

Yvonne Choquet-Bruhat

Yvonne Choquet-Bruhat est connue pour ses applications de la théorie des EDP et de la géométrie différentielle à la physique mathématique et elle est responsable d’une grande partie de la formulation mathématique moderne de la relativité générale, avec une compréhension simultanée unique de la partie mathématique et de la partie physique de cette théorie. Bien qu’elle soit mathématicienne, Yvonne Choquet-Bruhat souligne qu’elle n’a jamais perdu de vue le fait que la relativité générale (RG) est une théorie physique et elle s’intéresse aux observations et aux nouvelles données expérimentales, en particulier si elles sont pertinentes pour la relativité générale¹. Elle a été la première femme à être élue membre titulaire de l’Académie des sciences française.

Ne vont pas être récapitulés tous les détails de la RG ici, car il s’agit vraiment d’un livre sur les mathématiques, mais essentiellement, au cœur de celle-ci, se trouve un ensemble d’EDP appelées les équations d’Einstein, qui disent que la présence de matière provoque la courbure de l’espace-temps (en gros).

$$G = 8\pi T.$$

où G est le tenseur d’Einstein pour la courbure et T est le tenseur énergie-impulsion qui décrit le flux classique et la densité d’énergie et d’impulsion. Einstein était initialement incertain de la manière dont il allait traiter le problème géométrique de la courbure des variétés d’espace-temps, mais il réalisa en se renseignant que la théorie mathématique de base de la courbure des variétés de dimension arbitraire avait déjà été établie de nombreuses années auparavant par Riemann. La relativité générale explique plusieurs effets qui ne peuvent pas être expliqués par la mécanique newtonienne et elle peut également être appliquée à la cosmologie. Il existe de nombreux livres et articles de synthèse qui décrivent la cosmologie relativiste plus en détail².

Une correction célèbre de la relativité générale concerne la précession du périhélie de Mercure. Le taux de précession observé du périhélie de Mercure est en désaccord avec la mécanique newtonienne, même après que tous les autres facteurs ont été pris en compte (le périhélie de l’orbite d’un corps étant le point où il est le plus proche du Soleil). La majeure partie de la précession séculaire observée du périhélie de Mercure peut être expliquée par la précession des équinoxes et les perturbations de l’orbite par d’autres planètes, mais même après avoir pris en compte ces effets, il subsiste une précession observée d’environ 43 secondes d’arc par siècle. Si l’on considère le problème de Kepler pour une orbite liée perturbée par une force centrale et que l’on inclut un hamiltonien de perturbation dû à la solution de Schwarzschild pour les champs gravitationnels faibles, on obtient une valeur pour le taux moyen de précession de 42.98 secondes d’arc par siècle. L’observation actuelle nous indique que la précession due aux effets relativistes est de 43.1 ± 0.5 secondes d’arc par siècle, un écart insignifiant par rapport à la théorie³,

Traduction de la biographie extraite de l’article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730> *Twenty female mathematicians* de Hollis Williams.

Traduction et transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, assistée d’outils de lecture d’image Google Lens et de traduction Google translate.

1. Yvonne Choquet-Bruhat, *Relativité générale et équations d’Einstein* (New York : Oxford University Press, 2009).

2. Hollis Williams, “Applications de la relativité générale à la cosmologie”, Actes de la conférence des mathématiciens de demain, Université métropolitaine de Manchester (2017).

3. Herbert Goldstein, Charles Poole et John Safko, *Mécanique classique* (États-Unis : Addison Wesley, 2002).

Pour illustrer cela visuellement, on peut utiliser n'importe quel logiciel de calcul formel pour résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire pour l'orbite

$$\frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\phi^2} + \frac{1}{r} = 1,$$

avec conditions initiales

$$r(0) = \frac{2}{3}, \quad r'(0) = 0.$$

On crée ensuite un graphique de l'orbite après plusieurs révolutions.

