

Mary Cartwright

Mary Cartwright fut la première femme mathématicienne à être élue membre de la Royal Society et la première femme à être élue présidente de la *Mathematical Association* et de la *London Mathematical Society*. Elle fut également la première femme à recevoir la médaille Sylvester, un prix qui avait été précédemment décerné à Poincaré, Cantor, Darboux et Levi-Civita. Elle fut supervisée dans ses études doctorales par G. H. Hardy et E. C. Titchmarsh et elle poursuivit d'importants travaux de collaboration avec J. E. Littlewood, notamment des travaux fondateurs sur la théorie du chaos et la dynamique non linéaire. Curieusement, Mary Cartwright et Sofia Kovalevskaya ne sont pas mentionnées dans le célèbre ouvrage de vulgarisation sur la théorie du chaos de Gleick¹. La théorie du chaos ne commença à gagner en popularité qu'avec l'approche plus visuelle de Lorenz. L'approche de Mary Cartwright et Littlewood était de nature analytique, et Mary Cartwright est d'ailleurs considérée avant tout comme une analyste, plutôt que comme une spécialiste de la dynamique.

Les premiers travaux de Mary Cartwright sur l'analyse portaient sur les zéros de certains types de fonctions entières.

Rappelons qu'une fonction à valeurs complexes est entière si elle est holomorphe sur le plan complexe fini (dans une terminologie plus ancienne, une fonction entière peut être appelée fonction "intégrale")². Les fonctions exponentielles et trigonométriques en sont des exemples typiques. Une fonction de ce type admet un développement en série de Taylor

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n + \dots,$$

qui converge pour tout z fini. Si $f(z)$ possède un point régulier à l'infini, elle est nécessairement identiquement constante d'après le théorème de Liouville, un théorème fondamental qui stipule qu'une fonction holomorphe $f(z)$ pour laquelle il existe un nombre $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ est une fonction constante. Ce théorème permet une démonstration pratique du théorème fondamental de l'algèbre. Si $f(z)$ possède une singularité essentielle à l'infini, on dit que $f(z)$ est entière transcendante.

Nous nous intéressons souvent principalement au type transcendant lorsque nous travaillons avec des fonctions entières. Définissons la fonction de module maximal :

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Il s'agit d'une fonction strictement croissante de r . Si $f(z)$ est une fonction transcendante entière de module maximal $M(r)$, il s'ensuit que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\log r} \rightarrow \infty.$$

Traduction de la biographie extraite de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730> *Twenty female mathematicians* de Hollis Williams.

Traduction et transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, assistée d'outils de lecture d'image Google Lens et de traduction Google translate.

1. James Gleick, *Chaos : Making a New Science* (New York : Vintage, 1997).

2. Mary Cartwright, *Integral Functions* (Cambridge : Cambridge University Press, 1956).

En d'autres termes, une fonction transcendante entière croît plus vite qu'une puissance positive de r . La fonction transcendante entière à croissance rapide la plus simple est la fonction exponentielle, qui suggère que nous pourrions quantifier la croissance de $|f(z)|$ à l'aide de la fonction exponentielle. Supposons qu'il existe un nombre positif $M(r)$ tel que

$$M(r) < e^{r^\mu}$$

pour r suffisamment grand. Dans ce cas, la fonction entière est d'ordre fini et la plus grande borne inférieure de l'inf de μ pour laquelle l'inégalité précédente est vérifiée est appelée l'ordre de $f(z)$. La fonction exponentielle complexe est d'ordre 1, par exemple. C'est un autre théorème fondamental des fonctions entières que l'ordre ρ d'une fonction entière est donné par une formule

