

Qui utilise des automorphismes intérieurs sans en avoir conscience, Denise Vella-Chemla, début novembre 2024

On revient à une note de 2018 appelée *Palindromes*¹, dans laquelle intervenait un automorphisme intérieur dont on avait vu qu'il permettait de distinguer les nombres impairs des nombres pairs. Il permettait également de distinguer les nombres premiers² des nombres composés, ce à quoi on n'avait pas été suffisamment attentive.

On rappelle les définitions : on définit l'ensemble E_n ainsi :

$$E_n = \{a + b \mid a \text{ impair, } b \text{ impair, } a \in \mathcal{P}, \ 3 \leq a \leq \frac{n}{2}, \ 6 \leq a + b \leq n\}.$$

La définition de l'automorphisme intérieur est :

$$\begin{aligned} f_n : E_n &\rightarrow E_n \\ a + b_1 &\mapsto a + b_2 \iff b_1 + b_2 = n \end{aligned}$$

Exemples : l'automorphisme intérieur f_{22} qui travaille sur l'ensemble de toutes les décompositions additives des lignes au-dessus ou sur la ligne du nombre pair 22 (se reporter à l'article initial) lie bijectivement les décompositions additives suivantes :

$$\begin{aligned} f_{22} : 3 + 7 &\mapsto 3 + 15 \\ 7 + 9 &\mapsto 7 + 13 \end{aligned}$$

Les points fixes de f_{22} sont les décompositions additives $3 + 11, 5 + 11, 7 + 11$ et $11 + 11$.

f_n a 0 point fixe si n est de la forme $4k$ et $\pi\left(\frac{n}{2}\right)$ points fixes si n est de la forme $4k + 2$.

Voici le programme python de cette bonne idée :

```
def premier(atester):
    if atester in [0, 1]: return False
    if atester in [2, 3, 5, 7]: return True
    k = 2
    while True:
        if k * k > atester: return True
        else:
            if atester % k == 0: return False
            else: k = k + 1
```

¹<https://denisevellachemla.eu/palindromes.pdf>

² \mathcal{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.

```

def autom(n,d):
    return([d[0],n-d[1]])

decompositions = []
for n in range(6,104,2):
    print('',n,':::',end='')
    for x in range(3,n//2+1,2):
        if premier(x):
            decompositions.append([x,n-x])
    for y in range(3,n-1,2):
        nbdecompo = 0
        for d in decompositions:
            if d[1] == y:
                nbdecompo = nbdecompo+1
        print(nbdecompo,' ',end='')
    print('')
    print('application de 1 automorphisme f-' ,n)
    nbptsfixesautom = 0
    for d in decompositions:
        if d[0] == autom(n,d)[0] and d[1] == autom(n,d)[1]:
            nbptsfixesautom = nbptsfixesautom+1
    print('nb pts fixes de 1 automorphisme : ',nbptsfixesautom)

```

Comme on peut le constater (voir résultat du programme en annexe), et cela doit se démontrer aisément, la fonction *autom* du programme a son résultat qui non seulement est nul pour les doubles de pairs et non nul pour les doubles d’impairs, mais surtout, son résultat qui augmente strictement à chaque nombre double d’un nombre premier.

Cette idée permettrait peut-être d’obtenir une démonstration “à la Zagier” du fait que tout nombre pair a une décomposition de Goldbach (Don Zagier a écrit la preuve en une ligne du fait que tout nombre premier de la forme $4k + 1$ est de façon unique la somme de deux carrés d’entiers). La preuve de Don Zagier [1] est basée sur les notions d’involution et de nombre de points fixes.

Références

[1] Don Zagier, *A One-Sentence Proof That Every Prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ Is a Sum of Two Squares*, The American Mathematical Monthly, Vol. 97, n° 2 (Février 1990), p. 144.

Transcription en Latex de la version française de l’article [1] parue dans la Revue l’Enseignement mathématique
<https://denisevellachemla.eu/trad-Zagier-one-sentence-proof.pdf>.