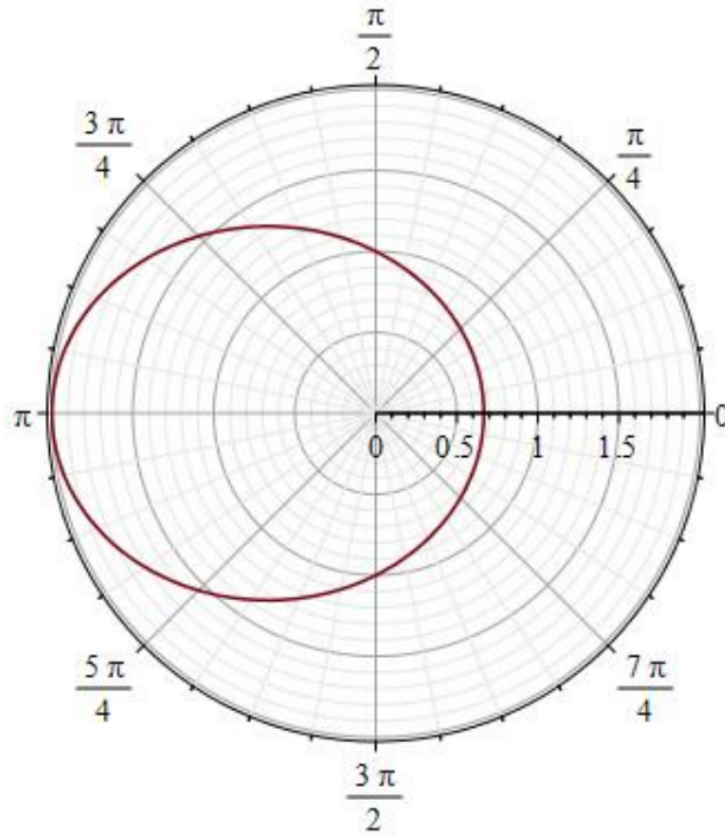


FIGURE 1 : Graphique de l'orbite à partir de la solution numérique de l'équation orbitale.

On répète le processus pour l'équation orbitale avec un terme supplémentaire ajouté pour la correction due à la relativité générale.

$$\frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\phi^2} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{3}{64r^2},$$

(En mécanique classique, on peut montrer que l'ajout d'un potentiel proportionnel à $1/r^2$ correspond à une orbite elliptique dans un système de coordonnées en rotation). Lorsqu'on crée le graphique de l'orbite après plusieurs révolutions, on constate un décalage du périhélie qui n'était pas présent dans le cas newtonien.

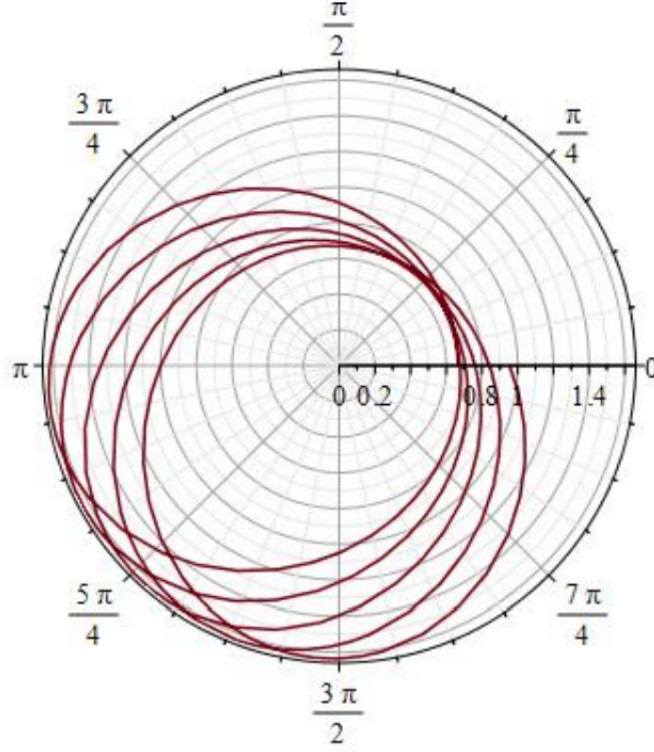


FIGURE 2 : Tracé de l'orbite à partir de la solution avec correction relativiste.

On peut alors trouver les positions angulaires des périhélie consécutifs en prenant la distance minimale de l'orbite par rapport à l'origine pour chaque révolution (c'est-à-dire là où $r(\phi)$ est un minimum).

