

Carolyn Gordon

Carolyn Gordon est membre de l'*American Mathematical Society* et de l'*American Association for the Advancement of Science*. Elle est spécialisée dans l'étude des espaces homogènes et de la géométrie isospectrale, et est surtout connue pour avoir fourni une réponse négative (avec Webb et Wolpert) à la question "Pouvons-nous entendre la forme d'un tambour?" (posée initialement par Kac). Cela a été réalisé en construisant deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ qui ont des formes différentes mais les mêmes valeurs propres¹. Pour être plus technique, Carolyn Gordon et ses coauteurs ont trouvé deux domaines qui ont des formes différentes et pourtant le spectre de leurs laplaciens a la même fréquence. En fait, la théorie du laplacien sur une variété riemannienne est très profonde. Si (M, g) est une variété riemannienne compacte, il doit exister un opérateur de Laplace Δ sur M qui agit sur les fonctions lisses (0-formes) sur M :

$$\Delta = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

En coordonnées locales, cela prend la forme

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{|g|^{\frac{1}{2}}} \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} \left(|g|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) g^{kj} \right), \\ &= \sum_{k,j=1}^n g^{kj} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} + \text{termes d'ordre moindre.}\end{aligned}$$

Je vais rappeler quelques notions de théorie spectrale pour les espaces normés de dimension finie. Si $T : X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire symétrique et X un espace normé de dimension finie, alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de X qui ont pour valeurs propres

$$0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

L'ensemble de tous les $\{\lambda_i\}$ est le spectre de l'opérateur $\sigma(T)$ et nous avons également que

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(T) &\iff \exists (T - \lambda I)^{-1} \\ &\iff \operatorname{Ker}(T - \lambda I) = 0.\end{aligned}$$

Le spectre d'un opérateur linéaire est une généralisation du concept d'ensemble de valeurs propres d'une matrice que vous connaissez probablement de l'algèbre linéaire. Selon le choix de la base pour X , T peut être représenté par une matrice. Dans ce cas, la théorie spectrale devient simplement la théorie élémentaire des valeurs propres des matrices. Pour une matrice carrée A donnée, les valeurs propres et les vecteurs propres sont définis à l'aide d'une équation

$$Ax = \lambda x.$$

Traduction de la biographie extraite de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730> *Twenty female mathematicians* de Hollis Williams.

Traduction et transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, assistée d'outils de lecture d'image Google Lens et de traduction Google translate.

1. Carolyn Gordon, David Webb et Scott Wolpert, "On ne peut pas entendre la forme d'un tambour", Bulletin de l'American Mathematical Society 27, 134-138 (1992).

Une valeur propre d'une telle matrice carrée est un nombre λ tel que l'équation ci-dessus ait une solution non triviale et x est un vecteur propre de la matrice correspondant à cette valeur propre. Je ne décrirai pas plus en détail la théorie spectrale des matrices carrées, car elle peut être consultée dans n'importe quel manuel d'algèbre linéaire de dimension finie.

En dimension infinie, les choses se compliquent. Il est important de permettre aux espaces d'être de dimension infinie pour les applications physiques, car les espaces d'états de la mécanique quantique doivent pouvoir avoir une dimension infinie. Historiquement, la mécanique quantique a largement contribué au développement de l'analyse fonctionnelle. Si X est de dimension infinie, il est possible d'avoir un opérateur linéaire T dont le spectre comporte des valeurs qui ne sont pas des valeurs propres de cet opérateur. Par exemple, prenons l'espace l^2 et définissons un opérateur linéaire appelé opérateur de décalage à droite qui nous ramène dans l^2 .

$$T : l^2 \rightarrow l^2, \\ (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots).$$

où (ξ_j) est une suite de l^2 . Le décalage à droite est un opérateur borné. On peut également inverser cet opérateur pour obtenir un opérateur de décalage à gauche défini par

$$(\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots).$$

On peut montrer, à l'aide de la définition de cet opérateur, que T contient la valeur 0 dans son spectre, et pourtant 0 n'est pas une valeur propre de T car le vecteur nul n'est pas un vecteur propre. Cependant, une grande partie de la théorie pertinente reste valable si l'on s'en tient aux opérateurs compacts : les propriétés spectrales des opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert sont très proches de celles des opérateurs sur les espaces de dimension finie. Si X et Y sont deux espaces normés, un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est compact si, pour tout sous-ensemble borné M de X , l'adhérence de $T(M)$ est également compacte².

