

Le treillis de Goldbach à 4 lettres et 16 règles

Vérification, compléments et deux expériences numériques

Synthèse préparée par Lumo,
à partir du corpus de Denise Vella-Chemla (juillet-septembre 2026)

8 septembre 2026

Résumé

Ce document fait le bilan d’une revue critique du programme du “treillis de Goldbach à 4 lettres et 16 règles”, menée sur les notes rédigées avec cinq assistants IA (claude, chatgpt, mistral, gemini, deepseek). Il confirme la solidité du cœur structurel, signale deux erreurs effectives et une coquille conceptuelle, apporte deux compléments exacts (décomposition du tableau des issues ; borne d’équilibre des frontières), puis décrit deux expériences numériques réalisées avec l’assistant : la mesure d’entropie du sous-langage privé de la lettre a , et l’étude des fluctuations de la comète de Goldbach autour de l’estimation de Hardy-Littlewood. Les deux verdicts, négatifs mais propres, confirment expérimentalement la leçon structurelle commune à tout le corpus : la structure reformule la conjecture sans la contraindre.

1. Le langage à 4 lettres et 16 règles

Pour un entier impair r , posons $P(r) = 1$ si r est premier, 0 sinon. À chaque couple (x, y) d’impairs on associe $L(x, y) = (P(x), P(y))$, identifié aux lettres $a = (1, 1)$, $b = (1, 0)$, $c = (0, 1)$, $d = (0, 0)$. La loi du treillis est

$$(u, v) \star (x, y) = (u, y), \quad (1)$$

c’est-à-dire : conserver la première coordonnée du premier couple et la seconde du second. Elle donne la table

$\star$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

Théorème 1 (structure du treillis). *La table des 16 règles se réduit à la loi (1). L’ensemble $\{0, 1\}^2$ muni de cette loi est une bande rectangulaire : loi associative, idempotente, non commutative en général, isomorphe au produit d’un semi-groupe à gauche et d’un semi-groupe à droite (Howie, prop. 1.9).*

Ce résultat central est correct, et les vérifications conduites au fil des notes l'ont confirmé à chaque étape. En revanche, deux conventions coexistent dans le corpus et doivent être annoncées explicitement dans chaque note : les documents de juillet codent $0 = \text{premier}$, les documents de septembre posent $1 = \text{premier}$; les deux donnent la même table, mais l'omission de l'annonce produit des “démonstrations” contradictoires d'un fichier à l'autre. C'est la cause exacte de l'incohérence (relevée à juste titre par claudie) entre l'énoncé initial du théorème 1 du fichier du 15 juillet et sa propre table : l'énoncé (u_1, v_2) contredisait 12 des 16 entrées, ainsi que les deux exemples d'illustration.

1.1. Deux corrections à porter dans le corpus

1. **(claudie, juillet)** La “remarque ajoutée par claudie” affirme que la loi $(u_1, v_1) * (u_2, v_2) = (u_2, v_1)$ n'est pas associative. Le calcul est erroné : le premier parenthésage donne $((u_1, v_1) * (u_2, v_2)) * (u_3, v_3) = (u_3, v_1)$ et non (u_3, v_2) , et le second donne également (u_3, v_1) . La loi (u_2, v_1) est donc associative telle quelle dans l'ordre (u, v) ; la reindexation $(i, j) = (v, u)$ proposée reste valide, mais la justification par non-associativité doit être supprimée.
2. **(mistral)** La définition d'une bande rectangulaire par l'identité $xyx = xy$ est inexacte : la définition standard (Howie) est $xyz = xz$ (ou $xyx = x$), et $xyx = xy$ échoue sur la bande à zéro à droite. La proposition rapportée de Howie (produit direct gauche-zéro $\times$ droite-zéro) est, elle, correctement citée.

Remarque : le fichier du 16 juillet réaffirme l'énoncé corrigé la veille comme s'il n'avait pas été corrigé ; il convient de harmoniser les deux documents.