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}.$$

Ceci peut être prouvé en utilisant les définitions précédentes et en trouvant une suite $\{r_n\}$ telle que

$$M(r_n) > e_n^{r_n^{\rho-\varepsilon}}.$$

On peut également montrer que

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \right)}.$$

De plus, supposons que pour une fonction d'ordre fini ρ , il existe un nombre $K > 0$ tel que

$$M(r) < e^{Kr^\rho}$$

pour r suffisamment grand. La plus grande borne inférieure de l'inf de K pour laquelle cette inégalité est valable est appelée le type de $f(z)$. Un autre théorème stipule que le type d'une fonction entière d'ordre ρ est donné par une formule

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}.$$

Par exemple, la fonction sinus complexe est définie par

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

On peut montrer avec des estimations assez triviales que l'ordre et le type de cette fonction sont tous deux égaux à 1. Les coefficients du développement en série de Taylor d'une fonction entière dépendent également de son ordre et de son type.

Nous avons mentionné précédemment le théorème de Liouville de l'analyse complexe élémentaire. Ce résultat peut être considérablement amélioré avec le petit théorème de Picard. Celui-ci stipule que si $f(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre ρ , avec A un nombre complexe fini quelconque, alors l'ensemble des points A de f est infini à moins que $\rho \in \mathbb{Z}^+$ et que f soit de la forme

$$f(z) = A_0 + p(z)e^{P(z)}.$$

où $p(z)$ et $P(z)$ sont tous deux des polynômes³.

Mary Cartwright elle-même a contribué à tellement de résultats de la théorie des fonctions entières qu'il est impossible de tous les énumérer ici, mais nous pouvons citer quelques exemples. Nombre de ses résultats concernaient des fonctions entières d'une forme telle que

$$\log |f(z)| < A|z|,$$

pour z grand et pour une certaine constante A , et les conclusions que l'on pouvait tirer sur les zéros de ce type de f étant donné certaines hypothèses. Par exemple, Mary Cartwright a prouvé que si l'on supposait que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty,$$

alors le nombre de zéros de $f(z)$ dans le disque $|z| < r$ satisfaisant la relation suivante pour une certaine constante B ,

$$n \sim r.$$

De plus, si les zéros de $f(z)$ prennent la forme

$$z_n = r_n e^{i\theta_n},$$

alors la plupart des zéros se trouvent sur la droite réelle⁴.

$$\sum \frac{|\sin \theta_n|}{r_n} < \infty.$$

L'ensemble des fonctions satisfaisant la première hypothèse est parfois appelé la classe de Cartwright.

Un autre résultat de Mary Cartwright compare $f(x)$ à une fonction qui varie le plus lentement possible, c'est-à-dire une constante.

Prenons $f(z)$ comme holomorphe sur l'intervalle $|\arg z| \leq \alpha \leq \pi/2$, et soit

$$h(\theta) \leq a|\cos \theta| + b|\sin \theta|,$$

où $a, b < \infty$. Si $b < \pi$ et $|f(n)| \leq M$, alors $|f(x)|$ est bornée pour $x \geq 0$. Si $f(n)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, alors $f(x)$ tend également vers zéro lorsque x tend vers l'infini. Une version plus spécifique de ce théorème stipule que si $f(z)$ est une fonction entière satisfaisant l'inégalité ci-dessus pour $h(\theta)$ telle que $b < \pi$ et $|f(n)| \leq M$ où $n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$, alors $|f(x)| \leq K$ pour tout x réel, où K est une constante dépendant uniquement de b ⁵.

3. Alexei Markushevich, *Théorie des fonctions d'une variable complexe* (New York : Chelsea Publishing Company, 1985).

4. Mary Cartwright, "Sur les fonctions régulières et d'ordre fini en un angle", Proc. London Math. Soc. (2) 38, 158-179 (1935).

5. Ralph Boas, *Fonctions entières* (New York : Academic Press, 1954).

Mary Cartwright a également étudié les fonctions holomorphes sur le disque unité. Une fonction est dite univalente sur le disque unité si l'équation $f = w$ n'a jamais plus d'une racine sur le disque. Pour ces fonctions, on peut écrire une inégalité reliant le premier coefficient de la série de Taylor correspondante au coefficient nul. On peut avoir une fonction correspondante qui est p -valente si l'équation $f = w$ n'a jamais plus de p racines. On a conjecturé dans ce cas qu'on aurait une inégalité

$$|f| < C(1 - r)^{-2p}.$$

Mary Cartwright a prouvé cette conjecture dans toute sa généralité ⁶.