En particulier, la décomposition en vecteurs propres de l'espace normé X passe par la même étape si l'on prend X un espace de Hilbert de dimension infinie et T un opérateur compact. Là encore, l'espace de Hilbert possède une base orthonormée de vecteurs propres pour l'opérateur et les sous-espaces propres sont finis. L'opérateur linéaire est également borné par définition. Un opérateur linéaire sur un espace de dimension infinie peut être non borné même si son image est de dimension finie.

L'opérateur linéaire non borné le plus important est peut-être l'opérateur de différentiation, que vous connaissez peut-être de la mécanique quantique :

$$D : \mathfrak{D}(D) \rightarrow L^2(-\infty, \infty), \\ x \mapsto i \frac{dx}{dt}.$$

Les équations différentielles donnent souvent lieu à des transformations linéaires non bornées. Certaines propriétés des spectres des opérateurs linéaires auto-adjoints bornés restent valables pour les

2. Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications* (USA : John Wiley Sons, 1978).

opérateurs linéaires auto-adjoints non bornés. Les valeurs propres sont toutes réelles et le spectre est réel et fermé, par exemple.

Nous pouvons aller plus loin et essayer de montrer que la décomposition en vecteurs propres est également valable pour certains opérateurs différentiels non bornés sur des variétés riemanniennes compactes, où l'espace X est l'espace de Hilbert de toutes les formes sur la variété (c'est le même que l'espace des fonctions sur la variété dans le cas des 0-formes). Un exemple est le cercle, où $X = L^2(S^1, \mathbb{C})$. L'opérateur différentiel le plus simple sur le cercle est $d/d\theta$, mais cela se généralise à la dérivée extérieure, qui n'a pas de spectre. Au lieu de cela, nous prenons la dérivée seconde :

$$\Delta = -\frac{d^2}{d\theta^2}.$$

La décomposition en fonctions propres de $L^2(S^1)$ est bien connue en analyse de Fourier. Une base orthonormée est donnée par les polynômes trigonométriques $\{e^{in\theta}\}$ et la décomposition en fonctions propres est donnée par

$$f = \sum_n \langle f, e^{in\theta} \rangle e^{in\theta},$$

avec

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta.$$

En considérant les limites, il est facile de voir que Δ est non borné³.

Deux variétés riemanniennes sont isospectrales si les spectres de leur laplacien coïncident. La question se pose alors de savoir si deux variétés riemanniennes isospectrales sont nécessairement isométriques. Si M a une frontière non vide, on peut considérer le spectre de Dirichlet, qui est le spectre du laplacien agissant sur des fonctions lisses s'annulant à la frontière (ainsi nommé en raison de la condition aux limites de Dirichlet correspondante). Pour une région de $\mathbb{R}^2$, les valeurs propres de Dirichlet du laplacien sont fondamentalement les fréquences qu'une peau de tambour sous tension produirait si elle avait la forme de cette région, d'où la formulation en termes de tambours vibrants. Carolyn Gordon, Webb et Wolpert ont répondu par la négative à cette question en construisant deux régions planes simplement connexes qui ne sont pas isométriques et dont les spectres de Dirichlet et de Neumann coïncident. En fait, Milnor a résolu assez tôt la question pour les variétés de dimension supérieure en construisant une paire de tores isospectraux de dimension 16 non isométriques, mais le problème correspondant dans le plan est resté ouvert pendant plusieurs décennies. Il est à noter que le simple fait d'être en dimension inférieure ne facilite pas nécessairement la démonstration ou la réfutation d'une conjecture, car cela dépend toujours de la nature du problème considéré.

