Castors occupés bipant
et conjecture des nombres premiers jumeaux

Andrey Akinshin

Résumé : Dans ce post, j'utilise les castors occupés bipant pour montrer que la conjecture des nombres premiers jumeaux pourrait être démontrée ou infirmée.

Castors occupés

Considérons une machine de Turing $T(n)$ avec un alphabet à 2 symboles, une bande infinie dans les 2 sens, et n états. Il y a deux sortes de telles machines : les machines qui s'arrêtent après un nombre fini d'étapes et les machines qui ne s'arrêtent jamais (en supposant que toutes les machines commencent sur un enregistrement tous-0). Parmi toutes les $T(n)$ qui s'arrêtent, sélectionnons celle qui a la durée d'exécution la plus longue. Une telle machine est appelé *castor occupé* (dénomination introduite par Tibor Radó en 1962). Le nombre d'étapes qu'exécute le castor occupé avant de s'arrêter est appelé le *nombre du castor occupé* et on le dénote habituellement par $\mathbf{BB(n)}$. Cette fonction croît astronomiquement vite et on pourrait prouver qu'elle est incalculable. Pourtant, on a quelques informations récoltées à la main à propos des premiers nombres des castors occupés :

n	$\mathbf{BB(n)}$
1	1
2	6
3	21
4	107
5	$\geq 47\ 176\ 870$
6	$> 7.4\ .\ 10^{36\ 534}$
7	$> 10^{10^{10^{10^{18\ 705\ 352}}}}$

Remarque : en mai 2022, un ensemble de nouvelles estimations pour $\mathbf{BB(6)}$ a été découvert, voir la discussion sur les castors occupés pour des détails.

Les castors occupés ont d'intéressantes applications. Par exemple, considérons la conjecture de Goldbach : “Tout nombre pair plus grand que 2 est la somme de deux nombres premiers” (e.g., $8 = 5 + 3$). Cette conjecture a été énoncée en 1742, et elle reste indémontrée. Des douzaines de mathématiciens célèbres ont essayé de la démontrer sans succès. Si l'on se rappelle des théorèmes d'incomplétude de Gödel, on peut penser qu'il y a une chance que la conjecture de Goldbach ne puisse être démontrée ou infirmée. Cela pourrait cependant être assez dérangeant. Heureusement, les castors occupés se ruent à notre secours. Construisons une machine de Turing qui énumère tous les nombres pairs supérieurs à 2, vérifie si un tel nombre est la somme de deux nombres premiers, et s'arrête si un contre-exemple à la conjecture de Goldbach est trouvé. Il y a une telle machine ici qui nécessite seulement 27 états. Maintenant, faisons tourner cette machine un moment et voyons si elle s'arrête. Si le nombre d'étapes réalisées excédait $\mathbf{BB(27)}$, cela signifierait que la conjecture de Goldbach est vraie (parce que si elle était fausse, la machine se serait arrêtée plus tôt). Si la machine s'arrête en un nombre d'étapes moindre que $\mathbf{BB(27)}$, elle a découvert un contre-exemple à la conjecture de Goldbach. Bien que cette approche soit hautement irréalisable ($\mathbf{BB(27)}$ est astronomiquement grand), elle nous permet de prouver qu'il est possible de démontrer ou infirmer

Référence : https://aakinshin.net/posts/bbb-twin-primes/, 1er juin 2022.
Traduction : Denise Vella-Chemla, juin 2022.

la conjecture de Goldbach. Cette approche pourrait être appliquée à d'autres conjectures comme la consistance de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ici, une machine à 748 états est proposée) ou pour l'hypothèse de Riemann (là une machine à 744 états est proposée).

Si vous voulez en apprendre davantage au sujet des castors occupés, je recommande grandement les ressources suivantes :

— Domaine du castor occupé de Scott Aaronson (2020) ;

— Aperçu historique des castors occupés de Pascal Michel ;

— Compétitions de castors occupés de Pascal Michel ;

— Discussions au sujet des castors occupés sur Google Groups ;

— Défi du castor occupé.

Castors occupés bipant

Dans le domaine du castor occupé, Scott Aaronson a introduit un concept de castor occupé bipant. Il a proposé que l'on définisse l'un des états de la machine de Turing comme un "état bipant" (à chaque fois que la machine atteint cet état, elle bipe sans s'arrêter). Parmi toutes les machines $T(n)$ qui bipent un nombre fini de fois, choisissons celle qui tourne le plus longtemps jusqu'à ce que le bip final soit atteint. Une telle machine est appelé un *castor occupé bipant*. Le nombre d'étapes qu'il devrait falloir pour que le bip final advienne est appelé le *nombre du castor occupé bipant* et est noté $\mathbf{BBB(n)}$. $\mathbf{BBB(n)}$ est plus incalculable que $\mathbf{BB(n)}$ et il croît plus vite. Voici des estimations de quelques premières valeurs :

n	$\mathbf{BBB(n)}$
1	1
2	6
3	≥ 55
4	$\geq 32\,779\,478$
5	$\geq 10^{10^{286\,574}}$