Tout cela est bien beau et le succès physique de la théorie est indéniable, mais il reste encore à répondre à un certain nombre de questions et de problèmes mathématiques concernant les équations d'Einstein, un projet auquel Yvonne Choquet-Bruhat a commencé à contribuer sous la supervision d'Einstein. Par exemple, il n'est pas immédiatement évident que les équations d'Einstein soient mathématiquement bien posées en tant qu'ensemble d'équations différentielles. Un problème d'EDP est dit bien posé s'il existe une solution unique qui dépend continûment des données initiales que vous fournissez. Si vous vous souvenez du problème de Cauchy, ce problème n'est pas bien posé pour les EDP elliptiques et les solutions du problème doivent être analytiques. Si les équations sont hyperboliques, le problème est bien posé pour des solutions analytiques et également pour des fonctions lisses. Pour les systèmes linéaires du second ordre sur une variété lorentzienne (N^{n+1}, g) qui s'écrivent

$$g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}^2 f^I + b_J^{\alpha,I}\nabla_{\alpha} f^J + c_J^I f^J = h^I,$$

le problème de Cauchy avec des données initiales sur une hypersurface d'espace de N^{n+1} est globalement bien posé, si l'on suppose les espaces de fonctions appropriés et les hypothèses appropriées sur les données de Cauchy. La solution du système est lisse si (N^{n+1}, g) et les données de Cauchy sont lisses. En particulier, la solution en un point ne dépend que des valeurs des données initiales de ce point dans le passé.

À ce propos, comme on peut s’y attendre compte tenu de l’hypothèse physique de causalité relativiste⁴, le caractère global d’une solution signifie simplement qu’elle existe sur tout $\mathbb{R}^{n+1}$, même si elle peut encore croître. Les équations d’Einstein pour le vide forment un système quasi-linéaire d’EDP du second ordre pour les $(n+1)(n+2)/2$ coefficients de la métrique : ces EDP présentent un caractère à la fois hyperbolique et elliptique (ce qui les rend complexes à manipuler). Le système étant géométrique et admettant une interprétation géométrique évidente, les équations sont invariantes par difféomorphisme de la variété considérée et par isométrie de la métrique.

En conséquence de l’invariance par difféomorphisme, on peut utiliser les identités contractées de Bianchi pour réduire le nombre d’équations indépendantes. Dans le cas classique où la dimension de la variété lorentzienne est 4, on peut utiliser les identités de Bianchi pour réduire le nombre d’équations pour les coefficients métriques de 10 à 6, ce qui implique 4 degrés de liberté “relâchés”, qui doivent être fixés par l’utilisateur en choisissant un système de coordonnées locales à 4 dimensions. Le choix des coordonnées locales est appelé “choix de la jauge” dans le jargon de la physique théorique. Un choix naturel pendant de nombreuses années a été d’exiger que les fonctions qui définissent les coordonnées locales satisfassent un système d’équations d’ondes :

$$F^\alpha := \partial^\mu \partial_\mu x^\alpha = g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \partial_\mu x^\alpha = 0.$$

Un calcul montre que le tenseur de Ricci peut maintenant s’écrire :

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{(h)} + L_{\alpha\beta},$$

où les $R_{\alpha\beta}^{(h)}$ forment un système d’opérateurs quasi-linéaires et quasi-diagonaux

$$R_{\alpha\beta}^{(h)} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 g_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}(g, \partial g).$$

Le système d’EDP

$$R_{\alpha\beta}^{(h)} = \rho_{\alpha\beta}$$

sont connues sous le nom d’équations d’Einstein harmoniquement réduites. Le problème de Cauchy se ramène à la construction d’une solution et de ses dérivées premières, étant données des valeurs initiales sur une sous-variété spatiale de la variété lorentzienne. Ceci conduit à un théorème selon lequel ce problème de Cauchy (le problème de Cauchy pour les équations d’Einstein du vide en jauge d’onde) est bien posé et possède une solution locale unique qui dépend continûment des données initiales (modulo toute la théorie pertinente où l’on suppose que les fonctions appartiennent à l’espace de Sobolev approprié avec le nombre approprié de dérivées). Là encore, la causalité est impliquée, puisque la valeur en un point ne dépend que de la valeur initiale de ce point dans le passé⁵.

Un autre résultat stipule que le problème de Cauchy pour les équations d’Einstein du vide avec des données initiales $g_{\alpha\beta}$ sur une hypersurface spatiale et $\partial_t g_{\alpha\beta}$ satisfaisant les contraintes de la jauge d’onde possède une solution locale en temps qui est une métrique lorentzienne dépendant des

4. Yvonne Choquet-Bruhat, Introduction à la relativité générale, aux trous noirs et à la cosmologie (Oxford : Oxford University Press, 2015).