Un outil-clé de la démonstration était le théorème de Sunada. Celui-ci stipule que si M est une variété riemannienne sur laquelle un groupe fini G agit par isométries, H et K sont des sous-groupes de G qui agissent librement et s'il existe une bijection $f : H \rightarrow K$ qui associe à chaque élément de H un élément $f(h)$ conjugué à h dans G , alors les variétés quotients $H \backslash M$ et $K \backslash M$ sont isospectrales. Carolyn Gordon, Webb et Wolpert ont utilisé la méthode de Sunada pour construire une paire de 2-orbifolds à bord isospectraux. Cependant, les spectres de Neumann des orbifolds sont les

3. Steven Rosenberg, Le laplacien sur une variété riemannienne : une introduction à l'analyse sur les variétés (Cambridge : Cambridge University Press, 1997).

mêmes que les spectres de Neumann des variétés sous-jacentes, mais les espaces sous-jacents sont simplement des régions planes connexes. Un argument légèrement plus complexe peut être utilisé pour déduire l'isospectralité de Dirichlet des espaces sous-jacents ⁴.

Carolyn Gordon a continué à mener des recherches approfondies sur divers aspects des variétés riemanniennes isospectrales (une grande partie de ses recherches étant motivée par l'idée que les informations géométriques et topologiques sur les variétés compactes peuvent être encodées dans les spectres des opérateurs naturels sur ces variétés). En particulier, la question principale est la suivante : dans quelle mesure le spectre du laplacien sur une variété riemannienne détermine-t-il réellement la géométrie de la variété ? Les sphères rondes de basse dimension sont certainement déterminées par leurs spectres d'une manière unique, mais il existe d'autres cas où la géométrie n'est pas contrôlée par le spectre. Pour la dimension $n \geq 8$, il existe des déformations isospectrales des métriques riemanniennes sur S^n qui peuvent être choisies arbitrairement proches de la métrique ronde, et pour la dimension $n \geq 9$, il existe des déformations isospectrales des métriques riemanniennes sur la boule dans $\mathbb{R}^n$ qui peuvent être choisies arbitrairement proches de la métrique plate ⁵.

Certains des premiers travaux de Carolyn Gordon se sont concentrés sur les groupes d'isométries de variétés homogènes. Les espaces homogènes, en un certain sens, ont la même apparence où que l'on se trouve dans l'espace, et ils jouent donc un rôle-clé dans la modélisation de l'Univers en cosmologie, où l'on suppose que l'Univers est identique partout à grande échelle. Une variété riemannienne (M, g) possède un groupe d'isométries riemanniennes $\text{Iso}(M, g)$ qui renvoient la variété sur elle-même. Une isométrie riemannienne entre les variétés (M, g_M) et (N, g_N) est un difféomorphisme de la première variété vers la seconde tel que la métrique sur la première variété soit égale à la métrique sur la seconde variété ramenée par le difféomorphisme :

$$F^*g_N = g_M.$$

Ceci peut également s'écrire

$$g_M(v, w) = g_N(DF(v), DF(w)),$$

où v et w sont des vecteurs tangents dans T_pM . Ceci découle de la définition du pullback. Si $F : M \rightarrow N$ est plus généralement une application lisse entre variétés lisses et si ω est une k -forme lisse sur N , alors le pullback de cette forme est une forme lisse sur M définie par

$$(F^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{F(p)}(F_*X_1, \dots, F_*X_k),$$

où $X_1, \dots, X_k \in T_pM$ et $F_*X_p \in T_{F(p)}N$ est un vecteur obtenu en poussant un champ de vecteurs en un point de M par l'application lisse F . Bien que les champs de vecteurs ne soient pas nécessairement envoyés sur de nouveaux champs de vecteurs, les champs de covecteurs lisses sont envoyés sur des champs de covecteurs lisses. Si l'application F n'est pas une injection (c'est-à-dire que différents éléments du domaine peuvent être envoyés sur le même élément du codomaine), alors il peut exister différents vecteurs en un point de N qui sont obtenus en poussant un champ de vecteurs sur M à partir de différents points de la variété ⁶. De manière informelle, la métrique mesure

4. Carolyn Gordon, David Webb et Scott Wolpert, "On ne peut pas entendre la forme d'un tambour", Bulletin of the American Mathematical Society 27, 134-138 (1992).

