Traduction d'une interview de
Alain Connes
par
Catherine Goldstein et Georges Skandalis

L'entretien a été réalisé par Catherine Goldstein et George Skandalis, à Paris.

La première partie est parue dans le numéro 63, p. 25 à 30 de la Newsletter.
https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2007-03-63.pdf.

La deuxième partie est parue dans le numéro 67, p. 29 à 33 de la Newsletter.
https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2008-03-67.pdf

Y a-t-il des mathématiciens du passé dont vous vous sentez proche ?

Proche, je ne dirais pas mais il y en a un que j'admire en particulier : Galois. Il y a une caractéristique très frappante dans ses écrits ; leur formulation est très simple. Par exemple, "Prenez une équation avec n racines différentes. Puis, première affirmation, il existe une fonction rationnelle de ces racines qui prend $n!$ différentes valeurs lorsque vous permutez les racines ; et, deuxième déclaration, les racines sont des fonctions rationnelles de cette fonction". Malgré la simplicité trompeuse de leur formulation, en utilisant ces déclarations Galois réussit à aller extrêmement loin. Il écrit l'équation dont les racines sont les $n!$ différentes valeurs de la fonction rationnelle, il la divise en facteurs irréductibles, il écrit comment les racines de l'équation originale dépendent des racines de ces facteurs et il voit un groupe. Et il montre que ce groupe est indépendant de tous les choix faits en cours de route ... Pour y parvenir, il caractérise le groupe abstraitement par une propriété unique : "Une fonction des racines est rationnellement déterminée si et seulement si elle est invariante par ce groupe". C'est si simple. Je trouve fabuleux ce genre de saut utilisant le pouvoir de l'abstraction, ce saut immense dans la conceptualisation des choses. Le pouvoir de l'intuition de Galois n'est pas basé sur l'idée de symétrie mais sur un concept d'ambigüité. Naïvement, on pourrait dire qu'il a étudié le groupe d'invariance de certaines fonctions. Mais la première étape que Galois met en œuvre est tout le contraire : il casse autant que possible la symétrie en choisissant une fonction qui n'a aucune invariance du tout. Les mathématiciens avant lui - Cardano, Lagrange - ont travaillé avec les fonctions symétriques des racines. Galois, sur les traces d'Abel, fait le contraire : il choisit une fonction avec le moins de symétrie possible. Et c'est la fonction avec laquelle il commence. Ce qui me frappe, c'est la fécondité de ces idées ; les différents formalismes que nous avons développé pour les attraper n'épuisent pas encore leur puissance. Les idées de Galois ont une clarté, une légèreté, un potentiel de réflexion qui reste non encore bien apprivoisé à ce jour et elles trouvent un écho dans l'esprit des mathématiciens jusqu'à maintenant. Elles ont engendré de grands concepts comme les catégories Tannakiennes ou la correspondance Riemann-Hilbert ... Ces idées sont très jolies mais elles sont souvent présentées avec une telle pédanterie qu'elles ressemblent à des jougs lourds et on n'a pas l'impression qu'elles ont été libérées comme l'ont été les idées de Galois. Les autres avatars des idées de Galois sont la théorie différentielle de Galois et la théorie des motifs, qui peut être considérée comme un analogue en dimension supérieure de la Théorie de Galois. Mais avons-nous vraiment compris ce que Galois avait en tête quand il écrit : "Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambigüité. Il savait voir a priori dans une relation entre des quantités ou des fonctions transcendantes quels échanges pourraient se faire, quelles quantités pourraient se substituer aux quantités de données sans que la relation puisse cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore assez développé sur ce terrain qui est immense.". Il existe d'autres exemples de mathématiciens qui m'ont vraiment aidé à un stade précoce en tant que source d'inspiration. Ce n'est pas que je me sente proche d'eux dans ce que je fais, mais j'admire ce qu'ils font. Au début, j'étais fasciné par Jacobi parce que j'ai trouvé sa façon de calculer merveilleuse. Et par von Neumann - la profondeur de ce qu'il avait découvert et la façon dont il en parlait ... Et par Tomita bien sûr. J'étais fasciné par la personnalité mystérieuse de Tomita ; c'est quelqu'un qui a réussi à éviter tous les pièges que la société tend à poser à quelqu'un d'extrêmement original. Il est devenu sourd à l'âge de deux ans. Quand il a commencé ses recherches, son directeur de thèse lui a donné un énorme livre en lui disant : "et revenez me voir une fois que vous aurez lu ce livre.”. Tomita a rencontré accidentellement son tuteur de thèse deux ans plus tard et ce dernier lui a demandé : “Comment va le livre ?”, à quoi Tomita a répondu, “Oh, je l'ai perdu après une semaine”... Mais je pense que la source la plus fraîche, la plus limpide, c'est Galois. C'est très bizarre mais je n'ai jamais séparé Galois de ce puissant mélange de simplicité et de fécondité.

Voulez-vous dire quelque chose sur Choquet ?

Je me souviens des premières années où je faisais de la recherche ; je travaillais seul à la maison, mais tous les jeudis, j'assistais au séminaire de Choquet. Et il brillait par sa sagesse, son esprit. Il y avait des questions qui éclataient, c'était extrêmement ouvert. Cela m'a façonné en profondeur. Et Choquet avait quelque chose d'unique : il avait été très proche de l'école polonaise de mathématiques avant la guerre. Et donc il savait beaucoup de choses qui ne font pas partie du programme habituel des mathématiciens, mais qui sont en fait assez intéressants.

Ce n'est qu'avec Choquet par exemple que j'ai appris la théorie des ordinaux. Vous pourriez penser que cette théorie est inutile, mais c'est absolument faux. Par exemple, je me souviens d'une fois, l'IHES avait une journée portes ouvertes. Il y avait une classe de première année, des petits enfants, et parmi eux une fille avec une intelligence brillante. Et donc, après que le sujet de l'indécidabilité a été soulevé, je leur ai donné un exemple tiré de la théorie des ordinaux, de l'histoire du lièvre et de la tortue. Vous prenez un nombre N, pas trop grand (ils en avaient pris 5 ou quelque chose comme ça). Ils avaient appris à écrire des nombres dans différentes bases : 2, 3, etc. Je leur ai expliqué que l'on écrit le nombre en base 2, puis le lièvre vient et remplace tous les 2 par 3. Ainsi $5 = 2^2 + 1$ est remplacé par $3^3 + 1 = 28$ ..., et la tortue soustrait juste 1. Ensuite, on écrit le résultat en base 3 et le lièvre vient et remplace tous les 3 par des 4 et la tortue soustrait à nouveau 1, etc. Eh bien, le phénomène extraordinaire qui vient de la théorie des ordinaux est que la tortue gagne. Après un nombre fini d'étapes et même si vous avez l'impression que le lièvre fait des sauts absolument gigantesques chacun, au bout d'un certain temps, vous obtenez 0 !

Et ce qui est difficile à croire, c'est que cela ne peut pas être prouvé dans le cadre de l'arithmétique de Peano. La preuve utilise la théorie des ordinaux ! Vous pouvez en fait montrer que le nombre d'étapes nécessaires avant que la tortue est plus rapide que n'importe quelle fonction de N, vous pouvez l'écrire explicitement.

Vous pouvez voir sur l'ordinateur combien d'étapes il faut pour atteindre 0. Mais la preuve que la tortue nécessite d'utiliser la théorie des ordinaux. Que faire ? Vous prenez le premier numéro et au lieu de remplacer le 2 par 3, puis par 4, etc., vous les remplacez par l'ordinal ω. Par exemple 5 est $2^2 + 1$, vous écrivez donc $\omega^\omega + 1$. Ceci est un ordinal et un ordinal est un ensemble bien ordonné et chaque séquence d'ordinaux décroissante s'arrête nécessairement. Maintenant, quand vous faites le mouvement du lièvre, cela ne change rien, mais la tortue soustrait 1, et vous obtenez de cette façon une décroissance, une séquence d'ordinaux strictement décroissante. Cela doit cesser et vous en avez la preuve. Et la preuve utilise ω... il n'est donc pas si surprenant qu'elle dépasse l'arithmétique de Peano. C'est typique du genre de choses dont nous discutions au séminaire de Choquet.

