

Lemme 4. Soit $(\log \Gamma)^{(2)}$ la dérivée logarithmique de la fonction Γ , alors on a²

$$\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|^2 = \pi^{-2} \sin^2(\pi\alpha) \left((\log \Gamma)^{(2)}(n - \alpha) + (\log \Gamma)^{(2)}(\alpha + n) \right), \quad \forall \alpha \in [-n, n] \quad (27)$$

Démonstration : Les composantes du vecteur ξ_α dans la base ξ_m sont données comme suit

$$(\xi_\alpha)_k = \frac{1}{\log 2} \int_{-\frac{\log(2)}{2}}^{\frac{\log(2)}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i(\alpha - k)x}{\log 2}\right) dx = \frac{\sin(\pi(\alpha - k))}{\pi(\alpha - k)}.$$

On utilise alors l'identité, pour $a < n$ ($\sin^2(\pi(a - n)) = \sin^2(\pi a)$)

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi(a - k))}{\pi(a - k)} \right)^2 = \frac{\sin^2(\pi(a - n))}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (n - a + k)^{-2} = \pi^{-2} \sin^2(\pi a) (\log \Gamma)^{(2)}(n - a)$$

De façon similaire, pour $-n < a$, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{-n} \left(\frac{\sin(\pi(a - k))}{\pi(a - k)} \right)^2 = \pi^{-2} \sin^2(\pi a) \sum_{k=-\infty}^{-n} (a - k)^{-2} = \pi^{-2} \sin^2(\pi a) (\log \Gamma)^{(2)}(n + a)$$

ce qui donne (27). □

L'égalité

$$P(n)\mathbf{e}_\alpha(P(n)\xi) = \langle \xi_\alpha | P(n)\xi \rangle P(n)\xi_\alpha = \langle P(n)\xi_\alpha | \xi \rangle P(n)\xi_\alpha$$

donne l'estimation simple de la norme de l'opérateur

$$\|P(n)\mathbf{e}_\alpha P(n) - \mathbf{e}_\alpha\| \leq 2\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|.$$

2. Note de la traductrice : Appelée fonction digamma et souvent noté Ψ , si l'on considère la fonction gamma (Γ) comme une généralisation de la factorielle aux complexes, la fonction digamma (Ψ) serait une généralisation des nombres harmoniques aux complexes. Sur la toile, on trouve comme asymptote de digamma $\log z - 1/2 z - 1/12 z^2 \dots$

Cela permet de contrôler la norme de la différence $T - P(m)TP(m)$ comme suit

$$\|T - P(m)TP(m)\| \leq 2\lambda \sum_{|n| < m} d(|n|) \|\xi_{\alpha_n} - P(m)\xi_{\alpha_n}\|. \quad (28)$$

En utilisant (27) et le comportement asymptotique

$$(\log \Gamma)^{(2)}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)^3,$$

on obtient un premier contrôle de $\|T - P(m)TP(m)\|$. Alors, on peut calculer les valeurs propres de la matrice de dimension finie $P(m)TP(m)$. Nous l'avons fait pour $m = 1733$ ³, après avoir divisé par λ , pour vérifier que la plus grande valeur propre était bien 1. On peut alors obtenir la liste de ses valeurs propres ; les premières d'entre elles, ordonnées selon un ordre décroissant sont les suivantes

$$\{1., 0.652824, 0.027475, 0.000290146, 0.0000877245, 0.0000756436\}.$$

Seules les trois premières valeurs propres se démarquent comme valeurs propres positives stables pour T/λ . Après multiplication par λ , elles deviennent⁴

$$\lambda = 1.05158, \quad \lambda_2 = 0.686494, \quad \lambda_3 = 0.0288921. \quad (29)$$

On peut aussi obtenir les composantes c_n , sur la base des ξ_n , du vecteur propre associé à la valeur propre λ . Ces composantes sont plus petites que 10^{-4} pour $n > 30$ et leur graphe pour n proche de 0 (et pour n allant un peu plus loin) est reproduit ci-dessous.

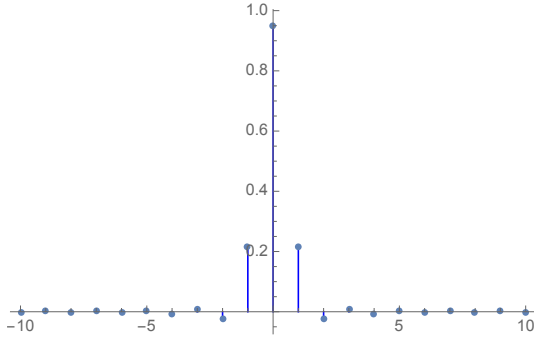


FIGURE 5 : Graphe des composantes c_n pour $|n| < 10$.

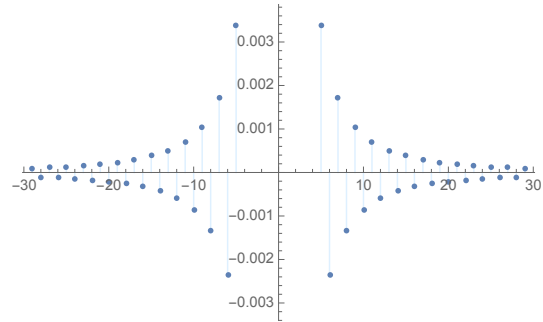


FIGURE 6 : Graphe des composantes c_n pour $7 < |n| < 30$.

On vérifie aussi que le graphe (Figure 7) de la fonction reconstruite $\sum c_n \xi_n$ coïncide avec le graphe (Figure 4) du vecteur propre théorique du §1.5.