5. Carolyn Gordon, "Déformations isospectrales des métriques sur les sphères", Inventiones Mathematicae 145, 317-331 (2001).

6. John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds (New York : Springer, 2003).

les longueurs des vecteurs tangents et peut donc être utilisée pour mesurer les longueurs des courbes.

La variété est homogène si le groupe d'isométries agit transitivement de telle sorte qu'il existe toujours un $F \in \text{Iso}(M, g)$ tel que $F(p) = q$ pour deux points $p, q \in M$. Le groupe d'isotropie $\text{Iso}_p(M, g)$ au point p est l'ensemble des isométries du groupe telles que $F(p) = p$. Pour un espace homogène tel que l'espace euclidien, on a que l'espace est isomorphe à Iso/Iso_p pour tout point p . À titre d'exemple, si l'on considère la n -sphère munie de la métrique canonique, le groupe d'isométrie riemannien est le suivant :

$$\text{Iso}(S^n(r), \text{can}) = \text{O}(n+1),$$

qui est également le groupe d'isotropie de $(\mathbb{R}^{n+1}, \text{can})$ au point 0. Une variété différentiable munie d'une action différentiable transitive par un groupe de Lie est souvent appelée variété homogène. On peut prendre un groupe de Lie G (une variété différentiable qui est aussi un groupe tel que les applications de multiplication et d'inversion données par

$$m(g, h) = gh, i(g) = g^{-1}$$

sont toutes deux différentiables) et trivialisier l'espace tangent à l'aide de translations à gauche ou à droite sur G :

$$TG \simeq G \times T_e G.$$

Les applications de translation à gauche et à droite sont des applications du groupe de Lie dans lui-même, définies par

$$L_g(h) = gh, \quad R_g(h) = hg$$

$T_e G$ est l'espace tangent du groupe de Lie à l'élément identité. Un vecteur tangent dans $T_e G$ peut être étendu en un champ de vecteurs invariant à gauche (ou à droite) par translation à gauche (ou à droite) vers d'autres parties de la variété ; ainsi, $T_e G$ peut être identifié à l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche. Un champ de vecteurs sur G est invariant à gauche si, pour tous les éléments du groupe,

$$(L_g)_* X_{g'} = X_{gg'}.$$

Cependant, l'espace de tous les champs de vecteurs lisses invariants à gauche sur un groupe de Lie est un exemple d'algèbre de Lie, appelée algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G . Une algèbre de Lie est, en général, simplement un espace vectoriel réel muni d'une application de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ vers $\mathfrak{g}$ appelée crochet, qui satisfait l'identité de Jacobi ainsi que la bilinéarité et l'antisymétrie. On peut également montrer que la composante connexe du groupe de Lie qui contient l'élément identité est le seul sous-groupe ouvert connexe de G et que toute composante connexe du groupe est difféomorphe à cette composante.