Poursuivant sur le thème des fonctions entières, Mary Cartwright a démontré qu'une fonction entière d'ordre ρ peut avoir au plus 2ρ valeurs asymptotiques : la preuve utilise la méthode des applications conformes. Deux copies du plan complexe peuvent être reliées par une application. Si cette application préserve l'angle entre deux courbes qui se coupent dans le premier plan au point (x_0, y_0) , alors l'application est conforme au point (x_0, y_0) . Si $f(z)$ est holomorphe et $f'(z) \neq 0$ en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors l'application $f(z)$ est conforme en z_0 . Si $f'(z) \neq 0$ dans une région, alors l'application est conforme en tous les points de la région. Une application conforme transforme toujours les droites, pour x et y deux constantes, en deux familles de courbes qui s'intersectent à angle droit. Un exemple classique d'application conforme est l'application de Schwarz-Christoffel. Cette transformation envoie une région polygonale du premier plan complexe (le plan w) sur le demi-plan supérieur du plan z . Le contour du polygone devient l'axe des x et son intérieur, le demi-plan supérieur. L'existence de cette application est garantie par le théorème de Riemann, qui stipule qu'il existe toujours une application biholomorphe f qui envoie un sous-ensemble ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ sur le disque unité ouvert. Explicitement, l'application de Schwarz-Christoffel est donnée par

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1},$$

qui peut théoriquement être intégrée pour obtenir une application

$$w = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz + B,$$

où A et B sont des constantes complexes et les α_i sont les angles internes de la région polygonale. Cette intégration ne peut généralement être effectuée que dans des cas particuliers.

Par exemple, considérons un triangle équilatéral plan dont tous les angles mesurent $\pi/3$ radians. Le premier sommet du triangle est à l'origine O , le deuxième sommet A est à une distance a le long de l'axe u (u et v étant équivalents à x et y pour ce plan complexe) et le troisième sommet B est donné par les coordonnées suivantes $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$. La norme de la longueur du segment joignant O à B est également a . Nous souhaitons projeter sur une section du demi-plan supérieur donnée avec B s'envoyant sur $x = -1$, O s'envoyant sur $x = 1$, et en laissant de côté le point A en l'envoyant à l'infini. Cela nous donne des valeurs que nous pouvons insérer dans notre formule :

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

6. Mary Cartwright, *Sur les fonctions analytiques régulières dans le cercle unité II*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 6, 94-105 (1935).

Les angles intérieurs que nous considérons sont tous deux identiques :

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{3}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= C(z+1)^{-\frac{2}{3}}(z-1)^{-\frac{2}{3}}, \\ &= C(z^2-1)^{-\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

En gardant à l'esprit qu'on change la valeur de la constante au fur et à mesure bien que son symbole ne change pas : ceci est une pratique courante. On a donc

$$w = C \int_{z_0}^z \frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{2}{3}}} + D$$

Les valeurs de z_0 , C et D sont les constantes à trouver (bien que la limite inférieure de l'intégration ne soit pas trop importante). Posons $z_0 = 0$.

$$w = C \int_0^z \frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{2}{3}}} + D$$

On sait que le point $w = 0$ est envoyé sur $z = 1$, ce qui implique que

$$D = -C \int_0^1 \frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

En considérant les limites de l'intégration, on a

$$w = C \int_1^z \frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

On sait également que le point $w = ae^{\pi i/3}$ est envoyé sur $z = -1$ donc on doit avoir

$$ae^{\pi i/3} = C \int_1^{-1} \frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

On a également, parce que A est envoyé sur l'infini

$$a = C \int_1^{\infty} \frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

En utilisant quelques astuces, on peut déterminer la valeur de C et ensuite écrire l'application conforme w aussi explicitement que possible, en remarquant que l'intégrale ne peut être calculée uniquement à l'aide de fonctions élémentaires.