Et c'est une culture mathématique en partie oubliée, mais qui est en fait extrêmement riche. Nous vivons dans un monde mathématique qui est de plus en plus plus monoculturel. Nous proclamons des principes pour dire quelles mathématiques sont importantes et lesquelles ne le sont pas. J'essaie de défendre la diversité. Je crois qu'il est crucial de laisser les écoles fleurir. Ceci est très important pour la santé des mathématiques.

Algèbres d'opérateur et coïncidences : comment tout a commencé ?

En 1970, je suis allé à l'école d'été des Houches [en physique], envoyé par Choquet. A cette époque, je travaillais sur l'analyse non standard mais après un certain temps, j'avais trouvé une faille dans la théorie... Le fait est que dès que vous avez un nombre non standard, vous obtenez un ensemble non mesurable. Et dans le séminaire de Choquet, ayant bien étudié l'école polonaise, nous savions que chaque ensemble que vous pouvez nommer est mesurable. Il semblait donc tout à fait voué à l'échec d'essayer d'utiliser l'analyse non standard pour faire de la physique. Mais ça me convenait comme passeport aux Houches en 1970. Et de là, j'ai été embauché comme camarade au Battelle Institute et j'ai reçu une invitation pour me rendre à Seattle. Je l'ai accepté surtout pour visiter les États-Unis, je n'ai même pas regardé le programme. Et la coïncidence qui s'est produite, c'est que je me suis arrêté à Princeton pour rendre visite à mon frère et j'ai acheté un livre, au hasard, à la librairie de Princeton. J'ai hésité entre plusieurs livres jusqu'à ce que je tombe sur celui qui m'a fasciné, par Takesaki sur la théorie de Tomita. Et comme je savais que j'allais faire un long voyage en train, j'ai acheté le livre. Et j'ai contemplé le livre - je ne peux pas dire que je l'ai lu, c'était vraiment trop dur - pendant le voyage à travers les plaines du Middle-West. Et la coïncidence encore plus extraordinaire fut que, lorsque je suis arrivé à Seattle, le premier jour où je suis allé voir le programme de la conférence, il y avait des conférences de Takesaki sur la théorie de Tomita. A partir de ce jour, je me suis dit : "Ca y est, je ne vais à aucune autre conférence, juste à celle de Takesaki ".

Ce n'est pas une attitude très scientifique...

Non, et d'ailleurs à cette époque j'étais fasciné par tout ce qui était japonais ; c'était plus au niveau d'une sensibilité à quelque chose de totalement différent, que je ne connaissais pas du tout ... S'il y a une leçon à tirer, c'est que cela m'a conduit complètement hors du cercle d'idées dans lequel j'étais absorbé à l'époque. Et à ce moment-là, il y a eu une autre coïncidence, de sorte que quand je suis revenu, j'ai encore eu un coup de chance incroyable. J'avais compris un peu de la théorie de Tomita, un peu ; je n'ai pas pu faire de recherche. Mais quand je suis revenu, je me suis dit que j'irais au séminaire à Paris qui traite des algèbres d'opérateurs. Je suis donc allé au séminaire Dixmier et la première fois que j'y suis allé, c'était la réunion d'organisation ; le thème principal de l'année devait être les Araki-Woods travaillant sur des produits tenseurs infinis. Dixmier distribuait les papiers parmi les participants, un peu au hasard. Il n'en restait plus qu'un ; j'ai levé la main. En rentrant chez moi dans le RER [train de banlieue], je m'ennuyais. J'ai regardé un peu le papier qui m'avait été remis, puis j'ai été vraiment ramené en arrière. J'ai réalisé que dans cet article, il y avait des formules qu'il aurait fallu être un idiot complet pour ne pas voir comme étant identiques, comme correspondant exactement à celles de la théorie de Tomita. Et ces formules disaient qu'un certain vecteur était un vecteur propre pour l'opérateur défini par Tomita. Une heure après mon arrivée à la maison, j'ai écrit une lettre à Dixmier disant : "Voici les Araki-Woods et voici la théorie de Tomita". Vous pouvez voir que l'on peut obtenir les premiers invariants de l'intersection des spectres des opérateurs de Tomita et je lui ai donné les formules. Et comme j'avais été élevé par Choquet, j'ai écrit tout cela en une demi-page. Dixmier a immédiatement répondu : "Ce que vous écrivez est totalement incompréhensible, j'ai besoin de détails". Et donc j'ai réécrit trois pages de détails, ce qui n'était pas difficile, expliquant qu'on pouvait définir un invariant que j'ai appelé S *. Dixmier m'a fixé un rendez-vous pour que j'assiste à son prochain séminaire. Je suis allé le voir et tout ce qu'il a dit alors, c'était "Foncez !", qui en français est une forme forte de "Allez-y !". C'était le point de départ. J'ai vraiment eu une chance incroyable ; ce n'était pas vraiment difficile. Mais pas exactement écrit noir sur blanc, c'était là dans les formules. C'est sûr que si j'étais resté à Paris, si je ne m'étais pas éloigné de mon cercle, j'aurais continué à travailler dans une direction étroite et je n'aurais pas été ouvert à des horizons totalement différents. J'ai vraiment eu cette impression à ce moment-là de prendre une bouffée d'air frais qui m'a permis d'accéder à une partie plus centrale des mathématiques. J'ai souvent eu l'impression qu'il y avait des cercles concentriques dans le monde mathématique, que l'on commence à travailler dans une partie totalement excentrique et qu'on essaie de se rapprocher progressivement du cœur.

Quel est ce cœur ? Est-ce subjectif ?

Ce que je veux dire par cœur des mathématiques, c'est cette partie qui est inter-connectée à pratiquement toutes les autres. Un peu comme tous les chemins mènent à Rome. Ce que je veux dire, c'est que lorsque l'image mentale que vous obtenez d'un sujet mathématique devient de plus en plus précise, vous vous rendez compte en fait que quel que soit le sujet par lequel vous commencez, si vous le regardez suffisamment précisément, après un certain temps, il converge vers ce cœur : formes modulaires, fonctions L, arithmétique, nombres premiers, toutes sortes de choses liées à cela. Ce n'est pas que ces choses soient plus difficiles et je détesterais suivre le mauvais exemple dont je parlais avant de poser des sujets excentriques. Ce que je veux dire, c'est que si vous marchez assez longtemps, vous êtes obligé d'aller vers ces domaines, vous ne pouvez pas rester à l'extérieur. Si vous le faites, c'est un peu par peur. Vous pouvez réussir à faire beaucoup de choses en affinant les techniques dans un sujet donné, mais à moins que vous ne continuiez résolument à aller vers le cœur, vous vous sentez laissé dehors. C'est très étrange et sûrement subjectif.

Dans vos recherches, vous avez obtenu des résultats brillants : vous avez cité plus tôt la découverte de l'invariant S. Il y a aussi le cas des

*. l'intersection des spectres de tous les opérateurs modulaires

2×2 cocycles et autres qui vous ont coûté des efforts considérables

Bien sûr. Cette astuce matricielle 2×2 qui est d'une simplicité absolue [†] est venue en effet pour moi tout d'un coup, mais seulement après avoir passé trois mois à faire d'horribles calculs ; je faisais des calculs concrets de morphismes modulaires d'automates à états quasi-périodiques, etc. En fait, avant de découvrir cette propriété de cocycle, je l'avais rencontré par expérience. L'astuce de la matrice 2 par 2 est venu à moi par hasard dans un flash, mais parce que le sol avait été préparé par des tonnes et des tonnes d'exemples, des tonnes et des tonnes de calculs. Mon impression, c'est que je n'ai jamais rien obtenu à bas prix. Tous mes résultats ont été précédés de préparatifs - mise en place des travaux, une très longue expérimentation - en espérant qu'à la fin de cette expérimentation, une idée incroyablement simple se produise qui vienne et résolve le problème. Et puis vous devez passer par la période de vérification, presque intolérable à cause de la peur que vous avez de vous être trompé. Je ne laisserai jamais personne croire que tu peux attendre comme ça jusqu'à ce que les résultats viennent tout seuls. J'ai passé tout l'été [de 2006] à vérifier un formule qui donne le modèle standard couplé à la gravitation dans notre travail commun avec Chamseddine et Marcolli. Le calcul est monumental : dans le modèle standard, il y a quatre pages de termes avec des coefficients 1/8, 1/4, de sinus ou cosinus de l'angle de Weinberg... et si vous n'avez pas vérifié toutes les choses avec tous les coefficients, vous ne pouvez pas prétendre que le calcul donne le bon résultat. J'ai trouvé des coefficients différents de ceux du livre de Veltman, ce qui m'a obligé à refaire encore et encore ces calculs jusqu'à ce que Matilde Marcolli [avec qui j'écris un livre] se rende compte que les coefficients que nous avions étaient les bons et avaient été corrigés par Veltman dans sa deuxième édition ! Il y a toujours cette peur permanente de l'erreur qui ne s'améliore pas au fil des ans. Et il y a cette partie du cerveau qui est sans cesse en train de vérifier et qui émet en douceur des signaux d'avertissement. J'ai eu des peurs obsédantes à propos de ça. Par exemple, il y a quelques années, j'ai rendu visite à Joachim Cuntz en Allemagne et dans le train du retour, j'ai regardé un exemple un peu bizarre de mon travail avec Henri Moscovici sur le théorème de l'indice local. J'avais pris une valeur particulière du paramètre et je me suis convaincu dans le train que le théorème ne fonctionnait pas. Je suis devenu une épave - j'ai vu cela aux

†. Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann, CR Acad. Sci. Paris, Sér. AB, 274, 1972.

yeux des gens que j'ai croisés dans le train de banlieue pour rentrer à la maison. J'avais l'impression qu'ils lisaient un tel désespoir en moi, ils voulaient aider... De retour chez moi, j'ai essayé de manger mais je ne pouvais pas. Enfin, prenant mon courage à deux mains, je me suis rendu à mon bureau et j'ai refait les vérifications. Et il y a eu un miracle qui a fait que le théorème marchait dans ce cas... J'ai eu plusieurs épisodes très pénibles comme celui-ci.

Concernant l'heuristique : vous avez écrit plusieurs fois que la géométrie est du côté de l'intuition. En revanche, les formules semblent jouer un rôle de premier plan dans votre façon de travailler.

Ah, oui, absolument. Je peux penser beaucoup mieux à une formule qu'à un objet géométrique parce que je ne crois jamais qu'une image géométrique, un dessin soit suffisamment générique. Je n'ai pas vraiment un esprit géométrique. Quand j'ai un problème de géométrie et que je réussis à le traduire en algèbre, alors c'est beau. Il y a plusieurs étapes : d'abord la traduction, puis la façon de s'appuyer sur la pensée algébrique. J'essaie toujours de distinguer le côté intuitif (le géométrique) et le linguistique (l'algébrique) dans lequel on manipule les formules, et je pense beaucoup mieux de ce côté. Pour moi, l'algèbre se déroule dans le temps : je peux voir une formule vivre et tourner et exister dans le temps, tandis que la géométrie a quelque chose d'instantané et j'ai beaucoup plus de difficulté avec elle. En ce qui me concerne, les formules créent des images mentales.

Vous donnez souvent l'impression que vous aimez les calculs.

Absolument. Ma pensée mathématique dépend fortement des calculs. Mais, bien sûr, calculer ne suffit pas. Ensuite, il faut interpréter les choses au niveau conceptuel. Galois était l'un des premiers à comprendre que l'on peut faire face à un calcul même si ce dernier n'est pas réalisable dans la pratique. Par exemple, prenez une équation de degré sept ; le polynôme que Galois associe a le degré $7!$ Et il faut le factoriser. Ce que Galois dit : "Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est selon moi, la mission des géomètres futurs ", c'est qu'il faut sauter au-dessus des calculs, les organiser en fonction de leur difficulté. On devrait les faire, mais seulement comme une expérience de pensée dans son esprit, pas d'une manière concrète. Dans l'exemple de Galois, vous pouvez donner une fonction explicite f des racines d'une équation $E = 0$ qui prend $n!$ valeurs différentes lorsque vous permutez les racines, vous prenez simplement une forme linéaire avec un coefficient rationnel générique. Vous pouvez ensuite aller de l'avant et exprimer les racines de $E = 0$ comme des fonctions rationnelles de f ; cela peut être fait par l'algorithme d'Euclide et par élimination. On peut utiliser l'ordinateur, et l'expression qu'on obtient est terriblement compliquée, même lorsque l'équation de départ $E = 0$ a le degré 4 ou 5. Si vous essayiez de mettre en œuvre les calculs concrètement, vous vous perdriez rapidement dans le complexité des résultats. Au contraire, ce que vous devez pouvoir faire, c'est les exécuter de manière abstraite et construire des objets mentaux qui représentent les étapes intermédiaires et les résultats à un niveau idéalisé. Je procède toujours de la manière suivante. Quelle que soit la complexité du problème, au lieu de l'essayer d'abord sur un morceau de papier avec un crayon, je sors me promener et essaie d'avoir tous les ingrédients présents dans mon esprit, afin de commencer à les manipuler mentalement. Ce n'est qu'après cet exercice que je peux voir clairement, penser aux différentes étapes et commencer à obtenir une image mentale. C'est un processus douloureux qui consiste à rassembler dans votre esprit, dans votre mémoire, tous les éléments du problème, afin de commencer à les manipuler. C'est un exercice que je recommande, eh bien, bien sûr, différentes personnes fonctionnent différemment, si l'on veut pouvoir ne pas dépendre du papier et du crayon. Parce qu'avec du papier et un crayon, vous êtes tenté de commencer à écrire immédiatement et si vous ne l'avez pas pensé assez longtemps avant, vous n'irez nulle part. Vous serez découragé avant d'avoir eu le temps de créer dans la partie linguistique du cerveau les images mentales spécifiques que vous pouvez ensuite manipuler, comme d'habitude, en les zippant, en les transformant en quelque chose de plus petit, puis en vous déplaçant autour d'elles. Si vous faites des calculs, il est essentiel d'éviter les erreurs. Il existe des moyens de vérifier, par exemple en utilisant différents chemins vers le même résultat. On peut aussi voir si le résultat d'un calcul semble correct ou non. Je me rappelle quand je travaillais avec Michel Dubois-Violette, on avait une somme de 1440 intégrales, dont chacune était l'intégrale sur une période d'une fonction rationnelle de fonctions thêta et de leurs dérivées. Nous nous attendions à ce que la somme ait une factorisation. En effet, nous avons trouvé un résultat simple qui était un produit de formes, fonctions elliptiques, etc. Lorsque vous trouvez qu'une énorme somme comme celle-ci donne un produit, vous vous sentez plutôt confiant qu'aucune erreur n'a été commise en cours de route.

La géométrie non-commutative

Qu'est-ce que la géométrie non-commutative ? À votre avis, "géométrie non-commutative", est-ce tout simplement un meilleur nom pour Algèbres d'opérateurs ou en est-ce un domaine proche mais distinct ?

Oui, il est important d'être plus précis. Premièrement, la géométrie non-commutative est pour moi cette dualité entre géométrie et algèbre, avec une coïncidence frappante entre les règles algébriques et les règles linguistiques. Le langage ordinaire n'utilise jamais de parenthèses à l'intérieur des mots. Cela signifie que l'associativité est prise en compte, mais pas la commutativité, ce qui permettrait de permuter les lettres librement. Avec les règles commutatives, mon nom apparaît 4 fois dans le message cryptique qu'un ami m'a envoyé récemment : "Je suis alenconnais, et non alsacien. Si t'as besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin annales. Qui suis-je ? " La commutativité brouille donc les choses. Dans le monde non-commutatif, qui se manifeste en physique au niveau des systèmes microscopiques, les simplifications provenant de la commutativité ne sont plus autorisées. C'est la différence entre la géométrie non-commutative et la géométrie ordinaire, dans laquelle les coordonnées commutent. Il y a quelque chose d'intrigant dans le fait que les règles d'écriture des mots coïncident avec les règles naturelles de manipulation de l'algèbre, à savoir l'associativité mais pas la commutativité. Deuxièmement, pour moi, le passage au non-commutatif est exactement le passage d'un espace complètement statique dans lequel les points ne se parlent pas, à un espace non-commutatif, dans lequel les points commencent à être liés les uns aux autres, comme objets d'une catégorie. Lorsque certains points sont liés les uns aux autres, ils peuvent être représentés par des matrices du côté algébrique, exactement de la même manière qu'Heisenberg a découvert la mécanique matricielle des systèmes microscopiques. On ne va pas très loin si on reste à ce niveau strictement algébrique, avec des manipulations de lettres... et le véritable point de départ de la géométrie non-commutative est l'algèbre de von Neumann. Ce qui m'a vraiment convaincu que cette algèbre d'opérateurs est un champ très fertile, c'est quand je me suis rendu compte - à cause d'une astuce matricielle sur les matrices 2×2 - qu'une algèbre d'opérateur non-commutative évolue avec le temps !