5. *Ibid.*

données initiales de manière continue. Cette solution existe et est localement unique ⁶. Ceci concerne un espace-temps d'Einstein construit en coordonnées locales dans un voisinage d'une hypersurface à partir de données initiales $g_{\alpha\beta}$ et d'une métrique lorentzienne pour laquelle l'hypersurface est de type espace. Les contraintes de jauge d'onde sont les contraintes suivantes sur les données initiales lorsqu'elles sont restreintes à l'hypersurface :

$$G^{\alpha 0} - T^{\alpha 0} = 0.$$

Ces contraintes doivent être respectées pour qu'une solution des équations d'Einstein harmoniquement réduites soit également une solution des équations d'Einstein originales : elles sont appelées contraintes de jauge d'onde car elles fixent la métrique en jauge d'onde.

Afin d'obtenir des résultats sur l'unicité globale, nous devons donner une formulation géométrique du problème de Cauchy mentionné précédemment, où un ensemble de données initiales est un triplet (M, g, k) avec (M, g) une variété riemannienne de dimension n munie d'une métrique et d'un tenseur symétrique de dimension 2. Un développement dans le vide de la variété initiale est une solution lorentzienne de dimension $(n + 1)$ des équations d'Einstein du vide telle que M soit une sous-variété plongée dans la variété lorentzienne plus grande, la métrique sur la sous-variété est induite par la métrique sur la variété ambiante et le 2-tenseur de dimension k est la courbure extrinsèque de la sous-variété telle qu'elle se trouve dans l'espace ambiant. Les résultats concernant les EDP hyperboliques nous indiquent alors qu'un ensemble de données initiales pour les équations d'Einstein du vide satisfaisant une paire de contraintes géométriques admet un développement localement unique dans le vide modulo les isométries. Les contraintes sont :

$$-2G_0^0 = \bar{R} - k_{ij}k^{ij} + (k_h^h)^2 = \rho.$$

$$N^{-1}R_{0j} = \partial_j k_h^h - \bar{\nabla}_h k_j^h = J_i,$$

où N est une variable de jauge appelée le laps. Les contraintes géométriques correspondent aux équations de Gauss-Codazzi de la géométrie différentielle, si cela peut aider. Une conjecture assez récente (connue sous le nom de conjecture de courbure L^2 bornée) stipule que les conditions suffisantes pour l'existence d'une solution métrique lorentzienne des équations d'Einstein du vide dans un voisinage d'une 3-variété riemannienne M munie d'une métrique $\bar{g}$ et d'un 2-tenseur k sont que

$$\text{Ric}(\bar{g}) \in L^2$$

(c'est-à-dire que le tenseur de Ricci, en tant que fonction qui prend la métrique et l'évalue, appartient à l'espace L^2), que $\bar{\nabla}k$ appartient à L^2 localement sur la 3-variété et que le rayon du volume de la variété munie de cette métrique doit être strictement positif. La conjecture a été récemment prouvée par ses auteurs ⁷,

À partir d'ici, on souhaiterait obtenir des informations sur les propriétés globales des solutions. Une définition importante est celle de l'hyperbolicité globale pour les EDP hyperboliques générales. Cela

6. Yvonne Choquet-Bruhat, Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, Acta Math. Volume 88, 141-225 (195)2.

7. Sergiu Klainerman, Igor Rodnianski et L  r  mie Szeftel, "La résolution de la conjecture de courbure bornée L^2 en relativité générale", Séminaire Laurent Schwartz. Volume 202 (1), 1-18 (2015).

signifie qu'un chemin dans l'espace fonctionnel pertinent entre deux points dont la tangente appartient au cône qui détermine le domaine de dépendance des solutions est compact. Nous avons précédemment défini une surface de Cauchy, et il est possible de démontrer que l'existence d'une telle surface implique l'hyperbolicité globale. Ces définitions permettent d'obtenir le résultat suivant : un développement d'Einstein dans le vide d'un triplet de données initiales satisfait toujours les contraintes d'Einstein dans le vide et est unique dans l'espace-temps globalement hyperbolique. La variété des données initiales est une hypersurface de Cauchy. Une solution est globale si elle est une variété lorentzienne complète. Une discussion du problème de l'existence globale des solutions des équations d'Einstein dans le vide nécessiterait des mathématiques plus avancées, qui dépassent largement le cadre de ce court ouvrage⁸.