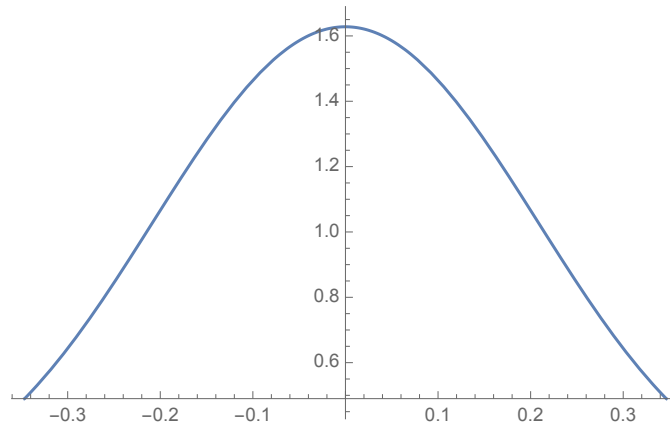


FIGURE 7 : Graphe de la fonction reconstruite $\sum c_n \xi_n$.

3. *Note de la traductrice* : différent du $m = 1732$ des autres cas. $1732 = 2^2 \times 433$ tandis que 1733 est un nombre premier.

4. *Note de la traductrice* : Pour λ_2 , $0.652824 \times 1.05158 = 0.686496662$.

Le fait important est que la première composante $c_0 \sim 0.951067$ est très proche de 1.

Remarque 5. Les composantes c_n respectent la relation de symétrie : $c_{-n} = c_n$ pour tout n . En fait, la matrice symétrique réelle de dimension finie $M = P(m)TP(m)$ présente même une symétrie plus poussée selon laquelle $M_{-i,-j} = M_{i,j}$ i.e. elle commute avec l'involution de parité. Il s'ensuit de cela que les vecteurs propres associés aux valeurs propres simples sont pairs ou impairs (par rapport à l'involution de parité). On trouve, par exemple, que le vecteur propre associé à la seconde valeur propre λ_2 est impair, i.e. ses composantes c'_n vérifient $c'_{-n} = -c'_n$ pour tout n .

Pour nos objectifs, l'estimation (28) ne garantit pas suffisamment de précision dans le calcul du spectre de T et de plus, le besoin d'entrer la somme (20) rend les calculs très lents.

Décrivons maintenant une seconde méthode pour calculer le spectre de T qui améliore la précision.

Nous considérons une nouvelle base (ζ_n) de $\mathcal{H} = L^2([-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2], dx)$ qui n'est plus orthonormée. Plus précisément, posons⁵, avec la notation (18),

$$\zeta_0 = \zeta, \quad \zeta_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{pour } |k| > m, \\ \xi_{-\alpha_{|k|}} & \text{pour } -m \leq k \leq -1, \\ \xi_{\alpha_k} & \text{pour } 1 \leq k \leq m. \end{cases}$$

Il est nécessaire de vérifier que les ζ_k , pour $|k| \leq m$, sont linéairement indépendants et cela suffit à montrer que les (ζ_n) forment une base. En fait, par le Lemme 3, $\zeta_0 = \zeta$ est orthogonal à tous les ζ_j pour $j \neq 0$. Dans cette base, le produit intérieur dans \mathcal{H} est donné par la matrice $J : J_{i,j} := \langle \zeta_i | \zeta_j \rangle$.

L'opérateur

$$G := \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \mathbf{e}_{\alpha_n} \quad (30)$$

est tel que

$$\langle \zeta_i | G \zeta_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \langle \zeta_i | \mathbf{e}_{\alpha_n} \zeta_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \langle \zeta_i | \xi_{\alpha_n} \rangle \langle \xi_{\alpha_n} | \zeta_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle.$$

Lemme 6. (i) Le spectre de l'opérateur T de (20) est $\{\lambda_{\max}(1 - \beta_j)\}$, où les variables β_j sont les valeurs propres de la matrice $A : A_{n,k} := d(|k|) \langle \zeta_n | \zeta_k \rangle$.

(ii) Prenons $N > m$. Les valeurs propres de la matrice A sont approximées par les valeurs propres de la matrice $A^{(N)}$ définie par : $A_{i,j}^{(N)} = A_{i,j}$ si $|i| \leq N$, $|j| \leq N$ et $A_{i,j}^{(N)} = \delta_{i,j}$ sinon, à une erreur près de $11 \epsilon(N)$ où

$$\epsilon(N) = \max(e(N), e'(N)), \quad e(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} \epsilon(j, N), \quad e'(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} d(|j|)^2 \epsilon(j, N)$$

avec $\epsilon(j, N) := \pi^{-2} \sin^2(\pi \alpha_j) ((\log \Gamma)^{(2)}(N - \alpha_j) + (\log \Gamma)^{(2)}(\alpha_j + N))$.

(iii) Le spectre de T est contenu dans $\{\lambda_{\max}\} \cup [-2, \lambda_2]$, où $\lambda_2 \leq 0.772216$.

Démonstration :

(i) Par (20) : $T = \lambda_{\max}(\text{Id} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \mathbf{e}_{\alpha_n}) = \lambda_{\max}(\text{Id} - G)$, où G est donné par (30).

Soit $V : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{H}$ l'application linéaire : $V(\delta_n) = \zeta_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, où δ_n est la base canonique. On a par définition de la matrice J ($J_{i,j} := \langle \zeta_i | \zeta_j \rangle$), que

$$\langle V\eta | V\eta' \rangle = \langle \eta | J\eta' \rangle = \langle J^{\frac{1}{2}}\eta | J^{\frac{1}{2}}\eta' \rangle.$$

5. Note de la rédactrice : la fonction ci-dessous n'est pas définie sur $]-1, 1[$?

Cela montre que $U := VJ^{-\frac{1}{2}} : \ell^2(Z) \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur unitaire.