Si vous voulez en apprendre davantage au sujet des castors occupés bipant, je recommande grandement les ressources suivantes :

— blog de Nick Drozd

— blog de Shawn Ligocki

— discussions sur les castors occupés sur Google Groups

Castors occupés bipant et conjecture des nombres premiers jumeaux

Le castor occupé classique travaille bien pour des conjectures qui devraient être infirmées en utilisant un contre-exemple parmi un nombre dénombrable d'objets comme la conjecture de Goldbach. Pour de telles conjectures, on peut toujours construire une machine de Turing qui énumère tous les objets et s'arrête une fois qu'un contre-exemple est trouvé. Cela fournit une façon de montrer qu'une conjecture pourrait être prouvée ou infirmée. Pourtant, cette approche ne marche pas pour des conjectures qui énoncent qu'il y a un nombre infini d'objets qui vérifient une propriété calculable parmi un nombre dénombrable d'objets.

Un exemple classique d'une telle conjecture est la conjecture des nombres premiers jumeaux. Elle énonce qu'il y a une infinité de nombres premiers jumeaux qui sont des paires de nombres premiers écartés de 2 (e.g., $(5, 7)$ ou $(11, 13)$). Récemment, j'ai trouvé une idée sur la façon d'utiliser les castors occupés bipant pour de tels problèmes.

Considérons une machine de Turing qui énumère tous les nombres naturels et vérifie si $(x, x + 2)$ est une paire de nombres premiers. Une fois qu'une telle paire est trouvée, la machine bipe. Elle ne s'arrête jamais : elle tourne indéfiniment et énumère tous les nombres naturels. De façon évidente, une telle machine pourrait facilement être fabriquée. Appelons-la T_1. On dénote également le nombre d'états de T_1 par n_1.

Maintenant, lançons la machine, faisons-nous une tasse de thé, et attendons jusqu'à ce que T_1 ait calculé $\mathbf{BBB(n_1)}$ étapes. On suppose qu'à ce moment, on a énuméré m_1 nombres naturels. Si la conjecture des nombres premiers jumeaux est fausse, T_1 devrait biper un nombre fini de fois ; le dernier bip advient avant que l'étape numéro $\mathbf{BBB(n_1)}$ ne soit atteinte. Si on continue à faire tourner cette machine après $\mathbf{BBB(n_1)}$ étapes et qu'on observe au moins un bip, cela devrait signifier qu'elle bipe toujours et la conjecture des nombres premiers jumeaux est vraie. Ainsi, nous avons montré que s'il y a une seule paire de nombres premiers jumeaux plus grande que m_1, il y a une infinité de paires de nombres premiers jumeaux. À nouveau, cette approche est quasiment impossible à mettre en pratique parce que l'univers s'effondrerait probablement avant que nous ayons calculé $\mathbf{BBB(n_1)}$ étapes, mais cela nous donne une idée de la borne supérieure pour la plus grande paire de nombres premiers jumeaux si on suppose que la conjecture de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers jumeaux est fausse.

Ensuite, on construit une autre machine de Turing T_2 à n_2 états qui énumère tous les nombres entiers naturels x en commençant par m_1 et qui s'arrête si $(x, x + 2)$ est une paire de nombres premiers jumeaux. Allons nous préparer une autre tasse de thé, lançons l'exécution de T_2 et attendons qu'aient été calculées $\mathbf{BB(n_2)}$ étapes. Si T_2 s'arrêtait à un moment, cela voudrait dire qu'on a découvert une paire de nombres premiers jumeaux qui est plus grande que m_1 et donc que la conjecture des nombres premiers jumeaux est vraie. Si T_2 ne s'arrêtait pas en $\mathbf{BB(n_2)}$ étapes, cela voudrait dire qu'elle ne s'arrête jamais. En d'autres termes, il n'y a pas de paires de nombres premiers jumeaux plus grandes que m_1 et la conjecture des nombres premiers jumeaux est fausse.

Ainsi, nous avons montré qu'il y a une façon de prouver ou d'infirmer la conjecture des nombres premiers jumeaux en utilisant les castors occupés bipant et $\mathbf{BBB(n_1)} + \mathbf{BB(n_2)}$ étapes de simulation. Cependant, j'espère vraiment qu'il y a une méthode plus rapide que celle-là pour le faire.

Discussion

Je ne suis pas sûr que le résultat présenté soit nouveau, mais je n'ai pas réussi à le trouver où que ce soit sur la toile. Si vous avez connaissance d'articles qui décrivent une idée similaire, merci de me le faire savoir. Tout retour est le bienvenu !

L'approche décrite pourrait aussi être appliquée à n'importe quelle conjecture qui énonce qu'il y a une infinité d'objets qui ont une propriété calculable donnée parmi les objets d'un ensemble dénombrable.