Elle admet un flux canonique d'automorphismes extérieurs et en particulier elle a des "périodes" ! Une fois que vous comprenez cela, vous vous rendez compte que le monde non-commutatif au lieu d'être seulement une pâle réflexion, une généralisation dénuée de sens du cas commutatif, admet des caractéristiques totalement nouvelles et inattendues, comme cette génération du flot de temps à partir de la non-commutativité. Cependant, je n'identifie pas la géométrie non-commutative avec les algèbres d'opérateurs ; ce champ a sa propre vie. De nouveaux phénomènes sont découverts et il est très important important d'étudier les algèbres d'opérateurs en soi - j'ai passé une grande partie de ma vie faire ça. Mais d'un autre côté, les algèbres d'opérateurs ne capturent que certains aspects d'un espace non-commutatif, et la "seule" algèbre de von Neumann commutatif est $L^\infty[0;1]$! Pour être plus précis, les algèbres de von Neumann capturent uniquement la théorie de la mesure, et les C-algèbres de Gelfand la topologie. Et il y a beaucoup plus d'aspects dans un espace géométrique : la structure différentielle et surtout la métrique. La géométrie non-commutative peut être organisée en fonction de la caractéristique qualitative que vous examinez lorsque vous analysez un espace. Mais, bien sûr, en tant que corps vivant, vous ne pouvez isoler aucun de ces aspects des autres sans détruire son intégrité. Un aspect sur lequel j'ai travaillé le plus dur ces derniers temps est un changement de paradigme qui s'impose à vous du fait de la non-commutativité : cet aspect porte sur l'aspect métrique, la mesure des distances. C'est là que l'opérateur de Dirac joue un rôle. Au lieu de mesurer efficacement les distances en empruntant le chemin le plus court d'un point à un autre, vous êtes amené à un double point de vue, auquel vous êtes contraint lorsque vous faites de la géométrie non-commutative : la seule façon de mesurer les distances dans le monde non-commutatif est spectrale. Elle consiste simplement à envoyer une onde d'un point a à un point b puis de mesurer le décalage de phase de la vague. De manière amusante, ce changement de paradigme a déjà eu lieu dans le système métrique, alors que dans les années 60, la définition de l'unité de longueur, qui était autrefois une vraie barre métallique, a été remplacée par la longueur d'onde d'une raie spectrale. Donc, le changement qui vous est imposé par la géométrie non-commutative s'est déjà produite en physique. Ceci est un exemple typique où la généralisation non-commutative correspond à un changement brusque même dans le cas commutatif. J'ai réalisé récemment que la seule information dont nous disposions sur l'univers très éloigné est spectrale. Je n'avais pas compris que le "red shift" n'est pas un décalage de fréquence mais une mise à l'échelle des fréquences. Si vous regardez assez loin dans l'univers, les fréquences sont divisées par un facteur allant jusqu'à 1000. C'est incroyable. Et vous le voyez uniquement d'une manière spectrale.

Ce point-de-vue spectral est celui qui ressort des expériences lorsque vous étudiez l'univers ; ce n'est pas un fantasme. Et c'est un point de vue obligatoire lorsque vous essayez de regarder un espace géométrique du point de vue de la géométrie non-commutative. De ce point de vue, on est conduit très naturellement au principe d'action spectrale qui permet d'encoder géométriquement en un mot la trés grande complexité du modèle standard couplé à la gravité. Ce qui se produit c'est simplement que l'espace-temps admet une structure fine, un peu comme les spectres atomiques, et n'est ni un continuum ni un espace discret mais un mélange subtil des deux. Dans le livre que j'écris avec Matilde Marcolli, les trois cents premières pages concernent la physique : nous développons le modèle standard et la renormalisation, liés aux motivations et aux groupes de Galois, et les trois cents dernières pages concernent la fonction zêta : sa réalisation spectrale et la brisure spontanée de symétrie des systèmes arithmétiques. Nous arrivons à la fin de la rédaction du livre et nous découvrons que, de façon assez surprenante, il existe une relation profonde entre les deux parties a priori déconnectées du livre. En fait, il y a une analogie, une table de conversion, entre le formalisme de la brisure spontanée de symétrie qui est utilisée pour les systèmes arithmétiques, les fonctions zêta, les systèmes doubles, etc., et un formalisme qui semble extrêmement tentant pour les gens qui consiste à essayer de quantifier la gravité. En établissant ce dictionnaire, nous avons découvert dans la littérature que la notion d'état KMS, qui joue un rôle fondamental dans nos travaux sur la rupture de symétrie pour les systèmes arithmétiques, joue également un rôle dans la rupture de symétries des interactions électrofaibles qui donnent leur masse aux particules dans le modèle standard. Cela nous permet d'aller plus loin dans l'analogie et suggère que les gens qui essaient de développer la gravité quantique dans un espace fixé sont sur la mauvaise voie. Nous savons que l'univers s'est refroidi ; eh bien, cela suggère que lorsque l'univers était plus chaud, disons, à la température de Planck, il n'y avait aucune géométrie du tout, et c'est seulement après la transition de phase qu'une rupture de symétrie spontanée a sélectionné une géométrie particulière et donc l'univers particulier dans lequel nous sommes. C'est quelque chose auquel nous n'aurions jamais pensé - nous n'aurions jamais eu cette idée - si notre livre n'avait pas été écrit avec les deux textes parallèles. Bien sûr, il n'y a aucun point où une partie utilise ou s'appuie vraiment sur l'autre - mais vous pouvez voir une analogie émerger entre les deux parties. Comme André Weil l'a souligné, ce type de similitude mystérieuse est l'une des choses les plus fertiles en mathématiques. L'esprit humain est toujours en avance sur l'ordinateur, car pour le moment et pour longtemps j'espère, il détecte des analogies entre des théories qui ont un contenu assez différent mais dans lesquelles le même genre de phénomènes apparaît. La traduction ne sera jamais littérale et il y aura toujours deux textes écrits dans deux langues différentes et il n'y aura jamais de correspondance un à un entre les mots d'une langue et les mots de l'autre. Mais il y aura ces étranges indices qui pourrait bien s'évaporer si vous essayez de vous précipiter et de les écrire trop précisément. Il y a des boîtes qui sont très bien comprises d'un côté - et non comprises du tout de l'autre. Même si elle ne fournit pas de clé pour ouvrir quelque chose, elle relie ; cela nous oblige à penser de l'autre côté. C'est vrai que le nom de "géométrie non-commutative" est un peu malheureux car il contient ce "non", cette négation. L'important est de le considérer comme "non nécessairement commutative ", de manière à inclure la partie commutative. Nous aurions pu lui donner 36 autres noms. Un nom qui aurait été mieux pour la partie riemannienne est "géométrie spectrale". Ce que cette géométrie montre si bien, c'est que toutes les choses que nous percevons sont spectrales, que les voir du point de vue de la théorie des ensembles n'est pas le bon point de vue. Nous aurions pu utiliser différents noms, mais certainement pas "quantique".

Pourquoi ?

Parce que dans le mot "quantique" il y a une perversion, c'est-à-dire que les gens comprennent que le mot "quantique", depuis le début, n'est pas tellement "non-commutatif" mais plutôt "entier". Dans le mot "quantique", il y a vraiment cette découverte par Planck de la formule pour le rayonnement du corps noir, dont il a compris que l'énergie devait être quantifiée en quanta de $\hbar\nu$. De là découle une terrible confusion, créée par des gens qui font de la théorie de la déformation, qui croient que quantifier une algèbre signifie simplement la déformer en un espace non-commutatif. Ils prennent un espace commutatif et comme ils déforment le produit dans une algèbre non-commutative, ils croient qu'ils quantifient. Mais c'est complètement faux. Vous ne réussissez à quantifier un espace que si vous déformez dans une algèbre très spécifique : l'algèbre des opérateurs compacts. Et puis, il y a une intégrale, l'intégrale de l'indice de Fredholm. L'utilisation d'un vocabulaire incorrect crée de la confusion et n'aide pas à comprendre. C'est pourquoi j'hésite tellement à utiliser le mot "quantum" - cela semble plus flashy, peut-être, mais la vérité, c'est que vous faites quelque chose de quantique seulement dans des cas très particuliers, sinon vous faites quelque chose de non-commutatif, c'est tout. Ensuite, cela peut être moins à la mode du point de vue linguistique, mais peu importe - on est beaucoup plus proche de la réalité.