Le spectre de G (30) comme opérateur dans \mathcal{H} est le même que le spectre de la matrice $U^*GU = J^{-\frac{1}{2}}LJ^{-\frac{1}{2}}$, où $L = V^*GV$ donc

$$L_{i,j} = \langle \delta_i | V^*GV\delta_j \rangle = \langle \zeta_i | G\zeta_j \rangle = \sum_{n \in Z} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle.$$

Le spectre de G est donc le même que celui de la matrice conjuguée LJ^{-1} . On a

$$(LJ^{-1})_{i,k} = \sum_{n,j \in Z} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle (J^{-1})_{j,k} = \sum_{n \in Z} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \delta_{n,k},$$

puisque pour tout $n \in Z$, on a : $\sum \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle (J^{-1})_{j,k} = (JJ^{-1})_{n,k} = \delta_{n,k}$. Ainsi $(LJ^{-1})_{i,k} = d(|k|) \langle \zeta_i | \zeta_k \rangle$ et cela prouve (i).

(ii) Pour $|n| > m$ et $|k| > m$, on a : $d(|k|) = 1$, $\zeta_n = \xi_n$, $\zeta_k = \xi_k$, de telle façon que

$$A_{n,k} = d(|k|) \langle \zeta_n | \zeta_k \rangle = \delta_{n,k}.$$

Les éléments $A_{i,j} - A_{i,j}^{(N)}$ de la matrice $A - A^{(N)}$ sont non nuls seulement dans le domaine ⁶

$$(i, j) \in [-N, N] \times [-N, N]^c \cup [-N, N]^c \times [-N, N].$$

Ainsi, l'opérateur norme de $A - A^{(N)}$ est plus petit que le maximum des normes des deux blocs correspondant à $[-N, N] \times [-N, N]^c$ et $[-N, N]^c \times [-N, N]$. À son tour, l'opérateur norme pour ces blocs est majoré par leur norme d'Hilbert-Schmidt, dont le carré est égal à

$$\sum_{|i| \leq N, |j| > N} |A_{i,j}|^2 = \sum_{|i| \leq N} \|\zeta_i - P(N)\zeta_i\|^2, \quad \sum_{|i| > N, |j| \leq N} |A_{i,j}|^2 = \sum_{|j| \leq N} d(|j|)^2 \|\zeta_j - P(N)\zeta_j\|^2.$$

Puisque nous supposons $N > m$, on a $\zeta_0 = P(N)\zeta_0$, et par (27), pour $j \neq 0$, $|j| \leq N$,

$$\|\zeta_j - P(N)\zeta_j\|^2 = \epsilon(j, N) := \pi^{-2} \sin^2(\pi\alpha_j) \left((\log \Gamma)^{(2)}(N - \alpha_j) + (\log \Gamma)^{(2)}(\alpha_j + N) \right).$$

Nous obtenons ainsi le contrôle suivant sur l'opérateur norme

$$\|A - A^{(N)}\| \leq \max(e(N), e'(N)), \quad e(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} \epsilon(j, N), \quad e'(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} d(|j|)^2 \epsilon(j, N). \quad (31)$$

Appelons $J^{(N)}$ la matrice définie par : $J_{i,j}^{(N)} = J_{i,j}$ si $|i| \leq N$, $|j| \leq N$ et $J_{i,j}^{(N)} = \delta_{i,j}$ sinon. Par les mêmes arguments que ci-dessus, on obtient

$$\|J - J^{(N)}\| \leq e(N). \quad (32)$$

Les matrices J et $J^{(N)}$ sont strictement positives. Soit $0 < r < 1 < s$ tel que

$$\text{Spec } J \subset [r, s], \quad \text{Spec } J^{(N)} \subset [r, s], \quad \|A\| \leq s, \quad \|A^{(N)}\| \leq s. \quad (33)$$

Nous fournirons les valeurs numériques de r, s plus tard.

Maintenant, nous estimons la différence de normes des matrices $\Pi = J^{-\frac{1}{2}}AJ^{\frac{1}{2}}$ et $\Pi_N = (J^{(N)})^{-\frac{1}{2}}A^{(N)}(J^{(N)})^{\frac{1}{2}}$ qui, comme montré ci-dessus, sont toutes les deux positives. Nous utilisons l'égalité pour les opérateurs strictement positifs X, X'

$$X^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\lambda + X)^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}} d\lambda, \quad X^{-\frac{1}{2}} - X'^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\lambda + X)^{-1} (X' - X) (\lambda + X')^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}} d\lambda$$

6. $[-N, N]^c$ dénote le complémentaire de $[-N, N]$

Cela donne pour $X, X' \geq r > 0$ l'estimation : $\|X^{-\frac{1}{2}} - X'^{-\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} \|X - X'\|$.

De manière similaire

$$X^{\frac{1}{2}} - X'^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\lambda + X')^{-1} (X - X') (\lambda + X)^{-1} \lambda^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

qui donne l'estimation : $\|X^{\frac{1}{2}} - X'^{\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \|X - X'\|$.

Alors, nous obtenons, en utilisant (33), (31), (32)

$$\|\Pi - \Pi_N\| \leq \|(J^{-\frac{1}{2}} - (J^{(N)})^{-\frac{1}{2}}) A J^{\frac{1}{2}}\| + \|(J^{(N)})^{-\frac{1}{2}} (A - A^{(N)}) J^{\frac{1}{2}}\| + \|(J^{(N)})^{-\frac{1}{2}} A^{(N)} (J^{\frac{1}{2}} - (J^{(N)})^{\frac{1}{2}})\|$$

de telle façon que

$$\|\Pi - \Pi_N\| \leq \frac{1}{2} (s/r)^{\frac{3}{2}} e(N) + (s/r)^{\frac{1}{2}} \max(e(N), e'(N)) + \frac{1}{2} (s/r) e(N) := \epsilon_1(N). \quad (34)$$

L'opérateur $\text{Id} - \Pi$ est compact et auto-adjoint, puisqu'il correspond à la matrice $U^* G U = J^{-\frac{1}{2}} L J^{-\frac{1}{2}}$.

