FRAGMENT

SUR

L'ANALYSIS SITUS.

Œuvres de Riemann, 2e édit., p. 479.

Deux variétés à une dimension seront regardées comme faisant partie du même groupe, ou bien de groupes différents, selon que l'une peut être transformée en l'autre d'une manière continue, ou bien ne le peut pas.

Deux variétés à une dimension, qui ont pour frontières la même paire de points, forment par leur réunion une variété connexe à une dimension, sans frontières, et celle-ci peut ou non former la frontière complète d'une variété à deux dimensions, suivant que les deux variétés primitives appartiennent respectivement au même groupe ou à des groupes différents.

Une variété, intérieure (¹), connexe, sans frontières, à une dimension, prise une fois, suffit pour former la frontière totale d'une variété à deux dimensions intérieure à cette frontière, ou bien n'y suffit pas.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_m$, m variétés, intérieures, connexes, fermées, à n dimensions, qui, prises une fois, ne peuvent ni séparément

(¹) Pour respecter le texte on a traduit le mot « innere » par intérieure; le mot « innere » tout seul n'a pas du reste en allemand une signification plus claire qu'en français. Il semblerait que dans cette définition « innere » ou intérieure signifie « à l'intérieur d'une variété à deux dimensions ». La phrase suivante est encore moins claire. Peut-être y pourrait-on dire : « Soient $a_1, a_2, \ldots, a_m$ m variétés à l'intérieur d'une multiplicité qui les renferme, ..., etc. ». — (L. L.)

ni par leur réunion former la frontière complète d'une variété, intérieure, à $(n+1)$ dimensions, et soient $b_1, b_2, \ldots, b_m$, m variétés à n dimensions, définies de même, dont chacune peut former par sa réunion avec une ou plusieurs des a la frontière complète d'une variété, intérieure, à $(n+1)$ dimensions; alors chaque variété, intérieure, connexe, à n dimensions, qui, par sa réunion avec les a, peut former la frontière complète d'une variété, intérieure, à $(n+1)$ dimensions, le pourra de même aussi par sa réunion avec les b, et réciproquement.

Lorsqu'une variété quelconque, intérieure, fermée, à n dimensions forme, par sa réunion avec les a, la frontière totale d'une variété, intérieure, à $(n+1)$ dimensions, alors, par suite de nos hypothèses, les a peuvent être éliminés successivement et remplacés par les b.

Une variété A à n dimensions est dite transformable en une autre B lorsque l'on peut former, par la réunion de A et de morceaux de B, la frontière complète d'une variété, intérieure, à $(n+1)$ dimensions.

Lorsqu'à l'intérieur d'une multiplicité étendue d'une manière continue, chaque variété fermée à n dimensions forme frontière à l'aide de la réunion de m morceaux fixes de variétés à n dimensions, ces morceaux pris séparément ne formant pas frontière, alors cette multiplicité a la connexion $(m+1)$ dans la $n^{\text{ième}}$ dimension.

Une multiplicité connexe, étendue d'une manière continue, est dite simplement connexe lorsque la connexion est simple dans chaque dimension.

On nomme section transverse d'une multiplicité A fermée, étendue d'une manière continue, chaque multiplicité B à nombre de dimensions moindre, connexe, comprise à l'intérieur de A, et dont la frontière est tout entière située sur la frontière de A.

La connexion d'une variété à n dimensions, par l'effet de chaque section transverse simplement connexe qui est elle-même une variété à $(n-m)$ dimensions, sera ou bien diminuée de 1 dans la $m^{\text{ième}}$ dimension, ou bien augmentée de 1 dans la $(m-1)^{\text{ième}}$ dimension.

La connexion dans la $\mu^{\text{ième}}$ dimension peut être seulement modifiée, ou bien si l'on transforme des variétés sans frontières à

μ dimensions, ne formant pas frontière, en variétés ayant des frontières, ou bien si l'on transforme de telles variétés, formant frontière, en variétés ne formant pas frontière; et le premier cas a lieu parce qu'il est ajouté ainsi de nouvelles portions à la frontière d'une variété à μ dimensions, et le second cas n'a lieu que parce qu'il en est ajouté de même à la frontière d'une variété à $\mu + 1$ dimensions.

Dépendance entre la connexion de la frontière B *d'une multiplicité* A, *étendue d'une manière continue, et la connexion de la multiplicité* A.

Les variétés à plusieurs dimensions, sans frontières, ne formant pas frontière à l'intérieur de B, se distribuent en variétés qui, intérieurement à A, ne forment pas frontière, et en variétés qui, intérieurement à A, forment frontière. Recherchons d'abord comment la connexion de B sera modifiée par l'effet d'une section transverse simplement connexe de A.

Soient n la dimension de A, m celle de la section transverse q; soit a une variété de dimension $(n - 1 - m)$, enveloppant un point de q et ne coupant pas q, et enfin soit p la frontière de q.