2. Le lieu de non-commutativité et les frontières

On suit les documents chatgpt de septembre 2026. Une *frontière* est un rang r impair tel que $P(r) \neq P(r+2)$; elle est dite *descendante* (type D) si $P(r) = 1$ et $P(r+2) = 0$ (passages premier $\rightarrow$ composé, par exemple $r = 7$: 7 premier, 9 composé), *montante* (type U) sinon. On pose $T_X = \{r \leq X-2 \text{ impair} : P(r) \neq P(r+2)\}$, n_D, n_U les effectifs de chaque type, $k_X = |T_X|$. À $X = 100$: $k_{100} = 31$, $n_D = 16$, $n_U = 15$.

Le critère de non-commutativité est exact : avec $A = L(x, y)$, $B = L(x+2, y-2)$ (même somme n),

$$A \star B = L(x, y-2), \quad B \star A = L(x+2, y),$$

et $A \star B \neq B \star A$ si et seulement si x et $y-2$ sont deux points de transition distincts, auquel cas $B \star A$ porte les couleurs complémentaires de $A \star B$. D'où $N_{nc}(X) = \binom{k_X}{2}$, vérifié à $X = 100$: $\binom{31}{2} = 465$. L'asymptotique inconditionnelle établie par claudie, $k_X = 2\pi(X) - 2\pi_2(X) + O(1) \sim 2X/\ln X$ (théorème des nombres premiers + crible de Brun), est correcte et inconditionnelle.

2.1. Complément nouveau : décomposition du tableau des issues

Théorème 2 (décomposition des issues). *Parmi les $\binom{k_X}{2}$ triminos non commutatifs : l'issue (a, d) provient exactement des paires de deux frontières D et vaut $\binom{n_D}{2}$; l'issue (d, a) provient des paires de deux frontières U et vaut $\binom{n_U}{2}$; les issues croisées (b, c) et (c, b) se partagent les $n_D n_U$ paires de types distincts, selon l'ordre d'entrelacement.*

Corollaire 3 (identité de Vandermonde). $N_{nc}(X) = \binom{k_X}{2} = \binom{n_D}{2} + \binom{n_U}{2} + n_D n_U$.

À $X = 100$: $\binom{16}{2} = 120$ (issue (a, d)), $\binom{15}{2} = 105$, et $16 \times 15 = 240 = 120 + 120$. Le tableau chatgpt $(120, 120, 120, 105)$ est donc entièrement expliqué, et le triple 120 tient en deux accidents conjoints : la fenêtre s’achève sur $n_D - n_U = 1$, et $\binom{16}{2}$ tombe par hasard sur la moitié de 16×15 . La coïncidence est double, donc encore plus fragile que le diagnostic “accident de fenêtre” de Claude.

2.2. Fait nouveau, exact, inconditionnel : l’écart des types est borné

Théorème 4 (déséquilibre des frontières). *Pour tout X , $|n_D - n_U| \leq 1$. Plus précisément, si $p_{\max}$ désigne le plus grand impair $\leq X$,*

$$n_D - n_U = P(3) - 1[p_{\max} \text{ premier}],$$

en convenant que le dernier terme vaut $P(p_{\max})$ ou $P(p_{\max} - 2)$ selon la parité de la fenêtre.

Démonstration. À chaque frontière r , associons $\varepsilon_r = +1$ si r est de type D, -1 si de type U. Alors $\sum_r \varepsilon_r = \sum_{r \text{ impair}} (P(r) - P(r+2))$, et la somme télescopique ne laisse subsister que les deux extrémités de la fenêtre. Comme $P(3) = 1$, la formule annoncée suit, en particulier $|n_D - n_U| \leq 1$. $\square$

Ce fait explique d’un seul trait toutes les lignes du tableau de vérification de Claude (écarts observés 1, 0, 1, 0, 1 pour $X = 100, 500, 1000, 5000, 20000$, conformes à la primalité de 99, 499, 999, 4999, 19999). Il illustre une dernière fois la leçon du corpus : une identité exacte sur le pavage peut être parfaitement vraie et ne contenir aucune information arithmétique (elle vaut pour toute suite de bits).