Les opérateurs $A^{(N)}$, $J^{(N)}$ se décomposent en sommes directes dans la décomposition

$$\ell^2(Z) = \ell^2([-N, N]) \oplus \ell^2([-N, N]^c)$$

et agissent tous deux comme l'identité dans $\ell^2([-N, N]^c)$. Leurs actions dans $\ell^2([-N, N])$ sont données respectivement par les matrices $d(|j|) \langle \zeta_i | \zeta_j \rangle$ et $\langle \zeta_i | \zeta_j \rangle$. Ainsi, on déduit que l'opérateur $J^{(N)}$ est positif et que, comme ci-dessus

$$\sum_{n,j \in [-N, N]} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle ((J^{(N)})^{-1})_{j,k} = \sum_{n \in [-N, N]} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \delta_{n,k},$$

ce qui montre qu'à la fois $A^{(N)} J^{(N)}$ et $\Pi_N = (J^{(N)})^{-\frac{1}{2}} A^{(N)} (J^{(N)})^{\frac{1}{2}}$ sont des opérateurs positifs. Ainsi, l'opérateur $\text{Id} - \Pi^{(N)}$ est compact et auto-adjoint.

De plus, la norme de la différence $\Pi - \Pi_N$ est majorée par $\epsilon_1(N)$. Il découle de cela (voir [6] Théorème 1.7) que les valeurs propres $\lambda_j, \lambda_j^{(N)}$ de $\text{Id} - \Pi$ et $\text{Id} - \Pi^{(N)}$, ordonnées dans l'ordre décroissant, vérifient l'inégalité : $|\lambda_j - \lambda_j^{(N)}| \leq \epsilon_1(N)$, $\forall j$. Mais ces valeurs propres sont les mêmes que celles des opérateurs conjugués $\text{Id} - A$ et $\text{Id} - A^{(N)}$. Il reste à déterminer $0 < r < 1 < s$ tel que (33) est vérifiée. Noter d'abord que si $0 < r < 1 < s$ sont choisis de telle façon que

$$\text{Spec } J \subset [r, s], \quad \|A\| \leq s, \quad (35)$$

alors (33) est vérifiée puisque $J^{(N)} = P(N) J P(N) + (1 - P(N))$; donc $r \leq J \leq s$ implique $r \leq J^{(N)} \leq s$.

On a également (33) puisque $J^{(N)} = P(N) J P(N) + (1 - P(N))$; donc $\|A^{(N)}\| \leq \|A\|$. On prend alors $N = 2000$ et on utilise (31) et (32). Noter que la matrice $A^{(N)}$ n'est pas auto-adjointe et pour borner sa norme, on utilise sa décomposition comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, conjointement avec le calcul des valeurs propres des deux matrices, ce qui donne les majorants 1.533 et 0.0285 pour leurs normes. La valeur de $\max(e(N), e'(N))$ pour $N = 2000$ est ~ 0.017 ce qui fournit la borne $s = 1.578$. On trouve que les valeurs propres de $J^{(N)}$, pour $N = 2000$, sont à l'intérieur de l'intervalle $[0.313, 1.346]$ et en utilisant $e(N) \sim 0.0145$, on obtient $r = 0.299$. Cela donne $s/r \sim 5.27$ et, par (34), $\epsilon_1(N) \leq 11 \epsilon(N)$: la borne requise.

(iii) On utilise (ii) et on prend $N = 10000$. On obtient $\epsilon(N) \sim 0.00740487$, alors que la première valeur propre non nulle de la matrice $A^{(N)}$ est $\beta_2^{(N)} = 0.347112$. Donc par (ii), la première valeur non nulle de la matrice A est $\beta_2 \geq \beta_2^{(N)} - 11\epsilon(N) \sim 0.265658$. Cela montre que la seconde valeur propre $\lambda_2 = \lambda_{\max}(1 - \beta_2)$ de T vérifie $\lambda_2 \leq 0.772216$. \square

1.7 Preuve du théorème 1 de l'article original

Le calcul ci-dessus du spectre de l'opérateur compact T associé au Lemme 2 et à l'estimation (16) fournit l'information nécessaire sur le spectre de l'opérateur compact \mathbf{K}_I , puisqu'à la fois T et \mathbf{K}_I sont auto-adjoints. Alors, par [6] Théorème 1.7, avec leurs valeurs propres ordonnées selon un ordre décroissant et pour $\epsilon_1 \simeq 0.00122$, on a :

$$\|\mathbf{K}_I - T\| \leq \epsilon_1, \quad |\lambda_n(\mathbf{K}_I) - \lambda_n(T)| \leq \epsilon_1. \quad (36)$$

Ces limites permettent de transférer les résultats du §1.6 de T à \mathbf{K}_I .

À une imprécision calculatoire près que nous évaluerons plus tard, les résultats sur T sont les suivants

- 1) Les trois plus grandes valeurs propres de T sont fournies par (29) :

$$\lambda_{\max} = 1.05158, \quad \lambda_2 = 0.686494, \quad \lambda_3 = 0.0288921.$$

- 2) Le produit intérieur de ζ avec la fonction constante⁷ ξ_0 est ~ 0.94865 .