La connexion de A dans la $(n - 1 - m)^{\text{ème}}$ dimension sera augmentée de 1 lorsque, à l'intérieur de A', a ne forme pas frontière; dans la $(n - m)^{\text{ième}}$ dimension elle sera diminuée de 1 lorsque, à l'intérieur de A', a forme frontière (1).

$$A' - A = \begin{pmatrix} m + 1 \\ + 1 \end{pmatrix} \quad \text{quand, à l'intérieur de A', } a \text{ ne forme pas frontière } (\alpha);$$

$$= \begin{pmatrix} m \\ - 1 \end{pmatrix} \quad \text{quand, à l'intérieur de A', } a \text{ forme frontière } (\beta);$$

....(2)

(1) Ici se présente encore une certaine obscurité tenant à l'insuffisance des définitions. Il semble que l'on doit par A entendre la surface primitive, et par A' la surface A décomposée par la section transverse. — (L. L.)

(2) Ici l'on trouve encore dans le manuscrit quelques signes dont je n'ai pu déchiffrer le sens. — (WEBER.)

	MODIFICATIONS de A.	MODIFICATIONS de B.
I.		
a intérieurement à A' ne formant pas frontière, a intérieurement à B' ne formant pas frontière, par suite p intérieurement à B formant frontière..........	$\begin{pmatrix} m+1 \\ +1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m-1 & m \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$.
II.		
a intérieurement à A' formant frontière, a intérieurement à B' ne formant pas frontière, par suite p intérieurement à B formant frontière.................	$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m-1 & m \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$.
III.		
a intérieurement à A' formant frontière, a intérieurement à B' formant frontière, par suite p intérieurement à B ne formant pas frontière..................	$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m & m-1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Deux portions d'une variété à plusieurs dimensions (portions d'espace) sont dites connexes ou formées d'une seule pièce, lorsque d'un point intérieur à l'une on peut mener une ligne, passant par l'intérieur de la variété à plusieurs dimensions (espace), jusqu'à un point intérieur à l'autre.

Théorèmes *d'Analysis situs.*

1. Une variété à nombre de dimensions inférieur à $(n-1)$ ne peut séparer les unes des autres des portions d'une variété à n dimensions. Une variété connexe à n dimensions jouit de la propriété d'être morcelée par chaque section transverse formée par une variété à $(n-1)$ dimensions, ou bien elle n'en jouit pas.

Nous désignerons les variétés définies dans le premier de ces deux cas par a.

Lorsqu'une variété à n dimensions, faisant partie des a, est, par l'effet d'une section transverse, formée par une variété à $(n-2)$ dimensions, transformée en une autre variété, cette dernière est connexe et elle fait partie des a ou bien elle n'en fait pas partie.

Ces variétés a à n dimensions, qui sont transformées par chaqu section transverse, formée par une variété à $(n - 2)$ dimensions, en les variétés qui ne sont pas du type a, nous les désignerons par a_1.

2. Si une variété A à plusieurs dimensions est transformée par l'effet d'une section transverse, formée par une variété à μ dimensions, en une autre A', chaque section transverse de A ayant plus de $\mu + 1$ dimensions est aussi une section transverse de A', et réciproquement.

Si une des variétés a_1 à n dimensions est transformée par l'effet d'une section transverse formée par une variété à $(n - 3)$ dimensions, en une autre, celle-ci appartient alors aux $a(2)$, mais elle peut appartenir aux a_1, ou bien elle ne le peut pas.

Les variétés du type a_1 qui, par l'effet de chaque section transverse, formée par une variété à $(n - 3)$ dimensions, peuvent être transformées en les variétés qui ne sont pas du type a_1 : nous les désignerons par a_2.

Si l'on procède ainsi successivement, l'on arrive enfin à une catégorie a_{n-2} de variétés à n dimensions, qui embrasse celles des a_{n-3}, qui sont transformées par l'effet de chaque section transverse, formée par une variété à une dimension (linéaire), en celles qui ne sont pas du type a_{n-3}. Ces variétés a_{n-2} à n dimensions seront dites simplement connexes. Les variétés a_μ à n dimensions sont, par conséquent, simplement connexes, en tant que l'on fait abstraction de sections transverses à $(n - \mu - 2)$ dimensions, ou à dimensions inférieures à ce nombre, et seront dites simplement connexes jusqu'à la $(n - \mu - 2)^{\text{ième}}$ dimension [1].

Une variété à n dimensions qui n'est pas simplement connexe jusqu'à la $(n - 1)^{\text{ième}}$ dimension peut être décomposée par une section transverse, formée par une variété à $(n - 1)$ dimensions, sans être morcelée par l'effet de cette opération.

La variété à n dimensions ainsi formée, lorsqu'elle n'est pas

---

[1] Pour concorder avec ce qui suit, les variétés a_μ à n dimensions pourraient plutôt être dites simplement connexes jusqu'à la $(n - \mu - 1)^{\text{ième}}$ dimension. (WEBER.)

simplement connexe jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ dimension, pourra encore être décomposée de nouveau par une section transverse pareille, et l'on peut évidemment procéder ainsi successivement tant que l'on n'arrive pas à une variété simplement connexe jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ dimension.

Le nombre des sections transverses, par l'effet desquelles sera effectuée une telle décomposition de la variété à n dimensions en une variété simplement connexe jusqu'à la première dimension, peut différer selon le choix de la décomposition, mais il est clair que ce nombre est un minimum pour une certaine espèce de décomposition (1).

---

(1) On doit citer, concurremment avec ce fragment, un Mémoire de Betti [*Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (*Annali di Mat.*, 2e sér., tome IV; 1871)], que je ne connaissais pas encore lors de la publication de la première édition de Riemann, et qui renferme des conceptions et des développements analogues. — (WEBER.)