Essai de formalisation de l'approche proposée pour représenter la primalité à l'aide de mots de Christoffel associés à des hyperboles (Denise Vella-Chemla, 17.2.17)

Pour la définition des mots de Christoffel et l'utilisation qui en est faite ici, se reporter à [1] et [2].

On définit une application, indexée par les entiers, et qui associe elle-même un booléen à chaque entier : $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$. On garde à l'esprit que cette fonction est le reflet d'une fonction f'_n qui à chaque point du plan associe un booléen : $f'_n : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{B}$ et qu'on dispose d'une fonction φ_n qui passe de $\mathbb{N}^2$ à $\mathbb{N}$ et qui est définie par $\varphi_n : (x, y) \longmapsto x-y+n-1$. La fonction booléenne f_n sur les entiers (i.e. les positions successives dans les mots) a comme ensemble de départ l'ensemble d'arrivée de la fonction auxiliaire $\varphi_n(x, y)$ (l'utilisation de la fonction φ est motivé par le fait que les lignes brisées de segments faisant des zig-zags, il faut ordonner totalement les points qu'elles contiennent par leur position).

$f'_n((x, y)) = f_n(\varphi_n(x, y))$ est un booléen qui vaut 0 si $(x + 1)y \leqslant n$ et qui vaut 1 sinon (on peut se représenter cela de deux manières différentes : soit par le fait d'accoler une bande $\mathcal{B}$ de largeur horizontale 1 sur la gauche d'une hyperbole, et d'avoir tous les points dans cette bande qui sont à une altitude de 0 quand tous les autres points du plan sont à altitude 1, une sorte de ravin hyperbolique ; la deuxième représentation imagée peut être de laisser tous les points dans le plan et d'utiliser 2 couleurs, l'une pour les points de la bande et l'autre pour les points hors de la bande).

On considère la moitié supérieure de l'hyperbole d'équation $xy = n$, de pente négative. On approche cette courbe par une suite de points dont les ordonnées sont les entiers décroissants successifs à partir de $n - 1$ et dont les abscisses sont les plus grandes possibles strictement à gauche de l'hyperbole (il n'y a pas de point de contact entre les segments de la ligne brisée reliant les points et l'hyperbole). Le mot de Christoffel de n (cf [1]) est un mot fini sur l'alphabet $\{0, 1\}$ constitué de la suite de lettres associées à des segments-unités reliant des points entiers contigus verticalement (de même abscisse), ces points ayant pour image 0, ou contigus horizontalement (de même ordonnée), ces points ayant pour image 1. Les segments horizontaux sont utilisés pour "ramener la ligne brisée des segments" dans la bande $\mathcal{B}$ à chaque fois qu'elle en est sortie.

Considérons maintenant les fonctions associées à deux nombres entiers successifs f_n et f_{n+1}.

On a vu que le nombre n est premier si son mot de Christoffel se transfère à l'identique dans le mot de Christoffel de $n + 1$, à un décalage d'abscisse près. Il est composé sinon.

Cela correspond à la condition :

$$n \text{ } premier \iff \forall k \in \mathbb{N}, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant k < n, f_n(\varphi_n^{-1}(k)) = f_{n+1}(\varphi_{n+1}^{-1}(k+1)).$$

Le signe "=" entre les images par deux fonctions booléennes (f_n et f_{n+1}) de deux positions dans deux mots est une fonction de $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$.

On peut aussi choisir une représentation par des opérateurs : on peut associer à la lettre a, qu'on a choisi de représenter ci-dessus par le booléen 0, l'opérateur $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui transforme le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tandis qu'on associe à la lettre b (ou booléen 1) l'opérateur $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui transforme le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bibliographie :

[1] Jean Berstel, Aaron Lauve, Christophe Reutenauer, Franco Saliola, *Combinatorics on Words : Christoffel Words and Repetitions in Words*, 2008.

[2] Denise Vella-Chemla, *Hyperboles et mots*, février 2017.