L'ensemble résiduel d'un complexe sur une variété et questions connexes (deuxième note)

S. Lefschetz

1. Dans une Note récente portant le même titre [1], j'ai communiqué deux formules très générales concernant certains invariants simultanés topologiques d'un C_k sur un M_n, c'est-à-dire d'un vrai sous-ensemble de la variété (formules (3), (4) de la Note). Les démonstrations ont été données explicitement et complètement pour un polyèdre C_k, c'est-à-dire un sous-complexe d'une subdivision C_n définissant M_n. Concernant le C_k général, il a été affirmé, en s'appuyant sur un certain théorème, que la dérivation des formules pouvait se poursuivre sans changement, et de même pour le sous-ensemble fermé G de M le plus général. Un examen plus approfondi a révélé qu'il en était tout autrement, en partie à cause d'une modification nécessaire du théorème, et que les démonstrations pour le polyèdre C_k devraient subir une modification profonde avant de pouvoir être étendues aux types plus généraux.

De plus, pour G, le type de cycle (cycle de Vietoris) considéré, loc. cit., semble insuffisant. Nous avons donc conçu de nouvelles preuves sur des bases quelque peu différentes et que nous ne pouvons donner ici que dans les grandes lignes [2]. La preuve de la deuxième formule repose sur un théorème d'intersection très intéressant que nous énonçons ci-dessous. La nouvelle définition des cycles et des complexes sur G que le cas semble exiger est également remarquable et sera brièvement décrite.

2. Le théorème mentionné ci-dessus se trouve loc. cit., p. 619. Dans son énoncé ainsi que dans celui du corollaire sur la même page, le "mod. N_δ" doit être remplacé par "mod. δ', où $\delta' \to 0$ avec δ" [3]. Ceci est dû au fait que les n-cellules de M, qui apparaissent dans la construction d'Alexander, peuvent être de diamètre $> \delta$, bien que leur borne supérieure $\delta' \to 0$ avec δ.

3. La démonstration de (3) suit essentiellement la même logique que précédemment. Nous prouvons d'abord que les nombres S_μ sont finis, puis nous montrons que lorsque δ est suffisamment petit

$$S_\mu(M_n - C_k; M_n) = S_\mu(K - \Phi; K),$$

d'où et à la fois (1) appliqué à K, et Φ, découlent de (3).

Pour la deuxième formule, nous montrons d'abord qu'elle est équivalente à

$$R_\mu(M_n - C_k) = \rho_{n-\mu},$$

le nombre de $n - \mu$ complexes de M_n dont la frontière (le cas échéant) sur C_k est indépendante modulo M_n des complexes sur C_k lui-même. La démonstration de cette dernière formule repose alors sur les théorèmes d'intersection suivants, dans lesquels Γ_μ est un cycle sur $M_n - C_k$ et $C_{n-\mu}$ un complexe dont la frontière est sur C_k :

Transcription / Traduction en LaTeX : Denise Vella-Chemla, assistée outils Google Lens et traduction.
Département de mathématiques, Université de Princeton.
Communiqué le 9 novembre 1927.

1. Même volume de ces Actes, pp. 614-622. Les notations de cette première Note seront utilisées ici.
2. Elles seront données en détail dans un article à paraître dans les *Annals of Mathematics*.
3. La nécessité d'apporter ce changement m'a été signalée par Alexandroff.

I. Pour que $\Gamma_\mu \approx 0$ mod. $M_n - C_k$, il est nécessaire et suffisant que l'indice de Kronecker $(\Gamma_\mu . C_{n-\mu}) = 0$ quel que soit $C_{n-\mu}$.

II. Pour que $C_{n-\mu}$ dépende mod. M_n d'un complexe sur C_k, il est nécessaire et suffisant que ce même indice soit nul quel que soit Γ_μ.