Nous avons précédemment abordé des exemples de toupies symétriques rigides. Par exemple, les équations du mouvement de la toupie de Kovalevskaya peuvent être intégrées pour fournir des solutions analytiques (bien que cela soit très complexe dans le cas étudié par Kovalevskaya et nécessite de nombreux calculs). Il existe de nombreux problèmes intéressants pour lesquels une

solution exacte ne peut être trouvée, donc la prochaine meilleure chose qu'un physicien aimerait étudier est un problème qui a un potentiel avec une partie intégrable et une petite partie qui peut être traitée à l'aide de la théorie des perturbations standard. À titre d'exemple de théorie des perturbations, prenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{\cos 2x}{1 + \varepsilon y}, \quad y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad |\varepsilon| \ll 1.$$

Il est crucial que ε soit petit. Soit

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + O(\varepsilon^3).$$

Dans ce cas, nous pouvons utiliser le développement binomial pour réécrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \varepsilon y} &= 1 - \varepsilon y + \varepsilon^2 y^2 + O(\varepsilon^3), \\ &= 1 - \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon^2(y_0^2 + O(\varepsilon)) + O(\varepsilon^3), \\ &= 1 - \varepsilon y_0 - \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^2 y_0^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Tronquer au second ordre et tout substituer dans :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2) &= (1 - \varepsilon y_0 - \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^2 y_0^2) \cos 2x. \\ y_0'' + y_0 + \varepsilon(y_1'' + y_1) + \varepsilon^2(y_2'' + y_2) &= (1 - \varepsilon y_0 - \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^2 y_0^2) \cos 2x. \end{aligned}$$

Regrouper les termes semblables et construire une EDO pour chaque coefficient ε^k pour $k = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned} y_0'' + y_0 - \cos 2x, \\ y_1'' + y_1 + y_0 \cos 2x &= 0, \\ y_2'' + y_2 - (y_0^2 - y_1) \cos 2x &= 0. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites pour chaque EDO sont

$$y_i\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y_i\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Ces équations peuvent être résolues à la main ou à l'aide d'un ordinateur si vous préférez. La première équation peut être résolue pour obtenir

$$y_0 = -\frac{1}{3} \cos 2x.$$

Insérons ceci dans la deuxième équation pour obtenir

$$y_1'' + y_1 = \frac{1}{3} \cos^2 2x = \frac{1}{6}(1 + \cos 4x).$$

Ceci peut être résolu en insérant une fonction test et en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. Ceci étant combiné avec les conditions aux limites, on trouve que

$$y_1 = \frac{1}{6} - \frac{8\sqrt{2}}{45} \cos x - \frac{1}{90} \cos 4x.$$

En résolvant la troisième équation pour y_2 , on trouve que la solution approchée de l'EDO originale dans la théorie des perturbations du second ordre est

$$\begin{aligned} y = & -\frac{1}{3} \cos 2x + \varepsilon \left(\frac{1}{6} - \frac{8\sqrt{2}}{45} \cos x - \frac{1}{90} \cos 4x \right) \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{2\sqrt{2}x}{45} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{90} (\pi + 1) \cos x + \frac{7}{270} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{90} \cos 3x \right. \\ & \left. - \frac{1}{1050} \cos 6x \right) \end{aligned}$$

Ce type de calcul n'est généralement pas présenté et l'auteur se contente de citer le résultat en indiquant qu'il est obtenu à l'aide de la théorie des perturbations (il se peut même qu'il l'ait calculé directement sur ordinateur).