L'un des problèmes les plus importants de la relativité générale est celui du théorème de la masse positive (également connu sous le nom de théorème de l'énergie positive). Ce problème a une histoire longue et intéressante qui, en un sens, n'est pas terminée, puisqu'il conduit à la conjecture générale de Penrose. Essentiellement, il n'existe pas de manière bien définie de parler de la densité d'énergie d'un champ gravitationnel. La seule image satisfaisante du champ de densité d'énergie totale est asymptotique, où la densité est définie en fonction du comportement du champ lorsqu'on s'éloigne de l'espace-temps vers l'infini spatial. Il n'est pas clair que cette définition de l'énergie gravitationnelle totale doive être nulle ou positive. Le théorème de l'énergie positive affirme qu'un système gravitationnel avec une densité de matière locale non négative doit avoir une énergie totale non négative, lorsque cette énergie est mesurée asymptotiquement à l'infini.

Le théorème peut également être énoncé d'une manière équivalente et cette autre formulation est connue sous le nom de théorème de la masse positive (notez que les physiciens semblent préférer l'appeler théorème de l'énergie positive, tandis que les mathématiciens ont tendance à l'appeler théorème de la masse positive). Plus important encore, le théorème peut être formulé en termes géométriques, ce qui est plus satisfaisant étant donné que la relativité générale est écrite dans le langage de la géométrie différentielle. On commence par une variété riemannienne tridimensionnelle munie d'une métrique (N, g) . On prend ensuite un ensemble de données initiales composé de N et d'un tenseur symétrique à deux dimensions h (la courbure extrinsèque) qui satisfont des équations de contrainte pour les densités locales de matière et d'impulsion :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2} \left(R - \sum_{a,b} h^{ab} h_{ab} + \left(\sum_a h_a^a \right)^2 \right), \\ J^a &= \nabla_b \left(h^{ab} - \left(\sum_c h_c^c \right) g^{ab} \right).\end{aligned}$$

où R est la courbure scalaire. Des données initiales sont asymptotiquement plates si, pour un certain ensemble compact C, N avec C tronqué est composé d'un nombre fini de composantes N_i telles que chaque composante soit difféomorphe au complémentaire d'un ensemble compact dans $\mathbb{R}^3$. Sous ces

8. Yvonne Choquet-Bruhat, Introduction à la relativité générale, aux trous noirs et à la cosmologie (Oxford : Oxford University Press, 2015).

difféomorphismes, le tenseur métrique s'écrit alors

$$ds^2 = \left(1 + \frac{M}{2r}\right) \left(\sum_i (dx^i)^2\right) + \sum_{i,j} p_{ij} dx^i dx^j.$$

La quantité M_i est la masse ADM de l'extrémité N_i . Le théorème stipule alors que pour un ensemble de données initiales asymptotiquement plat, chaque extrémité a une masse totale non négative et si une seule des extrémités a une masse nulle, alors l'ensemble de données initiales s'annule et le tenseur de Riemann est nul⁹. Cela revient à dire qu'un système gravitationnel isolé avec une densité de masse locale non négative a une masse totale non négative, lorsque la masse est mesurée asymptotiquement à l'infini.

La stratégie globale du point de vue géométrique consiste d'abord à prouver ce que l'on pourrait appeler le théorème de la masse positive "riemannienne", où la seconde forme fondamentale de l'hypersurface spatiale dans l'espace-temps s'annule. Ceci est équivalent à une hypersurface "symétrique par rapport au temps" ou totalement géodésique, où une sous-variété riemannienne totalement géodésique est une sous-variété telle que pour tout V dans le fibré tangent, la géodésique γ_V se trouve entièrement dans la variété plus grande M lorsqu'elle est considérée en termes de la métrique induite associée à la sous-variété. En réalité, seules des hypersurfaces très particulières ont une seconde forme fondamentale nulle, même du point de vue mathématique, et on ne s'attendrait pas à ce qu'une hypersurface "réelle" plongée dans un espace-temps ait une seconde forme fondamentale nulle. Il n'est donc certainement pas suffisant de prouver le cas particulier d'un point de vue physique. Cependant, on peut alors utiliser une EDP elliptique quasi-linéaire appelée équation de Jang pour appliquer le théorème pour des données de Cauchy générales, au cas symétrique par rapport au temps, ce qui prouve alors le théorème en général¹⁰.

