La blague de $\widetilde{f}$, Denise Vella-Chemla, juillet 2025

Si on dit que f^* une fonction est définie sur $(0,\infty)$ par $f^*(x)=\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et qu'on a comme définition $\widetilde{f}(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx$, alors :

- pour $s=1$, on a $\widetilde{f}(1)=\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)x^{1-1}dx=\int_0^{\infty} f(x)dx$
- tandis que pour $s=0$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(0) &= \int_0^{\infty} f(x)x^{0-1}dx\\ &= \int_0^{\infty} f(x)\frac{1}{x}dx\end{aligned}$$

  ce qui n'est pas forcément égal à $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$ (et donc à $\displaystyle\int_0^{\infty} f^*(x)$ [1]) à moins que $f(x)$ ne soit égal à $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Définir alors la parité de la fonction f par le fait que $f=f^*$ et l'imparité de f par le fait que $f=-f^*$, ce n'est pas commun ; est-ce que ça veut dire que $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout x ? Et puis après, il faut garder ça à l'esprit à chaque fois qu'on relit fonction paire.

[1] Voir bas de la page 10 de E. Bombieri, *Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I*, http://www.bdim.eu/item?id=RLIN$_2000_91\,1_{31}83_0$.