Qu'est-ce qui est le plus important pour vous dans votre travail mathématique : l'unité ou l'évolution ?

C'est difficile de décider. Chaque mathématicien a une sorte de fil d'Ariane qu'il ou elle suit de son point de départ et qu'il ou elle doit absolument essayer de ne pas casser. Il y a donc une unité, une sorte de trajectoire, ce qui vous fait partir d'un endroit, et parce que vous avez commencé là, dans un endroit un peu bizarre et spécial, vous avez une certaine originalité, une certaine perspective, différente de celle des autres. Et c'est essentiel, sinon vous mettez tout le monde dans le même moule - tout le monde aurait le mêmes réactions aux mêmes questions. Ce n'est pas ce que nous voulons ; nous voulons différentes personnes qui ont leurs propres approches, leurs propres méthodes. Donc là on voit une unité dans la trajectoire, qui n'est pas du tout l'unité des mathématiques. L'unité des mathématiques, vous la découvrez petit à petit, quand vous réalisez que des trajectoires extrêmement différentes, de personnes extrêmement différentes, se rapprochent d'un même cœur vibrant de mathématiques. Mais ce que j'ai ressenti avant tout, c'est l'unité, la fidélité à une trajectoire.

Parmi les résultats que vous avez obtenus, y en a-t-il un dont vous êtes le plus fier ?

Être un scientifique est (en ce qui me concerne) une activité assez humiliante et je ne tiens pas à montrer de la fierté pour un résultat. J'ai tendance à être méfiant des personnes arrogantes. En fait, ce qui m'importe vraiment, c'est le plaisir de la découverte par opposition à l'appréciation du résultat par la communauté. La quantité de joie que l'on obtient, le "coup de pied" est bien sûr assez variable et pourtant, juste pour essayer de répondre à votre question, le lien entre la renormalisation et la décomposition de Birkhoff, que nous avons trouvé en 99 dans notre travail conjoint avec Dirk Kreimer m'a donné un super coup de pied qui a duré plus d'une semaine. J'avais l'habitude de me comporter d'une manière fière, comme un enfant, jusqu'à ce que j'aie atteint l'âge de dix ans, quand j'ai été envoyé chez les scouts par mes parents. J'ai atterri dans un groupe difficile et ils m'ont appris, un jour, par une "moquerie du groupe" de moi-même qu'ils ne pouvaient pas acheter mon attitude fière. Depuis, je suis, comme les taureaux de la corrida après la séance avec les picadors, toujours debout avec un dos légèrement plié.

Suite à votre quête mathématique depuis les années 70, on a l'impression que vous avez toujours été fasciné par la physique - et la fonction zêta.

Absolument. Ma fascination pour la fonction zêta de Riemann vient de ma lecture du travail de Weil sur sa reformulation en termes d'idèles des formules explicites de Riemann qui relient les zéros de la fonction zêta à la répartition des nombres premiers. Il existe une analogie frappante entre les "nombres premiers" d'un côté dans cette formule et les contributions ponctuelles fixes dans une formule de Lefschetz et le premier problème est de trouver un espace X sur lequel agissent les idèles tel que la formule explicite de Riemann-Weil devient une formule de trace. À certains points, après avoir lu un article de Victor Guillemin sur les feuillages et la formule de trace de Selberg, j'ai réalisé que l'espace X devrait être un espace de feuilles d'un feuilletage et donc un espace non-commutatif. Je suis resté fasciné par cette idée pendant dix ans jusqu'au jour où, après être allé à une conférence à Seattle sur la fonction zêta de Riemann, j'ai réalisé que l'espace X était déjà présent dans mon travail sur la mécanique statistique quantique avec Bost, et est tout simplement l'espace des classes d'adèles, le quotient de l'espace d'adèles par l'action du groupe multiplicatif groupe du champ. Cela donne une interprétation explicite des formules de Riemann-Weil de la théorie des nombres comme formule de trace ainsi que la réalisation spectrale des zéros comme spectre d'absorption.

Merci à Jim Ritter pour son aide linguistique.

On est encore loin de donner les informations pertinentes sur la localisation des zéros mais cela donne un cadre géométrique dans lequel on peut commencer à transposer la preuve de Weil pour le cas des champs globaux de caractéristique positive. Dans notre travail conjoint avec Katia Consani et Matilde Marcolli, nous avons maintenant montré comment comprendre la réalisation spectrale d'un point de vue cohomologique, compatible avec la théorie de Galois. Ce qui ressort en particulier, c'est que, comme je l'ai expliqué dans la première partie de l'interview, les espaces non-commutatifs engendrent leur propre temps, cette nouvelle fonctionnalité dynamique permet de les refroidir et d'obtenir de cette façon, lorsque la température descend à zéro, un ensemble de points classiques. De plus, on peut affiner ce processus thermodynamique et obtenir l'analogue des points sur les extensions algébriques du corps des résidus, et ceux-ci sont organisés de la même manière que les points d'une courbe sous l'action de Frobenius dans le cas des caractéristiques positives. C'est un grand défi pour la géométrie non-commutative de développer maintenant les outils conceptuels généraux permettant de transposer la preuve de Weil de la géométrie algébrique à notre cadre analytique.

Ma fascination pour la physique vient de la mécanique quantique qui, avec la découverte de Heisenberg, est à l'origine de la géométrie non-commutative. J'ai toujours admiré les calculs sophistiqués des physiciens, plus précis ément surtout ceux qui sont motivés par l'expérience. J'ai une grande motivation à découvrir que, caché derrière ces recettes dans lesquelles les physiciens trouvent leur motivation physique, il y a de merveilleuses mathématiques. Ces dernières années, après des travaux antérieurs avec Kreimer sur la renormalisation et la décomposition de Birkhoff, mon travail s'est poursuivi dans ma collaboration avec Marcolli. Nous avons découvert un groupe universel, obtenu à partir d'une correspondance de Riemann-Hilbert, qui joue le rôle du "groupe cosmique de Galois" que Pierre Cartier avait conjecturé il y a quelques années. En effet c'est un groupe de symétrie universel de toutes les théories du champ quantique renormalisables. Il contient le groupe de renormalisation des physiciens en tant que sous-groupe à un paramètre mais a une structure beaucoup plus riche. Nous n'avons pas pu comprendre complètement sa relation avec les groupes de Galois motiviques et, en ce sens, il ne met pas encore pleinement en œuvre le rêve de Cartier mais le travail profond de Bloch, Esnault et Kreimer va sûrement jeter plus de lumière sur cet aspect.

Concernant le modèle standard, ce travail a commencé il y a quelques années avec Ali Chamseddine et il a été poussé plus loin dans ma récente collaboration avec Chamseddine et Marcolli. Il se trouve que le Lagrangien incroyablement compliqué de la gravité couplée avec le modèle standard est juste obtenu comme gravité pure (de la façon la plus simple, en comptant les valeurs propres de l'élément de longueur) pour un espace-temps de structure fine. À savoir, il est décrit non pas comme un continuum à quatre dimensions ordinaires, mais comme le produit d'un continuum par un espace non-commutatif fini du type le plus simple dont l'effet est de corriger la dimension modulo 8 issue de la K-théorie. C'est clair que ce sont des idées intéressantes mais, jusqu'à présent, elles n'ont pas pu être testées expérimentalement et appartiennent donc toujours au domaine des mathématiques pures.

Vous avez parlé de la relation entre les mathématiques et la physique. Pourriez-vous dire quelque chose sur la relation entre les mathématiciens et physiciens, ce qui n'est pas la même chose ?

