

6. Qu'arrive-t-il, d'après ce qui précède, quand la surface est la plus générale de son degré. On a vu que dans ce cas les cycles de la courbe  $f$  entre  $x$  et  $z$  se réduisent à un seul; on peut d'ailleurs supposer que ce cycle est un cycle infiniment petit dans le voisinage d'un point simple, c'est-à-dire un cycle nul. *Donc, dans ce cas, il n'y a pas de cycle linéaire effectif pour la surface.*

Il n'est pas difficile d'indiquer des surfaces particulières, pour lesquelles le nombre des cycles distincts ne sera pas nul. Ainsi, si une surface a une intégrale de première espèce, il est manifeste que le nombre de ces cycles est au moins égal à deux.

Prenons, en particulier, une surface dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres  $u$  et  $v$ , de telle manière qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de  $u$  et  $v$ , abstraction faite de multiples des périodes. Une telle surface aura évidemment quatre cycles distincts.

Soit encore une surface de la nature de celles qui ont été étudiées au premier Chapitre, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$x = R(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \quad y = R_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \quad z = R_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

les  $R$  étant rationnelles en  $\alpha, \beta$  et  $(\alpha', \beta')$  avec  $\varphi(\alpha, \beta) = 0, \psi(\alpha', \beta') = 0$ , et telles qu'à un point  $(x, y, z)$  corresponde un seul système de valeurs de  $(\alpha, \beta)$  et  $(\alpha', \beta')$ . Si la courbe  $\varphi$  est de genre  $p$ , la courbe  $\psi$  de genre  $p'$ , le nombre des cycles linéaires distincts de la surface sera égal à  $2p + 2p'$ .

7. Cette notion du nombre des cycles distincts se ramène à une question de Géométrie de situation (*analysis situs*, comme disait Riemann); c'est ce qu'il est aisé de montrer et de diverses manières.

Mais auparavant il est indispensable de rappeler rapidement la définition des divers ordres de connexité dans la Géométrie à  $n$  dimensions.

Nous considérons un continuum fermé  $\delta$  à  $n$  dimensions, par exemple, pour fixer les idées, une surface fermée à  $n$  dimensions dans un espace à  $n + 1$  dimensions.

Un ou plusieurs espaces fermés à  $m$  dimensions constitueront le

contour d'un espace à  $(m + 1)$  dimensions, contenu dans  $\delta$ , quand, par ces espaces à  $m$  dimensions, on pourra faire passer un espace fermé à  $(m + 1)$  dimensions, dont ils limiteront une partie. Ceci posé, si l'on peut imaginer dans  $\delta$  un nombre  $p_m$  d'espaces fermés à  $m$  dimensions, qui ne puissent pas constituer le contour d'un espace fermé à  $m + 1$  dimensions contenu dans  $\delta$ , mais tels que tout autre espace fermé à  $m$  dimensions puisse constituer avec une partie d'entre eux ou avec tous le contour d'un espace fermé à  $(m + 1)$  dimensions contenu dans  $\delta$ , on dit que le domaine  $\delta$  a une connexion de  $m^{\text{ième}}$  espèce  $p_m + 1$ .

Pour un domaine fermé  $\delta$ , les différents nombres  $p_m$ , pour les diverses valeurs de  $m$ , s'associent deux à deux, et l'on démontre que

$$p_m = p_{n-m}.$$

Si donc il s'agit, comme dans ce qui suit, d'un espace fermé à quatre dimensions, on aura à considérer les deux nombres  $p_1$  et  $p_2$  correspondant aux connexités de première et de seconde espèce.

Ces notions générales rappelées, revenons à l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v); \end{aligned}$$

$\varphi$  et  $\psi$  étant, par exemple, des fonctions hyperfuchsienues de  $u$  et  $v$ , ayant un certain polyèdre fondamental, et telles qu'à une valeur arbitraire de  $x$  et  $y$  ne corresponde dans ce polyèdre qu'un seul système de valeurs de  $u$  et  $v$ .

La fonction  $z$  ne sera pas une fonction uniforme de  $u$  et de  $v$ ; elle aura  $m$  valeurs pour chaque valeur de  $u$  et  $v$ . Mais nous pouvons imaginer que le polyèdre se recouvre lui-même  $m$  fois, de telle sorte que nous aurons un nouveau domaine, que je désigne par  $D$ , et tel qu'à chaque point de ce domaine ne corresponde qu'un système  $(x, y, z)$ . Ce domaine  $D$  peut encore être considéré comme un certain polyèdre; il est limité par des faces qui se correspondent deux à deux, et sur deux faces correspondantes les points se correspondent deux à deux. En considérant alors comme confondus les points homologues de deux