Appelons P_ζ la projection orthogonale sur $\zeta^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \zeta \mid \eta \rangle = 0\}$. La décomposition spectrale

$$T = \lambda_{\max} |\zeta\rangle\langle\zeta| + R, \quad R \leq \lambda_2 P_\zeta \quad (37)$$

montre que la forme quadratique associée à $\text{Id} - T$ est donnée, en utilisant $\text{Id} = |\zeta\rangle\langle\zeta| + P_\zeta$, par

$$\langle \xi \mid (\text{Id} - T)\xi \rangle = (1 - \lambda_{\max}) |\langle \zeta \mid \xi \rangle|^2 + \langle P_\zeta \xi \mid (P_\zeta - R)\xi \rangle \quad (38)$$

et puisque $R \leq \lambda_2 P_\zeta$, le dernier terme vérifie

$$\langle P_\zeta \xi \mid (P_\zeta - R)\xi \rangle \geq (1 - \lambda_2) \|P_\zeta \xi\|^2. \quad (39)$$

Le prochain lemme montre comment restaurer la positivité d'une forme quadratique qui est positive sur un sous-espace de codimension 1, en lui ajoutant une forme quadratique de rang 1.

Lemme 7. *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ les vecteurs unitaires et P_ϕ la projection orthogonale sur $\phi^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \phi \mid \eta \rangle = 0\}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Alors la forme quadratique suivante sur \mathcal{H}*

$$B(\xi) := -b |\langle \phi \mid \xi \rangle|^2 + a |\langle \psi \mid \xi \rangle|^2 + c \|P_\phi(\xi)\|^2$$

est positive si et seulement si

$$a + c \geq b, \quad b(a + c) \leq a(b + c) |\langle \phi \mid \psi \rangle|^2. \quad (40)$$

Quand (40) est vérifiée, on a : $B(\xi) \geq \epsilon \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathcal{H}$, où

$$2\epsilon = a - b + c - \left((a + b + c)^2 - 4a(b + c) |\langle \phi \mid \psi \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a la décomposition orthogonale

$$\xi = P_\phi(\xi) + \phi \langle \phi \mid \xi \rangle = P_\phi(\xi) + e_\phi(\xi).$$

Appelons $\psi_1 = e_\phi(\psi)$ et $\psi_2 = P_\phi(\psi)$. Nous pouvons supposer que $\psi_2 \neq 0$ car sinon B est positif si et seulement si $a \geq b$. Nous pouvons supposer que le produit scalaire $\alpha = \langle \phi \mid \psi \rangle$ est réel. Appelons alors $E \subset \mathcal{H}$ l'espace à deux dimensions engendré par ϕ et ψ . Puisque par hypothèse $c \geq 0$, il s'ensuit que B

7. normalisée pour être de norme 1.

est positif si et seulement si sa restriction à E est positive. Dans la base orthonormée de E formée par $(\phi, \psi_2/\|\psi_2\|)$, la matrice qui représente B est

$$\begin{pmatrix} a\alpha^2 - b & a\alpha\beta \\ a\alpha\beta & a\beta^2 + c \end{pmatrix}, \quad \alpha = \langle \phi | \psi \rangle, \quad \beta = \|\psi_2\|.$$

Elle est réelle symétrique, puisque ses valeurs propres sont réelles : les valeurs propres sont toutes positives si et seulement si la trace et le déterminant de la matrice sont positifs. On a également : $\alpha^2 + \beta^2 = \|\psi\|^2 = 1$. Donc la trace est égale à $a + c - b$. Le déterminant est : $caa^2 - ba\beta^2 - bc = a\alpha^2(b + c) - b(a + c)$.

L'inégalité $B(\xi) \geq \epsilon \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathcal{H}$ découle alors de la formule pour les valeurs propres de la matrice ci-dessus, avec ϵ la plus petite d'entre elles, et l'inégalité $\epsilon \leq c$ qui découle de

$$(a + b + c)^2 - 4a(b + c)|\langle \phi | \psi \rangle|^2 - (-a + b + c)^2 = 4a(b + c)(1 - |\langle \phi | \psi \rangle|^2).$$

Finalement, pour $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in E$, $\xi_2 \in E^\perp$, on a $B(\xi) = B(\xi_1) + B(\xi_2) \geq \epsilon \|\xi_1\|^2 + c \|\xi_2\|^2$. \square

Lemme 8. Soit $\mathbf{N}_I = -2e'(1_+)(\text{Id} - \mathbf{K}_I)$ l'opérateur dans $\mathcal{H} = L^2(I)$, $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$ qui représente la forme quadratique associée à $E_+ \circ Q_+$ comme dans la Proposition 1.1. Alors, avec $\gamma \sim 2.94355$,

$$\langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \leq \gamma |\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}. \quad (42)$$

Nous travaillons d'abord avec T et appliquons le Lemme 7, avec $\phi = \zeta$, $\psi = \xi_0$.

Nous déterminons le scalaire $a > 0$ pour faire respecter (40) par $b = \lambda_{\max} - 1$, $c = 1 - \lambda_2$ et le produit intérieur des deux vecteurs donné par $\langle \zeta | \xi_0 \rangle$.

Puisque pour les valeurs numériques ci-dessus, on a $c > b$, la condition $a + c \geq b$ est automatique. La seconde condition de (40) est

$$a((c + b)|\langle \zeta | \xi_0 \rangle|^2 - b) \geq bc.$$

Pour les valeurs numériques ci-dessus, on a $b \sim 0.05158$, $\langle \zeta | \xi_0 \rangle \sim 0.94865$. Par le Lemme 6, on a $c > 0.227784$, alors en utilisant (41), l'inégalité suivante devient vérifiée pour $a \sim 0.064$, $\epsilon_2 \sim 0.00441$

$$\langle \xi | (\text{Id} - T)\xi \rangle + a|\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2 \geq \epsilon_2 \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Par (36), on a $\|\mathbf{K}_I - T\| \leq \epsilon_1$, où $\epsilon_1 \simeq 0.00122 < \epsilon_2$, ainsi

$$\langle \xi | (\text{Id} - \mathbf{K}_I)\xi \rangle + a|\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2 \geq (\epsilon_2 - \epsilon_1)\|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

ce qui donne (42) après une multiplication par $-2e'(1_+)$. \square

Nous pouvons finalement établir notre résultat principal :