En raison de ce qui précède, le produit scalaire canonique sur $T_e G$ induit une métrique riemannienne sur le groupe de Lie, donc les translations à gauche sont des isométries riemanniennes. Si H est un sous-groupe de Lie normal fermé de G , le quotient G/H est une variété lisse d'après le théorème de la variété quotient, et il s'ensuit que c'est aussi un groupe de Lie et que l'application quotient est un homomorphisme de groupes de Lie. En fait, si nous munissons G d'une métrique pour laquelle toutes les translations à droite sont des isométries riemanniennes, alors il existe une unique métrique riemannienne sur le groupe quotient de sorte que l'application quotient soit une submersion. Si la métrique est invariante à gauche, alors G agit comme un groupe d'isométries sur le quotient, faisant

de G/H une variété homogène⁷. Si nous commençons par l'espace complexe $\mathbb{C}^{n+1}$, celui-ci a S^{2n+1} comme sous-ensemble. Le groupe de Lie agit comme un groupe d'isométries sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et S^{2n+1} et l'application quotient

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^n$$

est une submersion surjective lorsqu'elle est restreinte à S^{2n+1} , donc nous avons

$$\frac{S^{2n+1}}{S^1} \simeq \mathbb{CP}^n.$$

Puisque S^1 agit de manière lisse comme un groupe de Lie par isométries de la métrique ronde, la métrique sur S^{2n+1} induit une métrique homogène et isotrope sur $\mathbb{CP}^n$ telle que l'application $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ soit une submersion riemannienne : cette métrique est appelée la métrique de Fubini-Study⁸.

Un groupe de Lie très important est le groupe unitaire spécial $SU(2, \mathbb{C})$, défini comme l'ensemble suivant de matrices à coefficients complexes :

$$SU(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

L'algèbre de Lie correspondante

$$\mathfrak{su}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

a la base suivante :

$$u_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

qui peut être visualisée comme des champs de vecteurs invariants à gauche sur $SU(2, \mathbb{C})$. Si la base est orthonormée, alors on obtient une métrique invariante à gauche. Un autre groupe de Lie important en physique théorique est le groupe linéaire spécial $SL(2, \mathbb{C})$: il s'agit du sous-groupe du groupe linéaire général tel que les matrices aient un déterminant unitaire. Le groupe fondamental d'un groupe de Lie connexe avec l'élément identité comme point de base est toujours abélien. Bien que $SL(2, \mathbb{C})$ ne soit pas compact, il est d'une forme particulière telle que son groupe fondamental peut être réduit au calcul d'un groupe classique compact : dans ce cas, $SU(2)$. Le groupe fondamental de $SU(2)$ est isomorphe au groupe fondamental de la 3-sphère, mais le groupe fondamental d'une sphère autre que le cercle doit être le groupe trivial (car toute boucle peut être réduite à un point). On peut montrer que

$$\pi_1(SL(2, \mathbb{C})) \simeq \pi_1(SU(2)),$$

ce qui montre que $\pi_1(SL(2, \mathbb{C}))$ est le groupe trivial⁹.

7. Peter Petersen, Géométrie riemannienne (New York : Springer, 2006).

8. John M. Lee, Variétés riemanniennes : une introduction à la courbure (New York : Springer, 1997).

9. Brian C. Hall, Groupes de Lie, algèbres de Lie et représentations : une introduction élémentaire (Suisse : Springer, 2015).

Les spineurs sont définis à partir de représentations de $SL(2, \mathbb{C})$. Ils peuvent également être définis à partir de représentations de $SU(2, \mathbb{C})$, mais il s'agit alors de spineurs spatiaux, et non des spineurs spatio-temporels usuels. Les spineurs spatiaux peuvent être utilisés pour des problèmes liés aux 3-variétés riemanniennes (en supposant l'existence d'une structure spinorielle munie d'un produit hermitien)¹⁰. $SL(2, \mathbb{C})$ est le groupe de revêtement universel du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$. (Si G est un groupe de Lie connexe, il existe un groupe de Lie simplement connexe G' , appelé groupe de revêtement universel, et une application de revêtement lisse $\pi : G \rightarrow G'$, qui est un homomorphisme de groupes de Lie; pour une révision de la théorie élémentaire des espaces de revêtement, se référer à un manuel de topologie algébrique ou de variétés différentiables). Si V est la représentation fondamentale de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^2$, cette représentation est munie d'une forme symplectique invariante, mais il n'y a pas de structure hermitienne sur $\mathbb{C}^2$, car la taille des vecteurs ne change pas.