Lorsque C_k est un complexe vide, les deux théorèmes se réduisent à une proposition énoncée pour la première fois par Poincaré et démontrée par Veblen et Hermann Weyl[4]. Des propositions similaires sont valables pour un M_n avec bord et $C_k = C_{n-1}$ bord de M_n et sont implicitement démontrées dans tr. 2.

Le nombre $\rho_{n-\mu}$ est intéressant en soi : si nous négligeons dans toutes les relations de bord les complexes sur C_k, nous obtenons un indice de connectivité qui est précisément ρ.

4. Concernant l'ensemble fermé G, les formules pour C_k peuvent être dérivées de la même manière que pour C_k, à condition que la notion de complexe sur G soit convenablement définie.

Tout d'abord, étant donné un C_μ quelconque sur M_n, nous introduisons le symbole $\dfrac{C_\mu}{t}$, avec t un entier $\neq 0$, et combinons ces symboles comme des fractions ordinaires.

L'égalité entre eux sera notée par le symbole $\approx$ de l'homologie avec division autorisée et nous écrivons par définition $\dfrac{C_\mu}{t} \approx \dfrac{aC_\mu}{at}$, avec a un entier ; $\dfrac{C_\mu}{t} - \dfrac{C'_\mu}{t'} \approx 0$ équivaut à $\dfrac{C_\mu}{t} \approx \dfrac{C'_\mu}{t'}$ et à $tC'_\mu - t'C_\mu \approx 0$, etc.

Nous considérons ensuite une suite $\{N^i\}$ de voisinages fermés de G, analogue à N de la p. 619 de notre première note et telle que chaque N^i contienne celui qui suit, alors que la distance est maximale entre les points de N^i et $G \to 0$ lorsque $i \to \infty$.

Un μ-cycle sur G est maintenant défini comme une suite $\gamma_\mu = \left\{ \dfrac{\Gamma^i_\mu}{t_i} \right\}$ avec Γ^i sur N^i, et avec la propriété que à chaque p correspond un q tel que $\dfrac{\Gamma^i_\mu}{t_i} - \dfrac{\Gamma^j_\mu}{t_j} \approx 0$ mod. N^p lorsque $i, j \geq q$. On écrit $\gamma_m \approx 0$ mod. M_n, lorsque sous des conditions analogues $\Gamma^i \approx 0$ mod. M_n. Un type de suite similaire $c_\mu = \left\{ \dfrac{C^i_\mu}{t_i} \right\}$ sert à définir un complexe à bord sur G, etc. Les complexes et les cycles donnent lieu à des homologies et des invariants associés entièrement analogues à ceux de C_k. Ces invariants sont indépendants du choix de $\{N^i\}$, et en effet $R_\mu(G)$ est un invariant de G seul. On peut définir l'indice de Kronecker $(\Gamma_\mu . c^i_{n-\mu}), \Gamma_\mu$ cycle de $M_n - G$, comme étant égal au nombre $\dfrac{1}{t_i}(\Gamma_\mu . C^i_{n-\mu})$ (notation comme ci-dessus), dont la valeur est indépendante de i lorsqu'il est au-dessus d'une certaine limite. Nous avons ainsi une base appropriée pour la dérivation de nos formules pour l'ensemble fermé selon des lignes pratiquement identiques à celles de C_k.

5. La nécessité du type de cycles et de complexes apparemment très artificiel introduit ici repose sur les considérations suivantes. Soit Γ_μ sur M_n dépendant de cycles dont tous les points sont à une

4. Voir Veblen, Trans. Amer. Math. Soc., 25, 1923 (540-550) ; Weyl, Revista Mat., 1923 ; Lefschetz, tr. 2, p. 431.

distance δ de G, de sorte que $t\Gamma_\mu \approx$ mod. M_n un cycle de ce type. Soit t le plus petit nombre ayant cette propriété. Si t reste fini lorsque $\delta \to 0$, les cycles de Vietoris sont suffisants pour atteindre cet objectif ; si $t \to \infty$, notre type plus général est nécessaire.