Théorème 9. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ une fonction lisse à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en $-\frac{i}{2}$. Soit \mathbf{S} la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ sur le sous-espace des fonctions paires qui s'évanouissent ainsi que leur transformée de Fourier dans l'intervalle $[-1, 1]$. Alors

$$W_\infty(g * g^*) \geq \text{Tr}(\vartheta(g) \mathbf{S} \vartheta(g)^*) - c |\hat{g}(0)|^2, \quad c = \frac{4\gamma}{\log 2}. \quad (43)$$

Par le théorème 3 de l'article original⁸, on a, pour $f = g * g^*$,

$$\mathrm{Tr}(\vartheta(f)\mathbf{S}) = W_\infty(f) + \int f(\rho^{-1})\epsilon(\rho)d^*\rho = W_\infty(f) + E(f). \quad (44)$$

Appelons $k(u) := u^{\frac{1}{2}} \int_0^u v^{-\frac{1}{2}}g(v) d^*v$. On a : $0 = \widehat{g}(-\frac{i}{2}) = \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}}g(v) d^*v$, et ainsi le support de k est contenu dans $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$.

De plus : $k = Y * g$, $k^* = Y^* * g^*$, $k * k^* = Y^* * Y * f$ où, comme dans le Lemme 3.3⁹, $Y(\rho) = 0$ pour $\rho < 1$, $Y(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}}$ pour $\rho \geq 1$ et $Y^*(\rho) = Y(\rho^{-1})$. Ainsi, on obtient

$$Q(k * k^*) = g * g^* = f, \quad \widehat{k}(0) = -2\widehat{g}(0) \quad (45)$$

où la seconde égalité découle d'une intégration par parties de

$$\widehat{k}(0) = \int_0^\infty k(u)d^*u = \int_0^\infty \left(\int_0^u v^{-\frac{3}{2}}g(v) dv \right) u^{-\frac{1}{2}}du = - \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}}g(u)2u^{\frac{1}{2}}du = -2\widehat{g}(0).$$

On obtient donc

$$\int f(\rho^{-1})\epsilon(\rho)d^*\rho = E \circ Q(k * k^*).$$

Appelons $\xi(x) := k(\exp(x))$. On a : $\xi \in \mathcal{H} = L^2([-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2])$ et en utilisant (5) de la Proposition $\mathfrak{F}\text{top}$ 1.1

$$E \circ Q(k * k^*) = E_+(Q_+(\xi * \xi^*)) = \langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle.$$

Alors, par le Lemme 8, on obtient, en utilisant $\langle \xi_0 | \xi \rangle = (\log 2)^{-1/2}\widehat{\xi}(0) = (\log 2)^{-1/2}\widehat{k}(0)$

$$E(f) = E \circ Q(k * k^*) = \langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \leq \gamma |\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2 = \frac{\gamma}{\log 2} |\widehat{k}(0)|^2 = \frac{4\gamma}{\log 2} |\widehat{g}(0)|^2,$$

ce qui donne l'inégalité souhaitée. \square

Remarque 8¹⁰ : Par (36), la première valeur propre $\lambda_1(\mathbf{K}_I)$ de \mathbf{K}_I vérifie $|\lambda_1(\mathbf{K}_I) - \lambda_{\max}| \leq \epsilon_1$ alors que $\lambda_{\max} = 1.05158$ et $\epsilon_1 \simeq 0.00122$. Ainsi, puisque $C_c^\infty((-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2))$ est dense dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2([-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2])$, il existe un vecteur unitaire $\xi \in C_c^\infty((-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2))$ tel que $\mathbf{K}_I(\xi) \sim \lambda_1(\mathbf{K}_I)\xi$. Il s'ensuit de cela, en utilisant $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+)(\mathrm{Id} - \mathbf{K}_I)$, que

$$\langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \geq 2\epsilon'(1_+)(1.05 - 1)\|\xi\|^2 \geq 0.1\epsilon'(1_+)|\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2$$

Appelons alors $h(\rho) := \xi(\log \rho)$ et $g(\rho) := (\frac{1}{2} - \rho\partial_\rho)h(\rho)$, de telle manière que $g(\rho) = \eta(\log \rho)$ pour $\eta = \frac{1}{2}\xi - \xi'$. On a $\widehat{g}(-\frac{i}{2}) = 0$ et comme dans la preuve du théorème 9, on obtient

$$E(g * g^*) = E \circ Q(h * h^*) = \langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \geq 0.1\epsilon'(1_+)|\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2 > 13|\widehat{g}(0)|^2.$$

Ainsi, par (44), on obtient

$$W_\infty(g * g^*) = \mathrm{Tr}(\vartheta(g)\mathbf{S}\vartheta(g)^*) - E(g * g^*) < \mathrm{Tr}(\vartheta(g)\mathbf{S}\vartheta(g)^*) - 13|\widehat{g}(0)|^2.$$

Cela montre que la meilleure constante c vérifiant (43) est telle que $13 < c < 17$.

8. <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>, p. 6.

9. <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>, p. 18.