Prenons une boule de rayon π et considérons l'application $B^3(\pi) \rightarrow SO(3)$ qui envoie la paire (r, θ) sur une rotation d'angle r avec axe le long de θ . C'est une application surjective, car on peut toujours trouver un point en choisissant un axe et en prenant n'importe quelle rotation. Les rotations ne peuvent être identiques que si l'on tourne de π ou de $-\pi$, donc seuls les points antipodaux peuvent être identifiés. Cela signifie que

$$SO(3) \simeq B^3 / \sim = \mathbb{RP}^3.$$

Il existe une application de recouvrement $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$, mais cela donne une application de recouvrement par la projection $\text{Spin}(3) \rightarrow SO(3)$, car $\mathbb{RP}^3 \simeq SO(3)$ et par l'un des isomorphismes accidentels parmi les groupes de Lie classiques en basse dimension, $\text{Spin}(3) = SU(2)$, qui est diféomorphe à S^3 .

On peut prendre les applications d'inclusion $\text{Spin}(3) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ et $SO(3) \rightarrow SO(3, 1)$. Nous savons déjà qu'il existe une application de recouvrement $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(3, 1)$, donc les applications commutent toutes entre elles pour former un diagramme commutatif. Cela signifie que V peut être considéré comme une représentation de $\text{Spin}(3)$ avec une structure hermitienne, qui peut être vue comme un isomorphisme donné par multiplication de Clifford ou comme un nouveau produit scalaire hermitien¹¹. Les applications de recouvrement sont elles-mêmes des isométries riemanniennes locales.

Une classe importante et utile d'espaces homogènes est celle des espaces symétriques (introduits et étudiés par Cartan). Une variété riemannienne (M, g) est un espace symétrique si, pour tout point de la variété, le groupe d'isotropie de ce point Iso_p contient une isométrie A_p telle que la différentielle $DA_p : T_p M \rightarrow T_p M$ soit l'application antipodale. Le fait que les isométries préservent les géodésiques peut être utilisé pour montrer qu'un tel espace est homogène. Les espaces symétriques sont géodésiquement complets, ce qui signifie que toute géodésique peut être prolongée indéfiniment dans les deux directions. Ceci peut être prouvé en utilisant le fait qu'une involution d'un espace symétrique inverse les géodésiques passant par p . Une variété riemannienne est symétrique si, pour

10. Thomas Bäckdahl et Juan Valiente Kroon, "Un formalisme pour le calcul des variations avec spineurs", Journal of Mathematical Physics 57, 022502 (2016).

11. Thomas Parker et Clifford Henry Taubes, "Sur la preuve de Witten du théorème de l'énergie positive", Commun. Math. Phys. 84, 223-238 (1982).

tout point de la variété, il existe une isométrie σ_p appelée involution, telle que

$$\sigma_p(p) = p,$$

$$D\sigma_p(p) = -Id.$$

$\mathbb{CP}^n$ muni de la métrique de Fubini-Study est un exemple d'espace symétrique. Dans un espace symétrique, deux points quelconques peuvent être reliés par une géodésique. Tout groupe de Lie muni d'une métrique bi-invariante est un espace symétrique, car l'opération inverse forme la symétrie requise autour de l'élément neutre. Parmi ceux-ci figurent certains des groupes de Lie bien connus : $SU(n+1)$, $SO(2n+1)$, $Sp(n)$ et $SO(2n)$. Il est intéressant de noter que les espaces symétriques se présentent par paires composées d'un espace compact et d'un espace non compact. En termes plus géométriques, les espaces symétriques ont un tenseur de courbure parallèle : c'est-à-dire ¹²,