Cependant, nous pourrions avoir un terme d'interaction faible dans un potentiel qui couple deux des équations du mouvement et qui ne peut donc pas être facilement traité par la théorie des perturbations. Si le terme n'est plus "petit", les solutions des équations découplées pourraient être considérablement différentes des solutions des équations couplées. Ces nouvelles solutions pourraient être intéressantes, mais elles pourraient aussi avoir un mauvais comportement : il se pourrait qu'une petite modification des conditions initiales entraîne un changement massif du mouvement. Ces solutions sont chaotiques, en ce sens qu'elles sont sensibles aux conditions initiales. Deux solutions régulières bornées qui commencent proches l'une de l'autre dans une petite région de l'espace des phases évolueront au fil du temps pour couvrir une région qui est encore assez petite. Ceci est dû à un théorème fondamental connu sous le nom de théorème de Liouville, qui stipule que la densité des points représentant des systèmes proches d'un point représentant un autre système en phase restera constante au fil du temps. Sous forme d'équation :

$$\frac{dD}{dt} = [D, H] + \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Une trajectoire chaotique dans l'espace des phases se situe entre une trajectoire régulière issue d'une solution d'équations de mouvement intégrables et le caractère totalement aléatoire que l'on associe généralement aux processus stochastiques. Mary Cartwright et Littlewood ont été les premiers à comprendre que les trajectoires chaotiques dans l'espace des phases résultent du mouvement dû à des systèmes non linéaires⁷. Ce type de mouvement est non périodique, mais il n'est pas impossible à prédire.

7. Mary Cartwright et John Littlewood, "Sur les équations différentielles non linéaires du second ordre", 1. London Math. Soc., 20, 180 (1945).

Pour commencer, nous devons revenir à notre ancienne représentation de l'oscillateur harmonique simple qui suit un mouvement périodique fermé. Nous n'entrerons pas dans les détails, mais il devrait être plausible que le mouvement d'un tel oscillateur se traduise par une trajectoire circulaire uniforme dans l'espace des phases. Cela permet la représentation dans l'espace des phases du mouvement d'un double oscillateur non couplé : les mouvements circulaires des oscillateurs harmoniques de basse et de haute fréquence génèrent ensemble un tore. Dans les situations physiques réelles, nous nous intéressons souvent à la dynamique d'un système qui peut être décrit par un hamiltonien intégrable plus une petite interaction. Prenons l'exemple de l'orbite d'une planète du système solaire qui est périodique, mais très faiblement perturbée par la présence d'une autre planète. On pourrait écrire l'hamiltonien comme suit :

$$H = H_0 + \Delta H.$$

Si ΔH est petit par rapport à H_0 , la théorie des perturbations fournit une solution aux équations du mouvement, mais on ne sait pas de façon claire si la solution perturbée est régulière ou si les orbites de l'espace des phases resteront proches des trajectoires de l'espace des phases des solutions non perturbées. En termes approximatifs, le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser nous indique que si un hamiltonien intégrable est perturbé par une petite perturbation qui le rend non intégrable, alors le mouvement restera confiné à un N -tore semblable à celui que nous avons déjà décrit, tant que la perturbation est petite, et si les fréquences ω_i sont incommensurables. Ceci est valable à l'exception d'un ensemble de conditions initiales qui provoquent une trajectoire erratique. En termes plus topologiques, un système intégrable est représenté par un tore dans l'espace des phases. Ce tore reste un tore lorsque nous perturbons le système et essayons de le déformer, mais sous certaines perturbations, le tore peut être détruit.