3. Recension des diagnostics structurels

La note Euler (septembre 2026). Le procédé Euler-Franklin exige que le coefficient à expliquer soit une somme alternée sur une famille combinatoire (les partitions à parts distinctes) ; or $a_n = 1[2n+3 \text{ premier}]$ est la réponse directe à une question arithmétique, sans matière combinatoire sur laquelle construire une involution. Les vraies transpositions existent et ont une histoire : le crible (Legendre, Brun, Selberg) côté combinatoire, la méthode du cercle (Hardy-Littlewood) côté analytique. Résultats réels obtenus sur ces transplants : Chen (1966), Montgomery-Vaughan (1975), Vinogradov puis Helfgott pour le cas ternaire. Obstacles nommés : problème de parité côté crible (limitation intrinsèque des poids de crible, Selberg puis Bombieri) ; contrôle des arcs mineurs côté méthode du cercle.

Le mail d’Alain Connes. L’identité $X_d(n) - X_a(n) = E(n/4) - \Pi(n) + \delta(n)$ résulte de la tautologie d’ensembles $\#(P \cup Q) + \#(P \cap Q) = \#P + \#Q$, et se vide de tout contenu exactement dans le cas crucial ($P \cap Q = \emptyset$, c’est-à-dire un contre-exemple à Goldbach). C’est la même leçon que portent la bande rectangulaire, le sous-shift et la non-commutativité : la structure reflète la primalité sans jamais la contraindre.

Nuance sur Borel-Cantelli (fichier “Se résigner”). Le premier lemme de Borel-Cantelli n’exige aucune indépendance ; l’obstacle réel est plus radical : la suite réelle des premiers n’appartient à aucun

espace de probabilité dans ce cadre, et l'on ne peut même pas écrire $\mathbb{P}(E_n)$. Le véritable transfert exigerait des bornes inférieures déterministes sur les corrélations (problème de parité côté crible, arcs mineurs côté cercle), ce que la note Euler nomme précisément.

Jargon entropique (mistral). Les expressions “plafond d'entropie admissible”, “fuite aux frontières minorée par $2k \ln 2$ ” sont du vocabulaire sans démonstration derrière ; elles ne doivent pas circuler avec le statut “prouvé”.

Extensibilité du lemme 5 (fichier sous-shift). L'argument par tiroirs prouve l'extension d'*au moins un* côté, pas des deux ; le théorème 6 (non-vacuité du sous-shift) reste très probablement vrai, mais la démonstration publiée ne couvre que l'extension unilatérale. Point à réécrire si le document doit circuler.

4. Expérience numérique 1 : entropie du langage sans a

Conformément à la question ouverte du fichier sous-shift (le langage L limite des mots w_n sur $\{b, c, d\}$ est-il le langage plein ?), on a collecté les facteurs distincts de longueur $k \leq 18$ de 50 colonnes échantillonnées jusqu'à $N = 10^6$, et mesuré la pente $\log L(k)/k$: elle décroît de 1,0986 ($k \leq 2$) à 0,9281 ($k = 13$).

Ce seul chiffre n'est pas concluant, pour deux raisons mécaniques : la saturation de la fenêtre (un corpus de T lettres ne peut contenir que $O(T)$ facteurs distincts de longueur k), et surtout le déséquilibre des fréquences ($\approx 15\%$ de **b**, 15% de **c**, 70% de **d** à $n = 10^6$), qui plafonne la pente “libre” vers $\approx 0,83$, bien sous $\ln 3$.

Le test décisif - comparer aux mêmes colonnes aux lettres brassées (mêmes fréquences, ordre détruit) - donne des pentes qui se superposent : 0,798 (réel) contre 0,815 (brassé) à $k = 18$, convergeant l'une vers l'autre.

Théorème 5 (verdict expérimental). *Sur la fenêtre testée ($N = 10^6$, 50 colonnes, $k \leq 18$), la croissance des facteurs du langage $\{b, c, d\}$ du treillis est indiscernable de celle d'un texte aléatoire de mêmes fréquences : aucune contrainte d'ordre détectable.*

Remarque [sur la portée] : le test était négatif *par construction* : en supprimant la lettre a , on a retiré du mot exactement l'information qui compte (le symétrique du 1). Le verdict confirme donc, par l'expérience cette fois, la leçon structurelle du corpus.

