

feuillet supérieur de la surface se raccorde avec le feuillet inférieur en passant à travers le reste des feuillets.

La fonction multiforme admet en chaque point d'une surface, qui en représente ainsi le mode de ramification, *une seule* valeur déterminée, et peut donc être regardée comme une fonction parfaitement déterminée du lieu (d'un point) sur cette surface.

II. — Théorèmes de l'« *Analysis situs* » relatifs à la théorie des intégrales de différentielles totales à deux termes.

Dans l'étude des fonctions qui proviennent de l'intégration de différentielles totales, quelques théorèmes appartenant à l'*Analysis situs* sont presque indispensables. Sous cette désignation employée par Leibnitz, quoiqu'en un sens peut-être un peu différent, on peut ranger une partie de l'étude des grandeurs continues où l'on ne considère pas les grandeurs comme existant indépendamment de leur position et comme mesurables les unes par les autres, mais où l'on étudie seulement les rapports de situation des lieux et des régions, en faisant complètement abstraction de tout rapport métrique.

Comme j'ai l'intention, dans une autre occasion, de traiter ce sujet qui fait complètement abstraction des relations métriques, je me contenterai d'exposer sous forme géométrique quelques théorèmes nécessaires pour l'intégration des différentielles totales à deux termes.

Soit T une surface donnée, recouvrant une ou plusieurs fois le plan des (x, y) ⁽¹⁾, et soient X, Y des fonctions continues du lieu sur cette surface, telles que $Xdx + Ydy$ soit partout une différentielle totale, c'est-à-dire telles que l'on ait partout

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

On sait alors que

$$\int (Xdx + Ydy),$$

l'intégrale étant prise autour d'une partie de la surface T dans le

(1) Voir page 92.

sens positif ou négatif, — c'est-à-dire prise autour de tout le contour d'encadrement, soit toujours dans la direction positive, soit toujours dans la direction négative, par rapport à la normale extérieure (comparer la note au bas de la page 91, § I), — est nulle, puisque dans le premier cas cette intégrale est identique à l'intégrale de surface

$$\int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dT,$$

relative à cette partie de surface et, dans le second cas, est égale à l'expression ci-dessus changée de signe.

Par conséquent, l'intégrale

$$\int (X dx + Y dy),$$

prise entre deux points fixes, le long de deux chemins différents, a la même valeur lorsque ces deux chemins réunis forment l'encadrement complet d'une partie de la surface T. Par suite, lorsque, à l'intérieur de T, toute courbe qui se ferme en revenant sur elle-même forme le contour d'encadrement complet d'une partie de T, l'intégrale, prise à partir d'un point fixe initial jusqu'à un même point final, conserve toujours la même valeur et est une fonction de la position du point final continue partout sur T et indépendante du chemin d'intégration.

Ceci donne lieu à une distinction des surfaces en simplement connexes, où chaque courbe fermée encadre complètement une partie de la surface (comme, par exemple, un cercle), et en surfaces multiples connexes où ce fait n'a pas lieu (comme, par exemple, la couronne annulaire dont le contour est formé par deux circonférences concentriques). Une surface multiple connexe peut être transformée, par l'effet de coupures, en une surface simplement connexe. (*Voir les exemples et les figures à la fin de ce paragraphe.*)

Comme cette opération rend les plus importants services dans l'étude des intégrales de fonctions algébriques, nous présenterons ici rapidement les propositions qui y ont trait; elles sont valables pour des surfaces situées d'une façon quelconque dans l'espace.

Lorsque sur une surface F deux systèmes de courbes *a* et *b*

réunis forment le contour d'encadrement complet d'une partie de cette surface, tout autre système de courbes qui, réuni avec a , forme le contour d'encadrement complet d'une partie de F , forme aussi, lorsqu'il est réuni avec b , le contour d'encadrement d'une partie de surface, qui se compose alors des deux premières parties de surfaces situées le long de a (et cela par addition ou par soustraction, selon que ces deux parties ne sont pas situées du même côté de a ou bien le sont).

Les deux systèmes de courbes jouent donc le même rôle relativement à l'encadrement complet d'une partie de F , et peuvent donc se remplacer l'un l'autre dans ce but [1].

Quand sur une surface F l'on peut mener n courbes fermées a_1, a_2, \dots, a_n qui, soit qu'on les considère séparément, soit qu'on les considère réunies, ne forment pas un contour d'encadrement complet d'une partie de cette surface, mais qui, jointes à toute autre courbe fermée, forment alors le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface, la surface sera dite $(n + 1)$ fois connexe.

Ce caractère de la surface est indépendant du choix du système de courbes a_1, a_2, \dots, a_n , puisque n autres courbes fermées b_1, b_2, \dots, b_n , qui ne suffisent pas pour former le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface, encadreront aussi totalement, si on les réunit avec toute autre courbe fermée, une partie de F .