Bien que d'autres mathématiciens et physiciens aient progressé dans la démonstration de cas particuliers du théorème (Yvonne Choquet-Bruhat et Marsden ont montré qu'il était vrai si les données étaient suffisamment proches de données plates dans une norme lisse particulière, par exemple), ce sont en réalité deux géomètres différentiels, Schoen et Yau, qui en ont donné la première preuve, en utilisant les arguments esquissés ci-dessus¹¹. Une autre preuve de Witten a suivi assez rapidement : cette preuve était complètement différente et utilisait des identités pour les spineurs de Dirac¹². L'idée est de prendre une variété lorentzienne de dimension 4 (les espaces-temps en relativité générale sont toujours modélisés par ce type de variété) qui contient une hypersurface de type espace plongée. Nous supposons que la variété satisfait les équations d'Einstein et que la variété de l'hypersurface de type espace est asymptotique à l'espace euclidien de dimension 3 lorsqu'on tend vers l'infini dans la variété de dimension 4. On prend ensuite le fibré spinoriel S de la 4-variété avec sa connexion canonique et on restreint le fibré muni de cette connexion à l'hypersurface de type

9. Richard Schoen et Shing-Tung Yau, "Sur la preuve de la conjecture de la masse positive en relativité générale", Commun. Math. Phys. 65, 45-76 (1979).

10. Richard Schoen et Shing Tung Yau, "Preuve du théorème de la masse positive. II", Commun. Math. Phys. 79, 231-260 (1981).

11. Yvonne Choquet-Bruhat et Jerrold Marsden, "Solution du problème de la masse locale en relativité générale", Commun. Math. Phys. 51, 283-296 (1976).

12. Edward Witten, "Une nouvelle preuve du théorème de l'énergie positive", Commun. Math. Phys. 80, 381-402 (1981).

espace. Si l'on prend un champ de repère orthonormé local de manière usuelle, on a un opérateur de Dirac sur la restriction du fibré spinoriel :

$$D = \sum_{j=1}^3 e_j \cdot \nabla_{e_j}.$$

On écrit alors le carré de l'opérateur de Dirac

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \mathfrak{I},$$

où le second terme ne fait intervenir que la seconde forme fondamentale de l'hypersurface spatiale.

On peut alors démontrer la positivité de $\mathfrak{I}$, ce qui montre que l'opérateur de Dirac peut être inversé sur les sous-espaces droits de l'espace des sections de S . Comme l'hypersurface est asymptotiquement plate, il suffit de prendre les solutions de l'équation

$$D\sigma = 0$$

et de montrer qu'il existe des solutions uniques pour chaque valeur asymptotiquement constante. Une fois qu'on a une telle solution σ , on prend une région de l'hypersurface et on utilise l'identité pour le carré de l'opérateur de Dirac pour obtenir

$$0 = \int_{\Omega} \langle \nabla^* \nabla \sigma, \sigma \rangle + \langle \mathfrak{I}(\sigma), \sigma \rangle = -E_{\Omega}(\sigma) + \int_{\Omega} \|\sigma\|^2 + \langle \mathfrak{I}(\sigma), \sigma \rangle,$$

où $E_{\Omega}(\sigma)$ est une intégrale sur la frontière de la région. Le fait que cette intégrale soit strictement positive permet de montrer que l'énergie totale l'est également¹³. La démonstration de Witten est séduisante, car la masse apparaît comme l'intégrale d'une quantité positive sur la variété. Il convient toutefois de mentionner que, bien que la démonstration de Witten paraisse plus simple que celle de Schoen et Yau, des travaux supplémentaires sont nécessaires pour établir l'existence d'une fonction de Green pour l'opérateur de Dirac sur une hypersurface. Ceci est essentiel, car Witten suppose qu'il est mathématiquement cohérent de travailler avec un opérateur de Dirac sur une hypersurface de type espace¹⁴. Il existe désormais diverses démonstrations jusqu'à une dimension arbitraire et sans l'hypothèse de variétés spinorielles, y compris une démonstration du cas tridimensionnel avec flot de Ricci¹⁵. Yvonne Choquet-Bruhat a elle-même publié une démonstration spinorielle plus élégante et plus claire, valable pour les variétés spinorielles de toute dimension et ne nécessitant pas de spineurs d'espace-temps¹⁶.