Oui. Il est normal que le vrai physicien ne s'inquiète pas trop de la rigueur mathématique. Pourquoi ? Parce qu'on aura un test à la fin qui est la confrontation à l'expérience. Cela ne signifie pas que la négligence est admissible : un expérimentateur m'a dit une fois qu'ils vérifient leurs calculs dix fois plus que les théoriciens ! Mais ce n'est pas mal de ne pas être trop formaliste. Cela va avec une certaine attitude des physiciens envers les mathématiques : en gros, ils traitent les mathématiques comme une sorte de prostituée. Ils l'utilisent d'une manière absolument gratuite et sans vergogne, en prenant n'importe quel sujet ou partie d'un sujet, sans avoir l'attitude du mathématicien qui n'utilisera quelque chose qu'après une réelle compréhension. Après la période héroïque qui a abouti à l'élaboration du modèle standard, et la renormalisation des théories de jauge, toute une génération de physiciens s'est éloignée du contact avec la physique expérimentale à la recherche d'une théorie qui "expliquerait" non seulement le modèle standard, mais aussi l'unifierait avec la gravité. En poursuivant l'idée appelée théorie des cordes, ces physiciens sont devenus mathématiciens et cela a eu un grand impact sur les mathématiques. Les objets qu'ils manipulent sont les surfaces de Riemann, les variétés de Calabi-Yau : et ils font des mathématiques, de vraies mathématiques sophistiquées. Mais jusqu'à présent, il n'y a pas de tests de cette physique qui montrerait une relation entre ces idées et le monde réel. En outre, en raison du fait qu'ils sont au départ issus du domaine de la physique, leur façon de procéder est totalement différente de celle des mathématiciens.

Cela est vrai notamment au niveau sociologique : ils travaillent en grands groupes et le temps qu'ils passent sur un sujet donné est assez court. À un moment donné t, la plupart d'entre eux vont travailler sur le même problème, et les prépublications qui apparaîtront sur le Web auront plus ou moins la même introduction. Il y a un thème donné, et un grand nombre d'articles sont des variations sur ce thème, mais cela ne dure pas longtemps. C'est arrivé notamment dans la relation entre la théorie des cordes et la géométrie non-commutative. Un grand groupe de personnes a essayé de faire de la théorie des champs sur un espace non-commutatif au début des années 2000, et après un temps relativement court, ils ont conclu que la théorie des champs sur un espace non-commutatif n'était pas réalisable, à cause du phénomène de mélange entre fréquences infrarouges et ultraviolettes. Cette conclusion est restée en vigueur pendant deux ou trois ans, mais après que le gros des troupes soit passé à un autre sujet, un tout autre, très petit, groupe de personnes a montré qu'en fait, la théorie était renormalisable, à condition qu'on ajoute un terme manquant dans le lagrangien. Cela a nécessité une énorme intuition de la part des principaux acteurs Wulkenhaar et Grosse, puis avec Rivasseau, Vignes-Tourneret, Gurau etc... ils ont développé la théorie générale qui est maintenant dans un état remarquable, clôturant la première construction efficace en 4 dimensions. Le peloton n'est jamais revenu et a continué d'un sujet à l'autre. La sociologie des sciences a été profondément traumatisée par la disparition de l'Union soviétique et du contrepoids scientifique que cela a créé à l'égard de la puissance écrasante des États-Unis. Ce que j'ai observé au cours des deux dernières décennies depuis la chute de l'URSS et l'émigration de leur élite scientifique vers les États-Unis est qu'il n'y a plus ce contrepoids. À ce stade, si vous prenez de jeunes physiciens aux États-Unis, ils savent qu'à un moment donné, ils auront besoin d'une recommandation écrite par un des pontes dans le pays, et cela signifie que si l'un d'eux veut travailler en dehors de la théorie des cordes, il ou elle ne trouvera pas de travail. De cette façon, il y a une seule théorie dominante et elle attire tous les meilleurs étudiants. J'ai entendu les théoriciens des cordes dire : “si une autre théorie fonctionne, nous l'appellerons théorie des cordes”, ce qui montre qu'ils ont gagné la guerre sociologique. Le récent épisode ridicule de la “théorie exceptionnellement simple du Tout” a montré qu'il n'y a aucune crédibilité chez les opposants à la théorie des cordes aux États-Unis. Plus tôt avec l'Union soviétique, il y avait de la résistance. Si l'Europe était plus forte, elle pourrait résister. Malheureusement, il existe un instinct de troupeau latent chez les Européens, en particulier en physique théorique. De nombreuses universités européennes, du moins en France ou en Angleterre, au lieu de développer des domaines originaux par opposition à ceux dominants aux États-Unis, ne font que suivre les grands courants aux États-Unis pour décider qui embaucher. Ce n'est pas par manque d'esprits originaux comme mon ami et collaborateur Dirk Kreimer. Mais c'est un manque de confiance en soi de l'Europe, ce qui signifie que nous ne sommes pas capables de faire ce qui doit être fait, de soutenir et sauvegarder cette diversité à tout prix. Je ne pense pas que nous voyons des choses similaires en mathématiques, il y a donc une différence sociologique fondamentale entre mathématiques et physique. Les mathématiciens semblent très résistants à perdre leur identité et à suivre la mode.

Dans vos conversations avec Changeux, vous avez discuté des mathématiques et de la réalité. Avez-vous avancé dans votre réflexion à ce sujet ?

Je ne doute pas que la réalité mathématique est quelque chose qui existe, qu'elle existe indépendamment de mon propre cerveau qui essaie de la voir, et a exactement le mêmes propriétés de résistance que la réalité extérieure. Quand vous voulez prouver quelque chose, ou lorsque vous examinez si une preuve est correcte ou non, vous ressentez la même angoisse, la même résistance extérieure que vous le faites avec la réalité extérieure. Certains vous diront que cette réalité n'existe pas car elle n'est pas "localisée" quelque part dans l'espace et le temps. Je trouve juste cela absurde et j'adopte un point de vue diamétralement opposé : pour moi, même un être humain est mieux décrit par un schéma abstrait que par une collection matérielle de cellules - qui en tout cas sont entièrement renouvelées et remplacées sur une période de temps relativement courte et possèdent donc moins de sens ou de permanence que le schéma lui-même, qui pourrait éventuellement être reproduit en plusieurs exemplaires identiques... Si on veut tout réduire à la "matière localisée quelque part" on rencontre bientôt un mur qui vient de la mécanique quantique et on trouve que cette réduction de la réalité extérieure à la matière est une illusion qui a du sens à des échelles intermédiaires, mais en aucun cas à un niveau fondamental. Je n'ai donc aucun doute sur la subtilité et l'existence d'une réalité qui ne peut être ni réduite à "la matière" ni "localisée". Maintenant, la question de savoir si la réalité mathématique est quelque chose de créé ou quelque chose de préexistant est beaucoup plus facile à discuter si on utilise la distinction qui apparaît dans le théorème de Gödel entre "vérité" et "prouvabilité" d'un énoncé mathématique. J'en ai discuté en détail dans mon livre "Triangle de pensées" avec Lichnerowicz et Schützenberger et je me réfère à ce livre pour l'argument détaillé qui est plutôt compliqué. J'étais un peu frustré après le livre "Matière à Pensée" avec Changeux, par l'absence d'une communication efficace et j'ai tenu à écrire un autre livre où je pourrais mieux expliquer la contribution provenant du théorème de Gödel. Il existe une réalité mathématique fondamentale, et le mathématicien crée des outils pour la comprendre.

La relation entre les déductions du mathématicien (qui, grande découverte récente, ont lieu dans son cerveau) et que la réalité est similaire à la relation entre les déductions effectuées dans un tribunal par opposition à ce que qui se passe réellement dans le monde réel. Elle repose sur une distinction grammaticale précise entre les énoncés mathématiques au niveau des quantificateurs, certains sont prouvables s'ils sont vrais etc... Cette analogie avec la salle d'audience par opposition au monde extérieur est parfaitement expliqué dans le livre de Jean-Yves Girard sur le théorème de Gödel. Cela permet, après un vrai travail, d'obtenir une image mentale claire de la distinction entre le rôle du mathématicien (créer des outils pour découvrir un morceau de cette réalité) et la réalité elle-même.

Vous avez mentionné l'originalité et la mode chez les mathématiciens et dans les mathématiques. Avez-vous un exemple ?