En effet, puisque b_1 , réunie avec les lignes a , encadre complètement une partie de F , une de ces courbes a peut être remplacée par b_1 et les courbes a restantes. Par conséquent, la réunion de b_1 et de ces $n - 1$ courbes a avec toute autre courbe, par exemple b_2 , suffira pour former l'encadrement complet d'une partie de F , et une de ces $n - 1$ courbes a peut être remplacée par b_1, b_2 et les $n - 2$ courbes a restantes. Lorsque, ainsi qu'il est supposé ici, les courbes b ne suffisent pas pour former le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface F , ce procédé peut évidemment être continué jusqu'à ce que toutes les courbes a soient remplacées par les b .

Une surface F , $(n + 1)$ fois connexe, peut, par l'effet d'une

section transverse ⁽¹⁾, c'est-à-dire d'une coupure partant d'un point du contour d'encadrement, traversant l'intérieur de la surface et aboutissant en un point du contour d'encadrement, être transformée en une surface F' , n fois connexe. Les parties du contour d'encadrement, à mesure qu'elles prennent naissance par l'effet de la section, jouent le rôle de contour pendant toute la continuation de cette opération, en sorte qu'une section transverse ne peut traverser aucun point de la surface plusieurs fois, mais peut prendre fin en un point de son propre cours antérieur.

Puisque les lignes a_1, a_2, \dots, a_n ne suffisent pas pour former l'encadrement complet d'une partie de F , il faut alors, lorsqu'on se figure F sectionnée par ces lignes, qu'aussi bien la portion de surface située le long du bord droit que la portion de surface située le long du bord gauche de a_n renferme encore une partie de contour d'encadrement distincte des lignes a et, par conséquent, faisant partie du contour de F . On peut donc, à partir d'un point de a_n , aussi bien à travers l'une de ces portions de surface qu'à travers l'autre, pratiquer une section ne traversant aucune des courbes a et aboutissant à l'encadrement de F . Ces deux lignes q' et q'' forment alors, par leur réunion, une section transverse q de la surface F , section qui remplit le but cherché.

En effet, considérons F' , surface en laquelle se décompose F par l'effet de cette section transverse; les lignes a_1, a_2, \dots, a_{n-1} ont leur parcours à l'intérieur de F' et sont des courbes fermées qui ne suffisent pas à former l'encadrement d'une partie de F et, par suite, non plus de F' . Mais toute autre courbe fermée l , ayant son parcours à l'intérieur de F' , forme alors avec ces lignes l'encadrement complet d'une partie de F' . En effet, la ligne l , jointe à un système des lignes a_1, a_2, \dots, a_n , forme l'encadrement complet d'une partie f de F . Or, on peut démontrer que, dans ce der-

(1) « Querschnitt. » Nous traduirons exclusivement ce mot allemand par section transverse, « taglio trasversale » (Casorati), « cross-cut » (Forsyth), comme le fait du reste M. Benoist dans la traduction des *Leçons* de Clebsch-Lindemann sur la Géométrie (Paris, Gauthier-Villars; 1879-1883); on marque bien ainsi l'opposition à la rétrosection « Rückkehrschnitt » (Picard, Appell et Goursat). Ce dernier mot du reste n'est pas employé par Riemann. Comparer la Dissertation inaugurale, § VI. — (L. L.)

nier encadrement, a_n ne peut se présenter; en effet, s'il en était ainsi, selon que f serait située sur le côté gauche ou sur le côté droit de a_n , q' ou bien q'' traverserait f pour aboutir en un point du contour de F , c'est-à-dire en un point qui n'appartient pas à f et, par suite, couperait le contour de f , ce qui serait contraire à l'hypothèse faite que l aussi bien que les lignes a , exception faite du point où a_n et q se coupent, sont toujours situées à l'intérieur de F' .

La surface F' , résultant de la décomposition de F par la section transverse q , est donc, ainsi qu'on l'avait affirmé, une surface n fois connexe.

Il s'agit maintenant de démontrer que la surface F , par l'effet de toute section transverse p , qui ne la décompose pas en portions séparées, est décomposée en une surface F' , n fois connexe. Lorsque les parties de surface, situées de part et d'autre de la section transverse p , sont connexes, c'est-à-dire ne sont pas séparées, on peut mener à travers F' une ligne b , partant d'un bord de la section transverse pour aboutir au même point sur le bord opposé.

Cette ligne b forme donc à l'intérieur de F une courbe fermée revenant sur elle-même et qui, puisque la section transverse conduit de part et d'autre de cette ligne à un point de l'encadrement, ne peut former le contour d'encadrement total d'aucune des deux portions de surface en lesquelles elle partage F . On peut donc remplacer une des courbes a par la courbe b , et chacune des $n - 1$ courbes a restantes par une courbe dont le cours est à l'intérieur de F' et encore, si cela est nécessaire, par la courbe b ; ce qui permet de démontrer, en se servant des méthodes de raisonnement employées auparavant, que F' est n fois connexe.

Une surface $(n + 1)$ fois connexe est décomposée, par conséquent, en une surface n fois connexe par toute section transverse qui ne la morcelle pas.

La surface qui prend naissance par l'effet d'une section transverse peut être encore décomposée à nouveau par une autre section transverse, et la répétition de cette opération n fois de suite transformera, au moyen de n sections transverses pratiquées successivement sans morcellement, une surface $(n + 1)$ fois connexe en une surface simplement connexe.