Les orbites stables de l'hamiltonien intégrable restent généralement stables lorsqu'elles sont modifiées pour devenir des orbites de l'hamiltonien perturbé total. Une autre possibilité importante est que les conditions initiales puissent initier le mouvement sur une trajectoire qui évolue au fil du temps vers un point fixe ou une orbite stable dans l'espace des phases. Ce sont deux exemples d'attracteurs. Un attracteur est un ensemble dans l'espace des phases vers lequel la solution évolue sur une longue période. La dimension d'un attracteur régulier est inférieure d'une unité à la dimension de l'espace des phases. Les attracteurs peuvent être des N -tores, mais il peut également exister des attracteurs dits étranges avec une dimension fractale, c'est-à-dire que leur dimension est une fraction ou un nombre irrationnel⁸. Les équations de Lorenz et l'application de Henon sont des exemples d'attracteurs étranges. Un exemple d'orbite stable dans l'espace des phases vers laquelle un mouvement pourrait évoluer est donné par l'équation de van der Pol utilisée pour décrire les oscillations forcées dans les systèmes mécaniques et électriques :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F \cos \omega_D t.$$

Il s'agissait de l'oscillateur original que Mary Cartwright et Littlewood étudiaient lorsqu'ils ont découvert le mouvement chaotique. Ils ont remarqué que pour certaines plages de paramètres, on obtenait un mouvement stable, tandis que dans d'autres plages, la section de Poincaré présentait diverses structures⁹. Lorsque $\varepsilon = 0$, il s'agit d'un oscillateur harmonique simple avec forçage, où

8. Herbert Goldstein, Charles Poole et John Safko, *Mécanique classique* (États-Unis : Addison Wesley, 2002).

9. Frank Wang, "*Femmes pionnières en théorie du chaos*", Contribution à la conférence "Mathématiques, technologies de l'information et éducation" tenue à l'Université d'État d'Orenbourg, Russie (2008).

la fréquence de résonance est ω_0 et la fréquence de forçage ω_D . Avec le second terme d'amortissement, le mouvement tend vers une orbite de phase donnée par un cercle de rayon unitaire. Pour un amortissement positif, le mouvement suit une spirale vers l'intérieur en direction du cycle limite, et pour un amortissement négatif, il suit une spirale vers l'extérieur en direction du cycle limite. Si ε est suffisamment grand, le terme d'amortissement devient important et la trajectoire est toujours attirée vers le cycle limite, mais le cycle est maintenant déformé par rapport à une forme circulaire. Si l'amortissement devient très important, la forme commence à ressembler davantage à un carré.

Nous avons mentionné précédemment que les trajectoires chaotiques sont sensibles aux conditions initiales, mais ce type de mouvement possède en réalité plusieurs autres propriétés techniques. L'une d'elles est le mélange. Cela signifie que si l'on considère deux régions arbitrairement petites dans le domaine et que l'on suit une orbite passant par la première région, elle doit également traverser la seconde (éventuellement après un temps long). Une autre propriété est que le mouvement possède des orbites quasi-périodiques denses. Une orbite est quasi-périodique si elle traverse le domaine de manière répétée et non régulière sans se refermer. Une orbite est dense si elle passe par chaque point du domaine ou à proximité. L'exemple donné précédemment du tore dans l'espace des phases, dû à un double oscillateur non couplé, est un exemple d'orbite périodique dense, puisque la trajectoire ne se referme jamais, couvrant le tore et s'approchant arbitrairement de chaque point de sa surface. Il s'agit d'une orbite bornée et non fermée. Cependant, du moins dans la littérature, c'est généralement la sensibilité aux conditions initiales qui est considérée, d'une certaine manière, comme le phénomène qui "cause" le chaos, puisqu'il existe une instabilité dans l'espace des phases qui provoque la séparation exponentielle des trajectoires. Nous savons que le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser est valable pour de petites perturbations, mais si la perturbation est suffisamment importante, le comportement peut devenir chaotique. Les orbites d'une séquence chaotique restent proches de la valeur originale "correcte" après quelques itérations, mais le taux d'augmentation de la séparation peut croître exponentiellement à mesure que le nombre d'itérations augmente.