$$\nabla R = 0.$$

Carolyn Gordon a récemment travaillé sur un type particulier de variété riemannienne complète connue sous le nom de variété d'orbites géodésiques : (M, g) est une variété d'orbites géodésiques si toute géodésique est une orbite d'un groupe d'isométries à un paramètre. Une variété de ce type doit également être homogène. Avec Nikonorov, Carolyn Gordon a démontré que si (M, g) est une variété géodésiquement orbitale de dimension n , simplement connexe, alors (M, g) est isométrique à un espace symétrique non compact, à une nil-variété riemannienne géodésiquement orbitale simplement connexe, ou à l'espace total d'une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques, où l'espace de base est un espace symétrique non compact et les fibres sont isométriques à une nil-variété riemannienne géodésiquement orbitale simplement connexe. Ils ont également démontré que si (M, g) est une variété géodésiquement orbitale difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, alors M admet un groupe d'isométries résolubles simplement transitif de la forme $S \times N$, où S est un sous-groupe d'Iwasawa d'un groupe de Lie semi-simple et N est le groupe dans une nil-variété géodésiquement orbitale (N, g) de pas au plus deux ¹³.

En lien avec la théorie spectrale du laplacien et des métriques bi-invariantes sur les groupes de Lie, Carolyn Gordon, Schueth et Sutton ont montré qu'une métrique bi-invariante sur un groupe de Lie compact connexe est spectralement isolée dans la classe des métriques invariantes à gauche. Le terme "isolation spectrale" se réfère à la question de savoir si certains types de variétés riemanniennes, comme les espaces symétriques, ont des spectres qui peuvent être distingués de ceux des autres variétés riemanniennes. Hormis les variétés à courbure constante, il n'existe aucun exemple de métriques spectralement isolées d'autres métriques riemanniennes arbitraires, mais on peut se restreindre à des classes de métriques : par exemple, tout ensemble d'espaces symétriques compacts mutuellement isospectraux est fini. Carolyn Gordon a examiné la question de savoir si les espaces symétriques peuvent être spectralement distingués des autres variétés riemanniennes homogènes : plus précisément, si l'on se restreint aux espaces symétriques compacts définis par des métriques riemanniennes bi-invariantes sur des groupes de Lie compacts, une telle métrique est-elle spectralement isolée si l'on reste dans la classe des métriques riemanniennes invariantes à gauche? La

12. Jürgen Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis (Heidelberg : Springer, 2008).

13. Carolyn Gordon et Yurii Nikonorov, "Geodesic orbit Riemannian structures on $\mathbb{R}^n$ ", J. Geom. Phys., 134, 235-243 (2018).

réponse est oui, et Carolyn Gordon a obtenu un résultat quantitatif plus fort : étant donné une métrique bi-invariante g sur G , il existe un entier positif n tel que dans un voisinage de la métrique dans la classe des métriques invariantes à gauche avec le même volume ou moins, g est déterminé de manière unique par les n premières valeurs propres non nulles distinctes du laplacien ¹⁴.

Dans un cadre légèrement plus appliqué, Carolyn Gordon a étudié le cas d'un $2m$ -tore réel M avec une métrique invariante par translation g et une forme symplectique invariante par translation w , où cette dernière est considérée comme un champ magnétique sur M . À cette forme et à cette métrique, on peut associer un système hamiltonien (T^*M, Ω, H) , où Ω est la forme symplectique tordue donnée par $\omega_0 + \pi^*\omega$, π est la projection de T^*M sur M , et H est la fonction hamiltonienne donnée par

$$H(q, \xi) = \frac{1}{2}h_q(\xi, \xi).$$

Ce système décrit la dynamique d'une particule chargée se déplaçant dans un champ magnétique et pourrait vraisemblablement être utilisé pour modéliser la dynamique du plasma à l'intérieur d'un tokamak ¹⁵. L'idée d'appliquer la dynamique hamiltonienne au confinement du plasma ne se limite pas aux tokamaks et est également envisagée pour des dispositifs appelés stellarators. Dans ce cas, on cherche à obtenir une dynamique pour le centre de guidage qui soit intégrable ou presque intégrable afin de maximiser le confinement et d'obtenir un courant toroïdal nul ou faible. La condition sur le courant toroïdal exige une déviation par rapport à l'axisymétrie. L'intégrabilité est garantie dans le cas de la quasi-symétrie, mais on pense que les seules véritables quasi-symétries sont les axisymétries. Les scientifiques devront donc développer des moyens de tester la déviation par rapport à l'intégrabilité, ce qui aboutira nécessairement à la conception de dispositifs de stellarators.