Pour rendre ces considérations applicables à une surface sans contour d'encadrement, c'est-à-dire une surface fermée, on devra transformer cette surface fermée en une surface qui possède un encadrement, en y pratiquant un trou en un point quelconque, de sorte que la première décomposition sera effectuée au moyen d'une section transverse partant de ce point pour y revenir et formant, par conséquent, une courbe fermée.

Par exemple, la surface extérieure d'un tore annulaire, surface triplement connexe, sera transformée en une surface simplement connexe au moyen d'une courbe fermée et d'une section transverse.

Nous allons maintenant appliquer la décomposition des surfaces multiplement connexes en surfaces simplement connexes à la considération de l'intégrale de la différentielle exacte

$$Xdx + Ydy,$$

traitée au commencement du § II actuel. Lorsque la surface T , qui recouvre le plan des (x, y) et sur laquelle X, Y sont des fonctions du lieu partout continues, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

est n fois connexe, on la décomposera en une surface T' simplement connexe en pratiquant n sections transverses.

Alors l'intégration de $Xdx + Ydy$, prise à partir d'un point fixe initial le long de courbes situées à l'intérieur de T' , fournit une valeur qui dépend seulement de la position du point final et qui peut être regardée comme fonction des coordonnées de ce point.

Substituant à ces coordonnées les grandeurs x, y , on obtient une fonction de x, y ,

$$z = \int (Xdx + Ydy)$$

complètement déterminée pour tout point de T' et variant partout à l'intérieur de T' d'une manière continue, mais qui, à la traversée d'une section transverse, varie en général d'une grandeur finie constante le long de la ligne qui mène d'un nœud du réseau de sections à un autre nœud.

Les variations à la traversée des sections transverses dépendent de grandeurs indépendantes entre elles dont le nombre est égal à celui des sections transverses; en effet, si l'on parcourt le réseau de sections dans le sens rétrograde, chaque section transverse devant être parcourue en commençant par son extrémité finale, chaque variation est partout déterminée, lorsque l'on en donne la valeur au commencement de la section transverse; mais ces valeurs sont indépendantes entre elles.

Pour donner une représentation plus intuitive de ce que l'on doit entendre par les surfaces n fois connexes que nous avons définies précédemment, nous faisons suivre ici des exemples figurés de surfaces simplement, doublement et triplement connexes.

Surface simplement connexe.

Toute section transverse, que l'on y pratiquerait, morcellerait

Fig. 4.

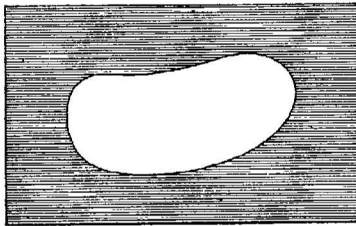
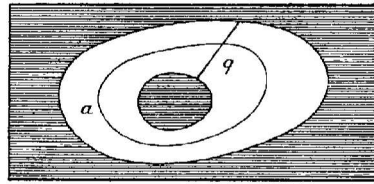


Fig. 5.



cette surface (*fig. 4*), et toute courbe fermée qui y suit son cours forme l'encadrement complet d'une partie de la surface.

Surface doublement connexe.

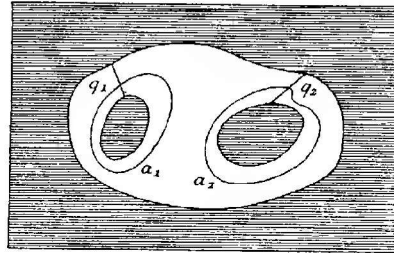
Cette surface (*fig. 5*) est décomposée en une surface simplement connexe par toute section transverse q qui ne la morcelle pas.

Par l'adjonction de la courbe a , toute courbe fermée peut alors former l'encadrement total d'une partie de la surface.

Surface triplement connexe.

Sur cette surface (fig. 6 ou 7) toute courbe fermée peut, avec l'adjonction des courbes a_1 et a_2 , former l'encadrement total

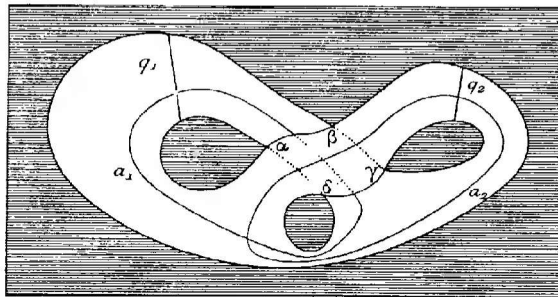
Fig. 6.



d'une partie de la surface. Elle est décomposée par toute section transversale qui ne la morcelle pas en une surface doublement connexe, et deux pareilles sections transversales q_1 et q_2 la décomposent en une surface simplement connexe.

Dans la partie $\alpha\beta\gamma\delta$ le plan est recouvert deux fois par la surface. En cette partie, le feuillet de la surface sur lequel a_1 suit son

Fig. 7.



cours doit être considéré comme passant sous l'autre; c'est ce que l'on a indiqué en ponctuuant les lignes sur cette partie.