L'histoire ne s'arrête pas là, cependant, car il faut encore introduire les trous noirs (probablement l'objet le plus célèbre associé à la relativité générale). Bien que la dérivation ne soit évidemment pas aussi simple, on pourrait intuitivement la considérer comme une extension du théorème de la masse positive, mais maintenant, au lieu de dire que la masse est nulle ou supérieure à zéro, on

13. H. Blaine Lawson, Jr. et Maire-Louise Michelsohn, *Spin Geometry* (New Jersey, USA : Prince University Press, 1989).

14. Thomas Parker et Clifford Henry Taubes, "On Witten's Proof of the Positive Energy Theorem", *Commun. Math. Phys.* 84, 223-238 (1982).

15. Yu Li, "Flot de Ricci sur des variétés asymptotiquement euclidiennes" (2018) <https://arxiv.org/pdf/1603.05336>.

16. Yvonne Choquet-Bruhat, "Énergie gravitationnelle positive en dimensions arbitraires" (2011) <https://arxiv.org/pdf/1107.4283>.

dit que la masse de la variété soit est égale à la masse des trous noirs qu'elle contient, soit qu'elle dépasse la masse de ces trous noirs. De plus, au lieu de revenir à l'espace-temps de Minkowski comme espace plat, on revient maintenant à l'espace-temps de Schwarzschild pour un trou noir sphérique symétrique non rotatif. En utilisant un argument physique basé sur divers théorèmes de la relativité générale et l'hypothèse de la censure cosmique (qui propose qu'une singularité nue ne puisse jamais être observée dans l'Univers en dehors d'un trou noir), Penrose a conjecturé que l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$m \leq \sqrt{\frac{A}{16\pi}},$$

où m est la masse ADM d'une hypersurface spatiale asymptotiquement plate dans un espace-temps et A est l'aire des horizons des événements de tous les trous noirs dans l'espace-temps.

Si nous supposons que la seconde forme fondamentale s'annule, alors le problème peut être formulé de sorte que nous n'ayons qu'à prouver ce que l'on appelle l'inégalité de Penrose riemannienne. Celle-ci stipule que

$$m \leq \sqrt{\frac{A_0}{16\pi}},$$

où l'hypersurface a une courbure scalaire non négative et A_0 est l'aire de la surface minimale extérieure $\sum_0$ de la sous-variété (M^3, g) . Il est intéressant de noter que les deux démonstrations de l'inégalité de Penrose riemannienne présentées jusqu'à présent reposent sur des flots géométriques. Un flot géométrique est un flot de gradient sur une variété ayant une interprétation géométrique simple (une EDP ayant une signification géométrique spécifique, si l'on préfère). Ceci est différent de la notion de flot global qui est une famille de difféomorphismes d'une variété déterminée par l'ensemble de toutes les courbes intégrales d'un champ de vecteurs choisi sur la variété. Par exemple, le champ de vecteurs de coordonnées $V = \partial/\partial x$ sur $\mathbb{R}^2$ génère un flot qui décale le plan vers la droite ou vers la gauche (selon que t soit positif ou négatif). Ce flot est déterminé par les courbes intégrales, qui sont des droites parallèles à l'axe des x ¹⁷.

Les deux exemples les plus célèbres de flots géométriques sont probablement le flot de Ricci et le flot de courbure moyenne (le flot de raccourcissement de courbe n'est autre que le flot de courbure moyenne en une dimension). Une application F d'une famille d'hypersurfaces $M^n \times [0, T)$ vers $(N^{n+1}, \bar{g})$ résout le flot de courbure moyenne si

$$\frac{d}{dt}F(p, t) = H(F(p, t)),$$

où H est le vecteur de courbure moyenne. Il s'agit d'un système quasi-linéaire d'EDP paraboliques du second ordre. L'équation n'est pas strictement parabolique, car elle est invariante sous les difféomorphismes tangentiels (difféomorphismes qui font glisser arbitrairement la variété autour, en un certain sens), ce qui signifie que le symbole principal a des directions nulles. Cependant, une EDP ne peut être strictement parabolique que si le symbole principal associé est toujours positif lorsqu'il est évalué pour toute paire (x, ξ) dans T^*M . En termes géométriques, le flot fait évoluer une famille de surfaces dans une variété riemannienne en faisant évoluer les composantes normales des vecteurs

