Bla-bla ce que je ne sais pas, Denise Vella-Chemla, mars 2023.

Dans la dernière modélisation qu'on a choisie, les nombres sont représentés par leurs restes modulaires dans un réseau de Minkowski à $d = \pi(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)$ dimensions, on élimine des hyperplans et on souhaite montrer qu'après cette élimination d'hyperplans, il reste un nombre $\leq n/2$ à un croisement du réseau.

Combien y a-t-il de points extérieurs à tous les hyperplans (i.e. intérieurs aux sous-espaces convexes délimités par les hyperplans) ? Il y en a :

$$S = \prod_{\substack{p_k \text{ premier} \\ 2 \leq p_k \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor}} p_k - \prod_{\substack{p_k \text{ premier} \\ 2 \leq p_k \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ p_k \mid n}} (p_k - 1) \prod_{\substack{p_k \text{ premier} \\ 2 \leq p_k \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ p_k \nmid n}} (p_k - 2).$$

On appelle A le produit $\displaystyle\prod_{\substack{p_k \text{ premier} \\ 2 \leq p_k \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ p_k \mid n}} (p_k - 1)$ et B le produit $\displaystyle\prod_{\substack{p_k \text{ premier} \\ 2 \leq p_k \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ p_k \nmid n}} (p_k - 2)$.

Si $n = 2p$ est le double d'un nombre premier (et vérifie trivialement la conjecture de Goldbach), le produit A est vide. Or ce produit est pair car 2 est le $p_k - 1$ de 3. Comme B ne contient que des termes impairs, S est impair et cela concorde avec le fait que p est ajouté à lui-même (une sorte de point-fixe d'une transformation à définir sur le réseau de Minkowski) dans la somme $n = p + p$.

Si n est le double d'un nombre composé, le produit A est pair (car comme dit $2 = 3 - 1$), et S est pair : toutes les sommes décompositions de Goldbach contiennent des sommants différents, i.e. sont de la forme $p + q$ avec $p < n/2$ et $q > n/2$.

On est très tenté de considérer comme transformations pertinentes pour la conjecture de Goldbach les symétries orthogonales par rapport aux hyperplans "de coupure" mais on ne voit toujours pas ce qui garantirait de trouver un décomposant $< n/2$ car l'ordre naturel sur les entiers est complètement bouleversé par l'écriture par les restes. Le seul ordre naturel dont on dispose sur les n-uplets de restes (qu'on les place ou pas sur un réseau de Minkowski, qui présente tout de même l'intérêt de fournir une image mentale géométrique du processus permettant de trouver, s'ils existent, les décomposants de Goldbach de n compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$), c'est l'ordre lexicographique et on ne sait pas comment l'utiliser pour remettre les entiers dans l'ordre ; enfin si, on sait qu'il faut appliquer le théorème des restes chinois pour trouver les entiers correspondant à un n-uplet de restes mais on ne sait pas garantir l'appartenance à un intervalle (l'intervalle $[3, n/2]$ en l'occurrence) de l'entier correspondant à un n-uplet de reste.