10. *Note de la rédactrice* : Peut-être à rapprocher de la constante κ_3 du théorème 3.3 égale à 14 de l'article de Aline Bonami et Abderrazek Karoui, *Bornes uniformes des fonctions d'ondes sphéroïdales et décroissance des valeurs propres*, C. R. A. S., Paris, Ser. 1, 352, 2014, p. 229-234

Appendice : Problèmes de convergence

Nous rassemblons quelques inégalités qui assurent la convergence de la série $T_n(\rho)$:

Pour $\rho > 1$, on a l'égalité

$$Q\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} T_n(\rho), \quad (46)$$

où

$$T_n(\rho) = \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx + \rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) - \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho). \quad (47)$$

Nous considérons d'abord les termes

$$A_n(\rho) := \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx.$$

Nous estimons l'intégrale en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\left| \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx \right| \leq \left(\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \zeta_n)(\rho x)^2 \rho dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a, en utilisant $D_u(f)(x) = x \partial_x f(x)$

$$\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \zeta_n)(\rho x)^2 \rho dx = \int_1^\rho (D_u \zeta_n)(y)^2 dy \leq \rho^2 \int_1^\rho (\partial_y \zeta_n)(y)^2 dy.$$

Avec $\zeta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} \eta_n(x)$ et $\eta_n = F_{e_R} \xi_n$, on obtient donc

$$\int_1^\rho (\partial_y \zeta_n)^2(y) dy = \frac{1}{1-\lambda(n)^2} \int_1^\rho (\partial_y \eta_n)^2(y) dy \leq \frac{1}{1-\lambda(n)^2} (2\pi)^2,$$

puisque $\partial_y \eta_n$ est la transformée de Fourier de $2\pi i x \xi_n(x)$ dont la L^2 -norme est bornée par 2π . Nous obtenons ainsi

$$\left(\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \zeta_n)^2(\rho x) \rho dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho \frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}}.$$

Pour estimer $\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x)^2 dx$, nous réécrivons l'égalité (48)

$$(\mathbf{W}\xi)(x) = -\partial((1-x^2)\partial)\xi(x) + (2\pi x)^2 \xi(x). \quad (48)$$

comme suit

$$(\mathbf{W}f)(x) = -(1-x^2)f''(x) + 2xf'(x) + 4\pi^2 x^2 f(x), \quad (49)$$

de telle façon que puisque ξ_n est un vecteur propre de \mathbf{W} (i.e. $\mathbf{W}\xi_n = \chi_{2n}^{2\pi} \xi_n$), en utilisant les notations de [7], on obtient

$$D_u(\xi_n)(x) = \frac{1}{2} (1-x^2) \xi_n''(x) + (\chi_{2n}^{2\pi} - 2\pi^2 x^2) \xi_n(x).$$

En supposant que $n \geq 3$ pour assurer que $\chi_{2n}^{2\pi} \geq 2\pi^2$, on déduit alors

$$\|D_u(\xi_n)\| \leq \chi_{2n}^{2\pi} + \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (\xi_n''(x))^2 (1-x^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Grâce à [7] (Théorème 3.6), on a, en remarquant la normalisation différente du produit intérieur due à

$$\langle \eta \mid \xi \rangle := \frac{1}{2} \int_R \overline{\eta(x)} \xi(x) dx = \int_0^\infty \overline{\eta(x)} \xi(x) dx, \quad (50)$$

$$\left(\int_0^1 (\xi_n''(x))^2 (1-x^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq (2n)^2 + (6\pi + 1)2n + 3(2\pi + 1)^2, \quad (51)$$

alors que les valeurs propres $\chi_{2n}^{2\pi}$ vérifient (voir *op.cit.*) : $\chi_{2n}^{2\pi} \leq 2n(2n + 1) + (2\pi)^2$. Ainsi, on obtient l'inégalité

$$\|D_u(\xi_n)\| \leq 8n^2 + (6\pi + 2)2n + 16\pi^2 + 12\pi + 1$$

et la borne uniforme suivante (prenons $\rho \leq 2$)

$$|A_n(\rho)| \leq \frac{\lambda(n)}{1 - \lambda(n)^2} 4\pi(8n^2 + (6\pi + 2)2n + 16\pi^2 + 12\pi + 1), \quad \forall \rho, 1 \leq \rho \leq 2. \quad (52)$$

Nous considérons alors les termes

$$B_n(\rho) := \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \left(\rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) - \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho) \right).$$

Grâce à (53) (voir [Rokhlin], Théorème 12)

$$|\xi_n(1)| \leq \sqrt{2n + \frac{1}{2}}, \quad (53)$$

on a $|\xi_n(1)| \leq \sqrt{2n + \frac{1}{2}}$. On a également $\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \eta_n$ et $\eta_n = F_{e_R} \xi_n$ donc

$$(D_u \zeta_n)(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \rho \eta_n'(\rho) \implies |(D_u \zeta_n)(\rho)| \leq \frac{8\pi}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}}, \quad \forall \rho, 1 \leq \rho \leq 2$$

en utilisant l'égalité $\eta_n'(\rho) = -4\pi \int_0^1 \sin(2\pi\rho x) \xi_n(x) x dx$ et l'inégalité de Schwarz.

Par conséquent,

$$\frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \left| \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho) \right| \leq \frac{\lambda(n)}{1 - \lambda(n)^2} 8\pi \sqrt{2(2n + \frac{1}{2})}, \quad \forall \rho, 1 \leq \rho \leq 2.$$

Par

$$\mathcal{P}_1 \eta_n = \mathcal{P}_1 F_{e_R} \xi_n = \lambda(n) \xi_n, \quad (54)$$

on obtient : $\eta_n(x) = \lambda(n) \xi_n(x)$, car $x \in [0, 1]$ donc, on obtient par proportionnalité

$$(D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \eta_n(1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} (D_u \eta_n)(\rho^{-1}) \xi_n(1)$$

et la borne ci-dessus $\eta_n'(y) = -4\pi \int_0^1 \sin(2\pi y x) \xi_n(x) x dx$, appliquée pour $y = \rho^{-1}$ donne donc

$$|(D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1)| \leq \frac{4\pi}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \sqrt{2n + \frac{1}{2}}$$

de telle manière que

$$\frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} |\rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1)| \leq \frac{\lambda(n)}{1 - \lambda(n)^2} 4\pi \sqrt{2n + \frac{1}{2}}, \quad \forall \rho, 1 \leq \rho \leq 2.$$

Les inégalités ci-dessus donnent alors

$$|B_n(\rho)| \leq \frac{\lambda(n)}{1 - \lambda(n)^2} (8\pi\sqrt{2} + 4\pi) \sqrt{2n + \frac{1}{2}}. \quad (55)$$

Nous obtenons donc le

Lemme 10. (i) La série (3) de l'appendice est convergente et le reste (après avoir remplacé la somme infinie par la somme des N premiers termes) est majoré comme suit

$$|Q\epsilon(\rho) - \sum_0^N \frac{\lambda(k)}{\sqrt{1 - \lambda(k)^2}} T_k(\rho)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} p(n) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \quad (56)$$

où $p(n) = 16n^2 + 8(1 + 3\pi)n + (4 + \sqrt{2})\sqrt{4n + 1} + 32\pi^2 + 24\pi + 2$.