Annexe : résultat du programme fourni dans le corps de l'article

```
6 :::1
application de l automorphisme f6
nb pts fixes de l automorphisme : 1

8 :::1 1
application de l automorphisme f8
nb pts fixes de l automorphisme : 0

10 :::1 2 1
application de l automorphisme f10
nb pts fixes de l automorphisme : 2

12 :::1 2 2 1
application de l automorphisme f12
nb pts fixes de l automorphisme : 0

14 :::1 2 3 2 1
application de l automorphisme f14
nb pts fixes de l automorphisme : 3

16 :::1 2 3 3 2 1
application de l automorphisme f16
nb pts fixes de l automorphisme : 0

18 :::1 2 3 3 3 2 1
application de l automorphisme f18
nb pts fixes de l automorphisme : 3

20 :::1 2 3 3 3 3 2 1
application de l automorphisme f20
nb pts fixes de l automorphisme : 0

22 :::1 2 3 3 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f22
nb pts fixes de l automorphisme : 4

24 :::1 2 3 3 4 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f24
nb pts fixes de l automorphisme : 0

26 :::1 2 3 3 4 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f26
nb pts fixes de l automorphisme : 5

28 :::1 2 3 3 4 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f28
nb pts fixes de l automorphisme : 0

30 :::1 2 3 3 4 5 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f30
nb pts fixes de l automorphisme : 5
```

32 ::::1 2 3 3 4 5 5 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{32}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

34 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{34}
 nb pts fixes de l automorphisme : 6

36 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{36}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

38 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{38}
 nb pts fixes de l automorphisme : 7

40 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{40}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

42 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{42}
 nb pts fixes de l automorphisme : 7

44 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{44}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

46 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{46}
 nb pts fixes de l automorphisme : 8

48 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{48}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

50 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{50}
 nb pts fixes de l automorphisme : 8

52 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{52}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

54 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{54}
 nb pts fixes de l automorphisme : 8

56 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{56}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

58 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{58}
 nb pts fixes de l automorphisme : 9

```

60 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f60
nb pts fixes de l automorphisme : 0_
62 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f62
nb pts fixes de l automorphisme : 10

64 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f64
nb pts fixes de l automorphisme : 0

66 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f66
nb pts fixes de l automorphisme : 10

68 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f68
nb pts fixes de l automorphisme : 0

70 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f70
nb pts fixes de l automorphisme : 10

72 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f72
nb pts fixes de l automorphisme : 0

74 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f74
nb pts fixes de l automorphisme : 11

76 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f76
nb pts fixes de l automorphisme : 0

78 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3
2 1
application de l automorphisme f78
nb pts fixes de l automorphisme : 11

80 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3
3 2 1
application de l automorphisme f80
nb pts fixes de l automorphisme : 0

82 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5
4 3 3 2 1
application de l automorphisme f82
nb pts fixes de l automorphisme : 12

84 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 12 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5
5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f84
nb pts fixes de l automorphisme : 0

```

```

86 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 12 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7
6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f86
nb pts fixes de l automorphisme : 13

88 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 12 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7
7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f88
nb pts fixes de l automorphisme : 0

90 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 13 12 11 11 10 10 10 9 8 8
8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f90
nb pts fixes de l automorphisme : 13

92 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 13 13 12 11 11 10 10 10 9 8
8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f92
nb pts fixes de l automorphisme : 0

94 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 13 13 12 11 11 10 10 10
9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f94
nb pts fixes de l automorphisme : 14

96 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 14 13 13 12 11 11 10 10
10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f96
nb pts fixes de l automorphisme : 0

98 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 14 14 13 13 12 11 11 10
10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f98
nb pts fixes de l automorphisme : 14

100 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 14 14 14 13 13 12 11 11
10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f100
nb pts fixes de l automorphisme : 0

102 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 14 14 14 14 13 13 12 11
11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f102
nb pts fixes de l automorphisme : 14

```