17. John M. Lee, Introduction aux variétés lisses (New York : Springer, 2003).

aux points de la surface à une vitesse égale à la courbure moyenne en ce point. Il est également possible de définir un flot appelé flot de courbure moyenne inverse, où le même processus est appliqué, mais à l'inverse de la courbure moyenne. Ce flot semble difficile à utiliser dans les applications, car il peut facilement développer des singularités et semble indéfini si la courbure moyenne en un point est nulle. Cependant, il est possible d'utiliser une approche par ensembles de niveau pour la conjecture de Penrose afin de montrer que la surface $\sum(t)$ résultant du flot de courbure moyenne inverse d'une surface minimale après le temps t peut être définie comme l'ensemble de niveau d'une fonction u sur (M^3, g) telle que

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = |\nabla u|.$$

On peut définir une théorie d'existence faible appropriée pour cette EDP elliptique dégénérée et prouver l'existence de solutions. Étant donné que la masse de Hawking est monotone sur les ensembles de niveau de u et est finalement bornée par la masse ADM lorsque les surfaces évoluent, cela prouve l'inégalité de Penrose riemannienne et fournit une autre preuve indépendante des théorèmes de masse positive¹⁸. La démonstration de Huisken-Ilmanen établit en réalité un résultat légèrement plus faible : l'inégalité de Penrose riemannienne pour le plus grand trou noir de la variété. On peut imaginer plusieurs trous noirs dans un espace-temps et, de fait, de multiples trous noirs ont été observés dans la nature sous forme de fusions de trous noirs. Un flot différent (flot conforme de métriques) a été utilisé par Bray pour démontrer l'inégalité pour un nombre quelconque de trous noirs. Essentiellement, on considère un flot de métriques qui satisfait un certain nombre de critères et qui converge vers la métrique de Schwarzschild, bien qu'il y ait de nombreux autres détails techniques et lemmes à traiter. Tandis que Huisken et Ilmanen donnent une nouvelle démonstration du théorème de la masse positive, Bray le suppose et l'applique à plusieurs points clés de son argumentation¹⁹. L'interprétation physique de la démonstration de Bray, si elle existe, n'est pas entièrement claire, bien qu'une telle interprétation ait été suggérée dans la littérature physique²⁰. Le cas général où l'hypersurface dans l'espace-temps n'est pas totalement géodésique reste une question ouverte. On pourrait espérer pouvoir suivre l'exemple de Schoen et Yau et utiliser une équation comme celle de Jang pour ramener le cas général à l'inégalité de Penrose riemannienne, mais il existe des raisons techniques qui rendent cela difficile, voire impossible. L'approche par EDP pour prouver la conjecture, où l'on tente de trouver une théorie d'existence pour un ensemble d'EDP impliquant l'inégalité riemannienne, est peut-être un problème insoluble, car il faut établir d'une manière ou d'une autre un théorème d'existence avec les conditions aux limites correctes compatibles avec le type d'horizon considéré (quelles que soient ces conditions). Un contre-exemple a été trouvé pour une version plus forte de la conjecture de Penrose pour les objets appelés horizons apparents généralisés : si un contre-exemple explicite peut être trouvé pour une version forte, cela suggère qu'il pourrait presque être impossible d'établir la théorie d'existence nécessaire pour la version faible normale de la conjecture²¹.

18. Gerhard Huisken et Tom Ilmanen, "Le flux de courbure moyenne inverse et l'inégalité de Penrose riemannienne", *Journal of Differential Geometry*, vol. 59, n° 3, p. 353-437 (2001).

19. Hubert Bray, "Démonstration de l'inégalité de Penrose riemannienne à l'aide du théorème de la masse positive", *Journal of Differential Geometry*, vol. 59, n° 2, p. 177-267 (2001).

20. Seiju Ohashi, Tetsuya Shiromizu et Sumio Yamada, "L'inégalité riemannienne de Penrose et un "effondrement gravitationnel", *Physical Review D*, vol. 80, n° 4 (2009).

21. Hubert Bray et Marcus Khuri, "Équations aux dérivées partielles impliquant la conjecture de Penrose", *Asian Journal of Mathematics*. 15 (2011).