Je venais d'arriver en tant que nouveau venu à l'IHES [Institut des hautes Études scientifiques, à Bures-sur-Yvette, près de Paris] en 1976. Les premières personnes que j'ai rencontrées parlaient de choses que je ne connaissais pas. J'étais à la cafétéria et ils discutaient de la "cohomologie étale", toutes sortes de choses comme ça, qu'avec ma culture issue de l'analyse fonctionnelle et des algèbres d'opérateurs, je ne connaissais pas du tout. Heureusement, je suis vite tombé sur Dennis Sullivan qui, tant qu'il était à Bures, utilisait pour faire connaissance avec les nouveaux arrivants, quel que soit leur domaine et leur personnalité, une méthode qui consistait à leur poser des questions. Il posait des questions que vous pouviez, superficiellement surtout, trouver idiotes. Mais quand vous commenciez à y penser, vous réalisiez bientôt que vos réponses montraient que vous ne compreniez pas vraiment de quoi vous parliez. Il a une sorte de pouvoir socratique qui pousse les gens à une réflexion profonde, pour essayer de comprendre ce qu'ils faisaient, et ainsi à démasquer les incompréhensions dont tout le monde fait l'expérience parce que tout le monde parle sur différentes choses sans avoir nécessairement nettoyé tous les recoins cachés. Il a une autre qualité remarquable ; il peut expliquer des choses que vous ne connaissez pas d'une manière incroyablement claire et lumineuse. C'est en discutant avec Dennis que j'ai appris de nombreux concepts de géométrie différentielle. Il nous les expliquait par gestes, sans une seule formule. J'ai eu énormément de chance de le rencontrer, cela m'a obligé à réaliser que le domaine dans lequel je travaillais était limité, au moins quand vous le voyez comme bien fermé. Ces discussions avec Dennis m'ont sorti de mon champ de compétence, à travers un dialogue visuel et oral. Et pas du tout par la lecture de textes.

Vous avez parlé de l'importance de la diversité, que les gens devrait avoir des antécédents différents. Mais avez-vous des idées sur le genre de terrain d'entente mathématique tout le monde devrait partager ?

C'est un peu subtil. J'ai mentionné le cœur vibrant des mathématiques. Vous pourriez dire : pourquoi ne pas enseigner cela à tout le monde ?. Mais cela entraînerait un désastre ! Parce que les gens finiraient par connaître les surfaces de Riemann, les formes modulaires, etc., mais ils seraient ignorants de grandes parties des mathématiques, comme les algèbres de Hopf ou d'autres sujets qui pourraient sembler plus ésotériques. Donc je ne sais pas. J'ai l'impression qu'il devrait y avoir un minimum de fond commun, fondamental : notions de géométrie différentielle et algébrique, structures algébriques, réelles et analyse complexe. La topologie, la théorie des nombres de base... sont toutes nécessaires. Tu ne peux pas les éviter. Les gens doivent savoir cela.

Après cela, quand vous voulez entrer dans des sujets plus élaborés, la diversité devrait être la règle. Nous devons cultiver des gens originaux, comme je l'ai expliqué dans le première partie de l'entretien, qui sont en mesure de fournir aux étudiants une approche totalement originale par rapport à cette connaissance commune. Cela donnera aux jeunes mathématiciens des clés totalement personnelles, qui leur permettront d'ouvrir leurs propres mondes. S'ils ont de la chance, ils seront intéressés par beaucoup de choses différentes, car il est important pour eux de pouvoir passer d'une chose à l'autre pendant un certain temps au tout début, jusqu'à ce qu'ils trouvent un sous-projet qui va vraiment les inspirer. Je pense qu'il est important de ne pas dépasser une certaine limite pour ce fond commun. Ensuite, vous devez trouver et suivre votre propre ligne, avec un conseiller qui vous permettra de renforcer votre propre originalité. Mais bien sûr, il n'y a pas de recette générale.

Mais recommanderiez-vous vraiment qu'un jeune mathématicien apprenne beaucoup de mathématiques sans être spécialiste d'un domaine ?

Pour un jeune mathématicien, il est absolument crucial de prouver d'abord qu'il ou elle est un mathématicien ou une mathématicienne. Et cela signifie devenir spécialiste d'un sujet et prouver que vous êtes capable de faire quelque chose de très difficile. Et ce n'est pas compatible avec le rêve d'apprendre un peu tout en même temps. Ainsi, après avoir trouvé le sujet que vous trouvez attrayant, il est obligatoire de se concentrer, peut-être pendant un certain nombre d'années, jusqu'à ce que vous fassiez une vraie percée. Ensuite, bien sûr, une fois que vous avez réussi, une fois que vous avez votre passeport pour faire des mathématiques, c'est merveilleux si vous réussissez à élargir votre spectre pour éviter de rester un spécialiste d'une discipline étroite pour le reste de votre vie. Mais c'est très difficile d'être généraliste. Parce qu'il y a le danger de ne pas faire de vraies choses en mathématiques.

Avez-vous des idées sur la façon dont les mathématiques devraient être enseignées ?

Nous devons absolument former de très jeunes gens à des exercices mathématiques précises, en particulier des exercices de géométrie, c'est une très bonne formation. Et c'est horrible quand je vois qu'à l'école, les enfants apprennent des recettes, juste des recettes, et ne sont pas encouragés à penser. Quand j'étais à l'école, je me souviens que nous étions confrontés à des problèmes de géométrie solide (spatiale). Nous avions beaucoup de mal à les résoudre. Ce n'était pas de la géométrie de bébé. C'étaient des choses difficiles, avec des preuves subtiles. Et deux ans plus tôt, nous faisions des problèmes de géométrie planaire. Nous avions l'habitude de passer des nuits à résoudre ces problèmes. Et maintenant, si nous donnions les mêmes problèmes lors d'un examen (l'expérience a été réalisée récemment), on nous traiterait de meurtriers ! Ce n'est pas un progrès. Les problèmes de géométrie sont faciles à poser, et alors vous devez vous donner beaucoup de mal pour trouver une preuve.

C'est dommage qu'on ne le fasse plus. J'ai vu des problèmes récents au lycée, où sont définis des groupes de rotations, les rotations étant des classes d'équivalence... rester à un niveau préhistorique de sophistication juste à cause du lourd poids du “formalisme”... C'est affreux... Parce que la géométrie implique de dessiner des figures, elle doit être directement accessible. Malheureusement, ce n'est pas impossible que cette utilisation exagérée du formalisme mathématique ait été héritée de Bourbaki - qui ne définit pas les nombres réels avant le chapitre 9 de Topologie, longtemps après avoir défini les structures uniformes...

Vous mentionnez Bourbaki. Comment jugez-vous maintenant le rôle de Bourbaki ?

Bourbaki a joué un rôle phénoménal. Vous ne pouvez pas nier qu'il a transformé beaucoup de sujets dans lesquels régnait l'obscurité la plus profonde en des champs d'une incroyable clarté. Il y a de merveilleux livres de Bourbaki : l'Algèbre Chaptitre III et tous les volumes sur les groupes de Lie, vous ne pouvez qu'être stupéfait d'admiration. Maintenant, une fois que tout cela a été fait, c'est fait. Il y a encore des domaines où quelque chose de ce genre aurait pu être fait et n'a pas été fait. Mais je ne pense pas que faire davantage ferait une grande différence. Globalement, Bourbaki a eu une si grande influence en nous donnant un souci de clarté et de rigueur que l'effet bénéfique s'est déjà produit. Si Bourbaki n'avait pas été là, les mathématiques auraient dérivé vers de nombreux résultats sur lesquels vous ne pourriez pas compter.

Pensez-vous qu'il serait possible aujourd'hui de lancer un tel projet si ambitieux et altruiste ?