(ii) Pour $N = 10$, le reste est inférieur à 2.366×10^{-12} pour tout $\rho \in [1, 2]$:

$$|Q\epsilon(\rho) - \sum_0^{10} \frac{\lambda(k)}{\sqrt{1 - \lambda(k)^2}} T_k(\rho)| \leq 2.366 \times 10^{-12}, \quad \forall \rho \in [1, 2]. \quad (57)$$

Démonstration :

(i) découle de (52) et (55) qui se combinent avec

$$|\lambda(n)| \leq \frac{2^{2n} \pi^{2n+\frac{1}{2}} ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \sim (4n + 1)^{-2n-\frac{1}{2}} (e\pi)^{2n+\frac{1}{2}}, \quad (58)$$

pour amener pour $n \geq 3$ à,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} T_n(\rho) \right| &\leq 2\lambda(n) (|A_n(\rho)| + |B_n(\rho)|) \\ &\leq \frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} (16n^2 + 8(1 + 3\pi)n + (4 + \sqrt{2})\sqrt{4n + 1} + 32\pi^2 + 24\pi + 2) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \end{aligned}$$

ce qui donne (56).

(ii) Pour calculer la borne supérieure du côté droit de (56) pour $N = 10$, on sépare la somme en deux, en utilisant la simple estimation $p(n) \leq 120n^2$ pour $n \geq 35$:

$$\frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} p(n) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \leq \frac{15 \cdot 2^{2n+4} n^2 \pi^{2n+\frac{1}{2}} ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})}, \quad \forall n \geq 35.$$

En appelant ν_n le côté droit de cette inégalité, on obtient la relation

$$\nu_{n+1}/\nu_n = \frac{8\pi^2(n+1)^3(2n+1)}{n^2(4n+1)(4n+3)^2(4n+5)} = \frac{\pi^2}{16n^2} + \frac{\pi^2}{32n^3} + O(n^{-4})$$

et $n^2\nu_{n+1}/\nu_n < 1$ pour tout $n \geq 35$. On a $\nu_{35} \leq 5 \times 10^{-81}$, et ainsi, en utilisant la borne triviale par la série géométrique, on obtient

$$\sum_{35}^{\infty} \nu_n \leq \frac{1225}{1224} \nu_{35} \leq 10^{-80}.$$

On calcule alors simplement les termes manquants et ils donnent

$$\sum_{11}^{34} \frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} p(n) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \sim 2.365 \times 10^{-12}$$

Ainsi en combinant les inégalités ci-dessus, nous obtenons (57). □

Remarque 9 : Pour compléter, nous donnons une courte preuve d’une forme améliorée de (51). Comme dans [7] (équation (3.26)), on a, en utilisant une intégration par parties, l’égalité, pour $f \in C^\infty([-1, 1], R)$, et $c = 2\pi$, en utilisant (48)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\mathbf{W}f)^2(x)dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 |f''(x)|^2 dx + 2 \int_{-1}^1 (1-x^2)(1+c^2x^2) |f'(x)|^2 dx + \\ &+ c^2 \int_{-1}^1 (c^2x^4 + 6x^2 - 2) |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

En appliquant cela à $f = \xi_n$ et en utilisant $\mathbf{W}\xi_n = \chi_{2n}^{2\pi}\xi_n$, on obtient

$$\int_{-1}^1 (\xi_n''(x))^2 (1-x^2)^2 dx \leq \int_{-1}^1 (\mathbf{W}\xi_n)^2(x) dx + 2c^2 \int_{-1}^1 \xi_n(x)^2 dx,$$

ce qui fournit l’amélioration suivante de (51)

$$\left(\int_0^1 (\xi_n''(x))^2 (1-x^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{(\chi_{2n}^{2\pi})^2 + 2c^2} \leq 2n(2n+1) + (2\pi)^2(1+\sqrt{2}).$$

□

Bibliographie

- [1] M. Bakonyi, H. Woerdeman, *Matrix completions, moments, and sums of Hermitian squares*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.
- [2] A. Connes, *An essay on the Riemann Hypothesis*. Dans “Open problems in mathematics”, Springer (2016), volume édité par Michael Rassias et John Nash.
- [3] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Scaling Site*. Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), n° 3, p. 1803–1850.
- [4] A. Connes, C. Consani, *The Riemann-Roch strategy, complex lift of the Scaling Site*, “Advances in Noncommutative Geometry, On the Occasion of Alain Connes’ 70th Birthday”, Chamseddine, A., Consani, C., Higson, N., Khalkhali, M., Moscovici, H., Yu, G. (Eds.), Springer (2020). Available at <http://arxiv.org/abs/1805.10501>. ISBN 978-3-030-29596-7.
- [5] A. Connes, W. van Suijlekom, *Spectral truncations in noncommutative geometry and operator systems*, arXiv :2004.14115.
- [6] B. Simon, *Trace ideals and their applications*. Seconde édition. Mathematical Surveys and Monographs, 120. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [7] L. L. Wang, *Analysis of spectral approximations using prolate spheroidal wave functions*, Math. of Comp. Volume **79**, Number 270, April 2010, p. 807–827.