La divergence exponentielle des trajectoires est quantifiée par l'exposant de Lyapunov. Pour une large classe de systèmes, si deux trajectoires chaotiques sont initialement séparées par une petite distance s_0 , alors leur séparation sera donnée par

$$s(t) \sim s_0 e^{\lambda t}$$

pour un instant ultérieur t , où λ est l'exposant de Lyapunov. Si $\lambda > 0$, le mouvement sera chaotique, et λ quantifie alors la croissance d'un écart de la trajectoire d'une solution régulière due à une perturbation. Il définit également une échelle de temps pour la croissance des divergences exponentielles causées par de grandes perturbations. Lorsque le temps devient beaucoup plus grand que cette échelle de temps, τ devient évident, jusqu'à ce que la séparation $s(t)$ soit comparable en taille à la dimension de l'espace des phases, point à partir duquel la séparation ne peut varier que de manière aléatoire sans augmenter. Si on a un système qui évolue par un processus itératif (cela pourrait être possible en génie électrique, par exemple), on aura plutôt

$$s(n) \sim s_0 e^{\lambda n},$$

où n est le nombre d'itérations. La divergence des orbites de l'espace des phases dans une région chaotique devient quelque chose comme un processus de Markov, où l'état actuel du système ne nous permet de déduire au plus quelque chose sur l'état précédent, et rien sur les états du passé

lointain

L'exposant de Lyapunov peut également être négatif : dans ce cas, il quantifie la vitesse à laquelle un système s'approche d'un attracteur régulier. Si $\lambda < 0$, le mouvement est non chaotique et la distance à un attracteur au temps t est donnée par

$$s(t) \sim s_0 e^{-|\lambda|t},$$

pour une certaine distance initiale s_0 . Pour un processus itératif, il existe une expression similaire à celle que nous avons précédemment :

$$s(n) \sim s_0 e^{-|\lambda|n},$$

pour n itérations¹⁰. Certaines suggestions ont été faites dans la littérature selon lesquelles le critère de l'exposant de Lyapunov devrait être affiné, car on peut avoir des trajectoires instables qui convergent très fortement sur des périodes de temps extrêmement longues. Cela semble être le cas, par exemple, pour le système chaotique simple suivant, qui modélise de petits corps dans un écoulement turbulent :

$$\dot{x} = v,$$

$$\dot{v} = \gamma(u(x, t) - v),$$

où γ est une constante pour le taux d'amortissement du mouvement d'une petite particule et $u(x, t)$ est un champ de vitesse qui fluctue aléatoirement pour imiter la turbulence¹¹. Il convient de mentionner que nous avons globalement présenté la théorie du chaos comme un phénomène qui se développe à partir de l'étude des systèmes hamiltoniens non intégrables en mécanique classique, mais il existe d'autres manières d'arriver à des idées similaires : par exemple, en étudiant des équations physiques macroscopiques telles que les équations de Navier-Stokes¹². Il est également possible d'étudier le comportement quantique des systèmes classiquement chaotiques, un sujet connu sous le nom de "chaos quantique"¹³.

Nous terminerons en mentionnant que la collaboration entre Littlewood et Mary Cartwright s'est étendue jusqu'à la topologie. Avec Littlewood, Mary Cartwright a prouvé le théorème du point fixe suivant : si τ est une transformation bijective continue et préservant l'orientation du plan sur lui-même qui laisse un intervalle continu borné I invariant, et si le complémentaire de I est un seul domaine simplement connexe, alors I contient un point fixe¹⁴.

10. Herbert Goldstein, Charles Poole et John Safko, *Mécanique classique* (États-Unis : Addison Wesley, 2002).

11. Marc Pradas, Alain Pumir, Greg Huber et Michael Wilkinson, "Chaos convergent", J. Phys. A : Math. Theor.

12. Hao Bai-Lin, *Chaos* (Singapour : World Scientific, 1984).

13. Hans-Jürgen Stöckmann, *Chaos quantique : une introduction* (Cambridge : Cambridge University Press, 2006).

14. Mary Cartwright et John Littlewood, "Quelques théorèmes de point fixe", Ann. of Math. (2) 54, 1-37 (1951).