Être désintéressé à ce point maintenant n'est pas une chose évidente, car tout le monde est tellement occupé avec toutes sortes de "choses à faire". Il y avait un esprit merveilleux au début du groupe Bourbaki, une idée de service désintéressé à la communauté. J'ai participé pendant une courte période à la fin des années 70. J'ai écrit quelques ébauches mais ce qui m'a empêché de continuer, c'est quand j'ai réalisé que, dans une salle de l'Ecole Normale, il y avait des centaines de manuscrits, 100 à 150 pages chacun, qui ne verraient jamais la lumière du jour. J'ai trouvé ça déprimant. Bien sûr, il y avait des doublons partiels... mais il y avait une telle exigence de perfection avant que le contenu ne soit publié, que finalement c'était comme si ces textes n'existaient pas. Le temps a passé, et avec le temps, ils sont devenus obsolètes. Il y a cet incroyable dévouement des membres de Bourbaki qui procédaient par l'écriture de brouillons. Lorsqu'un manuscrit est terminé, il est vrai que vous avez beaucoup appris, vous comprenez mieux les choses, mais si le texte n'apparaît jamais, vous obtenez un vrai sentiment de frustration. Pendant très longtemps, Dieudonné jouait un rôle clé pour veiller à ce que les choses convergent à un moment donné, mais après qu'il ait quitté, une grande partie de l'efficacité est partie avec lui en quelque sorte.

Sur quoi travaillez-vous maintenant ?

En ce moment, je travaille sur une analyse difficile qui a à voir avec les axiomes spectraux de la géométrie non-commutative. C'est le contenu de mon année au Collège de France et c'est beaucoup de travail technique mais aussi cela offre une diversion bienvenue. Juste avant cette diversion, après avoir remis le manuscrit de notre livre avec Matilde Marcolli, j'étais dans un état mental obsessionnel en raison du risque inévitable d'une erreur dans un si grand ensemble de travaux. Bien sûr, on peut vérifier les choses et essayer de les visualiser sous toutes sortes d'angles, mais par exemple dès qu'on touche à la physique, les difficultés s'accumulent puisque la précision des calculs ne suffit pas pour garantir qu'ils auront une "signification" pour le monde réel et passeront le test de réalité. Par rapport à cela, j'essaie de partager l'attitude du grand physicien Pierre-Gilles de Gennes quand il a dit :

"Le vrai point d'honneur n'est pas toujours dans le vrai. Il est d'oser, de proposer des idées neuves, et ensuite de les vérifier. Il est aussi, bien sûr, de savoir reconnaître publiquement ses erreurs. L'honneur du scientifique est absolument à l'opposé de l'honneur de Don Diègue. Quand on a commis une erreur, il faut accepter de perdre la face."

Ce qui importe certainement, dans ce que nous faisons, c'est d'essayer de mettre constamment nos idées à l'épreuve et de voir ce qui se passe. Rien de mieux que de se réveiller au milieu de la nuit à cet égard. Et il ne faut pas avoir peur. Ici, voici ce qu'Alexandre Grothendieck écrit dans son livre inédit *Récoltes et Semailles* à ce sujet :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mus, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée."

Comment lisez-vous les mathématiques ?

La seule façon dont je parviens à lire les mathématiques est extrêmement lente car je lis une phrase puis j'essaie d'y penser. Je ne comprends pas une preuve si je n'ai pas essayé de la prouver moi-même avant. Une fois que je suis perplexe longtemps sur un résultat, je peux le comprendre en quelques secondes en scannant la preuve ; je vois le seul endroit où quelque chose se passe et que je ne pouvais pas deviner avant. Le problème est que cette méthode de lecture est très lente, j'ai besoin d'un temps énorme pour me familiariser avec le résultat. Je suis presque incapable de lire un livre mathématique de façon linéaire. Une discussion ou un discours, au contraire, me permettent d'aller plus vite. Mais je sais que d'autres mathématiciens fonctionnent de manière très différente.

Est-ce la même chose avec la physique ?

Non, c'est totalement différent. En physique, j'adore lire ; j'ai passé environ quinze ans à étudier le livre de Schwinger, *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*. Il a rassemblé tous les articles cruciaux de Dirac, Feynman, Schwinger lui-même, Bethe, Lamb, Fermi, tous les articles fondamentaux sur la théorie des champs quantiques, ceux de Heisenberg aussi, bien sûr. Cela a été mon livre de chevet pour des années et des années. Parce que j'ai toujours été fasciné par le sujet et je voulais le comprendre. Et cela m'a pris très longtemps de le comprendre. Pas tant pour comprendre le détail des articles, mais pour comprendre ce qu'ils voulaient dire, quelles mathématiques étaient derrière eux. En physique, par contre, j'ai une réaction totalement différente. Je n'ai pas du tout cette incapacité à lire. C'est étrange. Je pense qu'il y a une raison possible : en mathématiques, je dois me protéger davantage, à certains égards. En physique, je ne ressens pas ce besoin.

Et en dehors de la science ? Voulez-vous parler de quelque chose d'autre, la musique, l'art ?

Ces deux dernières années, je n'ai plus eu le temps parce que je devais travailler plus dur, mais avant je prenais des cours de dessin et de piano. Ce qui m'a frappé en musique, c'était de voir comment certains compositeurs avaient atteint un niveau incalculable de perfection dans leur art. En étudiant certaines partitions, j'ai été frappé de réaliser que vous apprenez autant qu'en lisant quelques articles mathématiques. Tout simplement à cause du niveau de sophistication. Il ne s'agit pas d'une analogie entre mathématiques et musique. Quelques compositeurs nous touchent par une œuvre hallucinante de précision, par un niveau de perfection proche de celui de certains travaux de Riemann. Et face à ce niveau de perfection, je réagis de la même manière, par un sentiment d'admiration - mais une admiration qui crée du mouvement, quelque chose qui n'est pas du tout statique : la beauté plus la perfection met la pensée en mouvement, elle vous force à penser. Cette perfection sous la forme d'une œuvre d'art est bien sûr très rare. Pour prendre un exemple, cette fois dans la littérature, il y a une différence frappante de "forme" entre *Madame Bovary* [Flaubert] et *Le lys dans la vallée* [Balzac]. Madame Bovary est la perfection absolue, une merveille de précision qui est le résultat d'une quantité phénoménale de travail, tandis que l'autre est un peu bâclé. *Le lys dans la vallée* contient aussi des trucs merveilleux mais il y a une différence évidente en apparence.

J'ai souvent cette impression quand je regarde des papiers mathématiques ou des œuvres d'art, et je ressens intensément cette distinction. Certaines pièces se démarquent bien au-dessus des autres, on a le sentiment que l'auteur, au lieu de s'arrêter à l'instant t et en disant : "Très bien, ça va le faire, je vais remettre mes affaires" (Balzac a été forcé de faire ça, il avait un couteau sous la gorge, il n'avait pas le choix) juste continuent à travailler jusqu'à atteindre quelque chose qui est proche de la perfection absolue. C'est principalement ce que je ressens de l'art. Ces œuvres, celles avec cette perfection absolue, vous donnent de l'élan. Elles vous donnent quelque chose qui n'est pas seulement un sentiment ; elles vous donnent un pouvoir extraordinaire, une force qui vous porte plus loin. Cela vous transmet quelque chose. J'ai cette impression avec certains articles en mathématiques ou en physique. L'article de Riemann sur la fonction zêta, celui d'Einstein sur la relativité par exemple ... Il y en a peu, très peu. Ils mettent les normes d'écriture à un niveau si élevé. C'est merveilleux. Vous voyez cela et vous comprenez vraiment. Ce sont des instruments extraordinaires pour comprendre et, au-delà de la clarté, vous ressentez quelque chose qui vous met en mouvement. Cela vous dit : "continue".

Alain Connes est professeur au Collège de France, à l'IHES et à Vanderbilt Université. Parmi ses récompenses figurent une médaille Fields en 1982, le Prix Crafoord en 2001 et la Médaille d'or du CNRS en 2004.

Catherine Goldstein [cgolds@math.jussieu.fr] est Directrice de recherches à l'Institut de mathématiques de Jussieu. Ses projets de recherche sont dans le domaine de l'Histoire des mathématiques, en particulier de la théorie des nombres. Elle a récemment coédité "La mise en forme de l'arithmétique" (d'après le Disquisitiones Arithmeticae) et travaille actuellement sur l'impact de la Première Guerre mondiale sur les mathématiques et les sciences.

Georges Skandalis [skandal@math.jussieu.fr] est professeur à l'Université Paris Diderot à Paris 7 et à l'Institut de mathématiques de Jussieu. Son sujet de recherche principal est la géométrie non-commutative. Il étudie actuellement les feuilletages singuliers et la théorie de l'indice associée. Il est un ancien étudiant d'Alain Connes.