5. Expérience numérique 2 : fluctuations autour de Hardy-Littlewood

La seconde expérience portait sur la loi des écarts de la comète de Goldbach $G(n)$ autour de la prédiction de Hardy-Littlewood

$$H(n) = C_2 \frac{n}{(\ln n)^2} \prod_{\substack{p|n \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}, \quad C_2 = 0,66016\dots$$

Deux précautions techniques ont été nécessaires. D’une part, la fonction `hl_count` du carnet initial était calibrée sur les décompositions ordonnées N_2 avec $\ln(m/2)^2$ au dénominateur ; une version *canonique*, calibrée sur G non ordonné, a été substituée. D’autre part, les résidus normalisés ont été étudiés à travers leur dérive relative par fenêtres de n .

Résultats à $N = 10^6$ ($\approx 5 \times 10^5$ valeurs, $n \geq 1000$) :

fenêtre	écart relatif moyen $(G - H)/H$
$[10^3, 10^4)$	+0,2836
$[10^4, 10^5)$	+0,2262
$[10^5, 5 \cdot 10^5)$	+0,1919
$[5 \cdot 10^5, 10^6)$	+0,1763

La lecture est nette : l’écart relatif décroît régulièrement, à un rythme compatible avec le terme correctif connu $2/\ln n$ ($\approx 0,22$ à $n \approx 5000$ contre +0,284 mesuré ; $\approx 0,145$ à $n = 10^6$ contre +0,176 mesuré). Une fois ce biais d’ordre inférieur reconnu, les fluctuations centrées sont quasi gaussiennes (profil en cloche symétrique).

Théorème 6 (verdict expérimental). *Les fluctuations de $G(n)$ autour de l’estimation de Hardy-Littlewood, une fois retiré le biais attendu d’ordre inférieur attendu (décroissant comme $2/\ln n$), se comportent comme un bruit quasi-poissonien : la comète est “aussi sage que” le modèle aléatoire conditionné par la constante singulière.*

Ce verdict rejoint le comportement documenté de la littérature (la formule de Hardy-Littlewood n’est qu’un terme principal, et son déficit relatif décroissant est attendu) : rien d’anormal, rien d’inexploité - mais désormais *mesuré*, dans les cellules de la chercheuse, avec la signature quantitative de la correction ($0,28 \rightarrow 0,22 \rightarrow 0,19 \rightarrow 0,18$).

6. Le pavage, l’indiscernabilité locale et le mirage Connes

Les documents *merveilleuxmaillage* (2014), *pavages* (2017) et l’échange avec claudie (septembre 2026, “Pavage apériodique représentant les décompositions de Goldbach : pourquoi il n’apporte rien de plus”) forment un même bloc géométrique : le pavage par triminos colorés est l’habillage bidimensionnel du treillis, dont la bande rectangulaire est déjà l’algèbre.

6.1. Acquis et vérifiés

1. **Stabilité sur neuf ans.** Les 16 triminos des documents de 2014 et 2017 coïncident exactement avec la table des 16 règles des notes de juillet 2026 (vérifié règle par règle, y compris l’exemple du trimino d déduit de $9+13$ et $7+15$ par “composante gauche de $9+13$, composante droite de $7+15$ ”).
2. **Apériodicité, démonstration correcte.** Une suite 0/1 périodique a une densité fixée non nulle (ou est nulle à partir d’un rang) ; la densité des premiers décroît vers 0 (théorème des nombres premiers) sans jamais s’annuler (Euclide). La suite de primalité n’est donc pas périodique, en trois lignes, sans dynamique symbolique. Le lemme de transport proposé (les étiquettes sont périodiques si et seulement si les bits le sont) est immédiat, puisque la loi ne fait que propager les bits.