En général, le confinement magnétique utilise des champs électromagnétiques pour confiner un plasma chaud de deutérium et de tritium circulant dans une région. Une difficulté pratique majeure liée à la fusion contrôlée est que le combustible doit être confiné pendant une longue période à des températures extrêmes, les champs étant nécessaires pour maintenir le combustible éloigné des parois du tokamak. Les champs ne peuvent confiner le plasma que pendant une courte période et le plasma est sujet à des instabilités dues aux températures et aux champs magnétiques intenses. Le tokamak lui-même doit également pouvoir résister aux forces électromagnétiques générées. Pour les évaluer, on suppose que le dispositif de fusion est une structure conductrice tridimensionnelle V_c qui entoure un tore de plasma. Le potentiel vecteur magnétique est dérivé à l'aide de la loi de Biot-Savart :

$$A(r) = \int_{V_c} \frac{J(Q)}{|r - Q|} dV_c + A_{\text{plasma}}(r).$$

Le potentiel vecteur électrique T est développé en termes d'éléments de bord N_i une fois que nous avons une discrétisation par éléments finis de V_c :

$$T = \sum_i I_i N_i.$$

14. Carolyn Gordon, Dorothee Schueth et Craig Sutton, "Isolation spectrale des métriques bi-invariantes sur des groupes de Lie compacts", Ann. Inst. Fourier 60(5), 1617-1628 (2010).

15. Carolyn Gordon, William Kirwin, Dorothee Schueth et David Webb, "Équivalence classique et équivalence quantique des champs magnétiques sur des tores plats", 2011, <https://arxiv.org/pdf/1108.5113>.

Le modèle de la structure conductrice peut être combiné à un modèle de plasma, généralement modélisé par des équations magnétohydrodynamiques monofluides définies entre le plasma et les parois du dispositif. Le modèle de plasma doit être discrétisé par des méthodes similaires, puis combiné à l'équation différentielle des potentiels. Comme mentionné précédemment, des instabilités peuvent toujours se développer dans le plasma, même à l'équilibre : ces perturbations peuvent s'atténuer ou s'amplifier. Les modes de paroi résistants présentent un intérêt particulier. Ce sont des modes instables qui apparaissent lorsque le plasma nécessite une paroi parfaitement conductrice pour stabiliser ses modes de torsion externes. Une chambre à vide entourant un plasma constitue une bonne approximation d'une paroi parfaitement conductrice, mais sa conductivité est finie. En résolvant le problème aux valeurs propres, on peut démontrer que la résistance finie de la paroi compromet la stabilité des modes de torsion et que, par conséquent, les modes de paroi résistants sont intrinsèquement instables. Les modes peuvent être calculés à l'aide d'algorithmes d'itération inverse, mais cela devient très gourmand en ressources de calcul, et il faudrait probablement développer des techniques de calcul parallèle avant que la surveillance des instabilités dans les tokamaks ne devienne possible¹⁶. Une autre possibilité pour un dispositif de confinement magnétique est le pincement à champ inversé, qui a une force de champ magnétique similaire dans les directions toroïdale et polaire, tandis que le tokamak a un champ plus fort dans la direction toroïdale.

16. Bruno Carpentieri, "Techniques de calcul rapides pour la modélisation des dispositifs de fusion RFX-mod sur des architectures hybrides CPU-GPU", Symposium international de la Commission B de l'URSI sur la théorie électromagnétique (Espoo, Finlande : EMTS, 2016).