

Qui utilise des automorphismes intérieurs sans en avoir conscience, Denise Vella-Chemla, début novembre 2024

On revient à une note de 2018 appelée *Palindromes* <https://denisevellachemla.eu/palindromes.pdf>, dans laquelle intervenait un automorphisme intérieur qui permettait de distinguer les nombres premiers des nombres composés, alors qu'on avait seulement vu qu'il permettait de distinguer les nombres impairs des nombres pairs.

Voici le programme python de cette bonne idée :

```
def premier(atester):
    if atester in [0, 1]: return False
    if atester in [2, 3, 5, 7]: return True
    k = 2
    while True:
        if k * k > atester: return True
        else:
            if atester % k == 0: return False
            else: k = k + 1

def autom(n,d):
    return([d[0],n-d[1]])

decompositions = []
for n in range(6,104,2):
    print('',n,':::',end='')
    for x in range(3,n//2+1,2):
        if premier(x):
            decompositions.append([x,n-x])
    for y in range(3,n-1,2):
        nbdecompo = 0
        for d in decompositions:
            if d[1] == y:
                nbdecompo = nbdecompo+1
        print(nbdecompo,' ',end='')
    print('')
    print('application de 1 automorphisme f-' ,n)
    nbptsfixesautom = 0
    for d in decompositions:
        if d[0] == autom(n,d)[0] and d[1] == autom(n,d)[1]:
            nbptsfixesautom = nbptsfixesautom+1
    print('nb pts fixes de 1 automorphisme : ',nbptsfixesautom)
```

Comme on peut le constater (voir résultat du programme en annexe), et cela doit se démontrer aisément, la fonction *autom* du programme a son résultat qui non seulement est nul pour les doubles de pairs et non nul pour les doubles d'impairs, mais surtout, son résultat qui augmente strictement à chaque nombre double d'un nombre premier.

Cette idée permettrait peut-être d'obtenir une démonstration "à la Zagier" du fait que tout nombre pair a une décomposition de Goldbach (Don Zagier a écrit la preuve en une ligne du fait que tout nombre premier de la forme $4k + 1$ est de façon unique la somme de deux carrés d'entiers). La

preuve de Don Zagier [1] est basée sur les notions d'involution et de nombre de points fixes.

Références

[1] Don Zagier, *A One-Sentence Proof That Every Prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ Is a Sum of Two Squares*, The American Mathematical Monthly, Vol. 97, n° 2 (Février 1990), p. 144.

Transcription en Latex de la version française de l'article [1] parue dans la Revue l'Enseignement mathématique

<https://denisevellachemla.eu/trad-Zagier-one-sentence-proof.pdf>.

Annexe : résultat du programme fourni dans le corps de l'article

```
6 :::1
application de l automorphisme f6
nb pts fixes de l automorphisme : 1

8 :::1 1
application de l automorphisme f8
nb pts fixes de l automorphisme : 0

10 :::1 2 1
application de l automorphisme f10
nb pts fixes de l automorphisme : 2

12 :::1 2 2 1
application de l automorphisme f12
nb pts fixes de l automorphisme : 0

14 :::1 2 3 2 1
application de l automorphisme f14
nb pts fixes de l automorphisme : 3

16 :::1 2 3 3 2 1
application de l automorphisme f16
nb pts fixes de l automorphisme : 0

18 :::1 2 3 3 3 2 1
application de l automorphisme f18
nb pts fixes de l automorphisme : 3

20 :::1 2 3 3 3 3 2 1
application de l automorphisme f20
nb pts fixes de l automorphisme : 0

22 :::1 2 3 3 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f22
nb pts fixes de l automorphisme : 4

24 :::1 2 3 3 4 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f24
nb pts fixes de l automorphisme : 0
```

26 ::::1 2 3 3 4 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{26}
 nb pts fixes de l automorphisme : 5

28 ::::1 2 3 3 4 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{28}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

30 ::::1 2 3 3 4 5 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{30}
 nb pts fixes de l automorphisme : 5

32 ::::1 2 3 3 4 5 5 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{32}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

34 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{34}
 nb pts fixes de l automorphisme : 6

36 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{36}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

38 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{38}
 nb pts fixes de l automorphisme : 7

40 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{40}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

42 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{42}
 nb pts fixes de l automorphisme : 7

44 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{44}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

46 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{46}
 nb pts fixes de l automorphisme : 8

48 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{48}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

50 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{50}
 nb pts fixes de l automorphisme : 8

52 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
 application de l automorphisme f_{52}
 nb pts fixes de l automorphisme : 0

54 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{54}
nb pts fixes de l automorphisme : 8

56 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{56}
nb pts fixes de l automorphisme : 0

58 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{58}
nb pts fixes de l automorphisme : 9

60 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{60}
nb pts fixes de l automorphisme : 0

62 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{62}
nb pts fixes de l automorphisme : 10

64 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{64}
nb pts fixes de l automorphisme : 0

66 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{66}
nb pts fixes de l automorphisme : 10

68 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{68}
nb pts fixes de l automorphisme : 0

70 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{70}
nb pts fixes de l automorphisme : 10

72 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{72}
nb pts fixes de l automorphisme : 0

74 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{74}
nb pts fixes de l automorphisme : 11

76 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f_{76}
nb pts fixes de l automorphisme : 0

78 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3
2 1
application de l automorphisme f_{78}
nb pts fixes de l automorphisme : 11

80 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3
3 2 1
application de l automorphisme f_{80}
nb pts fixes de l automorphisme : 0

```

82 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5
4 3 3 2 1
application de l automorphisme f82
nb pts fixes de l automorphisme : 12

84 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 12 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5
5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f84
nb pts fixes de l automorphisme : 0

86 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 12 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7 7
6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f86
nb pts fixes de l automorphisme : 13

88 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 12 11 11 10 10 10 9 8 8 8 7
7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f88
nb pts fixes de l automorphisme : 0

90 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 13 12 11 11 10 10 10 9 8 8
8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f90
nb pts fixes de l automorphisme : 13

92 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 13 13 12 11 11 10 10 10 9 8
8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f92
nb pts fixes de l automorphisme : 0

94 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 13 13 12 11 11 10 10 10
9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f94
nb pts fixes de l automorphisme : 14

96 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 14 13 13 12 11 11 10 10
10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f96
nb pts fixes de l automorphisme : 0

98 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 14 14 13 13 12 11 11 10
10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f98
nb pts fixes de l automorphisme : 14

100 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 14 14 14 13 13 12 11 11
10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f100
nb pts fixes de l automorphisme : 0

102 ::::1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 9 10 10 10 11 11 12 13 13 14 14 14 14 14 13 13 12 11
11 10 10 10 9 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 3 2 1
application de l automorphisme f102
nb pts fixes de l automorphisme : 14

```