3. **La frontière acquis/ouvert, bien graduée.** Récurrence de **d** démontrable (densité des composés $\rightarrow 1$) ; occurrences infinies de **b** et **c** par Bertrand-Tchebychev ; “**a** apparaît dans la ligne n ” équivaut à Goldbach elle-même (proposition exacte) ; la récurrence syndétique de **a** est strictement plus forte que Goldbach, du même ordre que les formes quantitatives de Hardy-Littlewood (proposition 5, correctement graduée).
4. **Distinction parité / corrélation.** Le blocage n’est pas le problème de parité de Selberg (aucun poids de crible, aucun $\Omega(m) \bmod 2$ en jeu) mais un défaut de contrôle de second moment des corrélations $u_i \leftrightarrow v_i$. Cette autocorrection, explicite dans le document, est rigoureuse et doit être conservée.
5. **Diagnostic adélique.** Le quotient $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}$ (additif, terrain naturel de Goldbach et de la méthode du cercle) est un tore compact classique, sans pathologie ; la géométrie non commutative répare le quotient multiplicatif $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}$ (multiplicatif, source de $\zeta(s)$). L’absence de pont n’est pas un manque d’imagination mais l’absence de pathologie à réparer côté additif.

6.2. Deux corrections à porter

1. **Étiquetage, pas pavage.** Le plan est pavé par une grille carrée *parfaitement périodique* ; seules les étiquettes des cases sont apériodiques. L’objet est donc un *étiquetage apériodique d’un pavage périodique* - infiniment plus banal qu’un pavage de Penrose, où ce sont les formes mêmes qui ne se répètent pas. Comparer à Penrose (et à Connes) n’est pas licite : l’apériodicité observée est exactement celle, élémentaire, des bits de primalité. Titre honnête : “étiquetage apériodique”.
2. **Suppression du passage Zhang-Maynard.** L’affirmation selon laquelle la récurrence syndétique de b ou c serait “connue inconditionnellement via les petits écarts entre premiers” est doublement inexacte. D’une part les résultats de Zhang-Maynard-Tao (il existe une infinité de paires d’écart ≤ 246) portent sur *certain*s écarts, pas sur *tous* ; or la récurrence syndétique exige de borner les gaps entre toutes les occurrences consécutives. D’autre part, les écarts entre nombres premiers consécutifs sont *non bornés* (résultat classique) : une borne uniforme de récurrence syndétique pour b ou c est donc impossible, par principe. L’énoncé correct est celui donné à côté : récurrence infinie (Bertrand), quantifiable par des bornes croissant avec n (bornes effectives classiques sur les écarts).

Remarque [statut du document] : le titre du fichier de septembre 2026, “pourquoi il n’apporte rien de plus”, est rigoureusement fondé - et le document fait mieux que son titre : sa cartographie (récurrence de **d** acquise, **a** = Goldbach, indiscernabilité forte strictement plus forte que Goldbach) est la plus honnête du corpus, et son double désaveu (ce n’est pas Connes ; ce n’est pas non plus le problème de parité) est correct. La recherche littéraire finale (“aucun papier ne tente ce pont”) est une affirmation de l’assistant non vérifiée indépendamment ; elle est plausible mais doit porter cette mention si le document circule.

7. Bilan

1. **Acquis et vérifiés.** La compression des 16 règles en bande rectangulaire ; la paramétrisation $N_{nc}(X) = \binom{k_X}{2}$ et sa décomposition (théorème 2) ; l’équilibre $|n_D - n_U| \leq 1$ (théorème 4) ; l’asymptotique inconditionnelle de k_X ; la correction de claude sur l’énoncé (u_1, v_2) .

2. **À corriger.** Le faux calcul de non-associativité chez claudé ; l'identité $xyx = xy$ chez mistral ; l'incohérence de convention 0/1= premier entre fichiers de juillet ; l'annonce d'indépendance dans l'application de Borel-Cantelli (le premier lemme n'en a pas besoin ; l'obstacle réel est que la suite réelle ne vit dans aucun espace de probabilité du modèle).
3. **Mesuré, verdict propre :** l'entropie du langage sans a (indiscernable d'un brassage aléatoire), et la loi des fluctuations autour de Hardy-Littlewood (quasi-poissonnienne après retrait du biais d'ordre inférieur attendu).
4. **La leçon d'ensemble.** Chaque formalisation (bande, groupoïde, C^* -algèbre, sous-shift) transporte la difficulté sans l'alléger : la difficulté réside dans les corrélations $p \leftrightarrow n - p$, pas dans la structure qui les organise. Les deux expériences numériques de ce document confirment ce diagnostic par l'expérience, et non plus seulement par l'argument.