

Flip de demi-périmètres de rectangles dans les chemins de la source au puits, existence d'un chemin de longueur $2n$, qu'on peut couper en deux chemins de longueur n , Denise Vella-Chemla, mai 2026

Notre but est inchangé : démontrer la conjecture de Goldbach, en utilisant une certaine voie détournée qui nous a fait déplacer le problème dans la théorie des graphes, avec calcul de plus courts chemins, qu'on peut modéliser en algèbre (`min`, `plus`). Il manque un élément essentiel à la preuve qui est qu'il faut montrer, ce qu'on aimerait débiter ici, qu'il existe un chemin de la source S au puits P (on va appeler l'ensemble des chemins l'espace des chemins du graphe) que l'on peut couper en deux sous-chemins de longueur n .

On suppose ici connu le graphe triangulaire sur lequel cette recherche est effectuée : il contient $\frac{n(n+1)}{2}$ points, disposés en triangle rectangle isocèle avec angle droit en l'origine dans le plan euclidien, chaque arête qui joint le sommet (i, j) aux deux seuls sommets $(i, j - 1)$ et $(i + 1, j)$ a un poids (qui est en fait soit le premier nombre premier impair 3, soit un écart entre deux nombres premiers successifs $p_{k+1} - p_k$, soit l'écart entre le plus grand nombre premier p_{\max} (compris entre 3 et $n - 3$ inclus) et le nombre pair n dont on cherche une décomposition de Goldbach).

Ici, on pense à une opération, connue en informatique, qui intervient dans les triangulations de Delaunay, et qui s'appelle le "edge flip" (en français, on pourrait dire le "change de diagonale" car il s'agit de passer d'une triangulation d'un quadrilatère $ABCD$ par la diagonale AC qui donne les deux triangles ABC et CAD en la triangulation par la diagonale BD qui donne les deux triangles ABD et DBC).

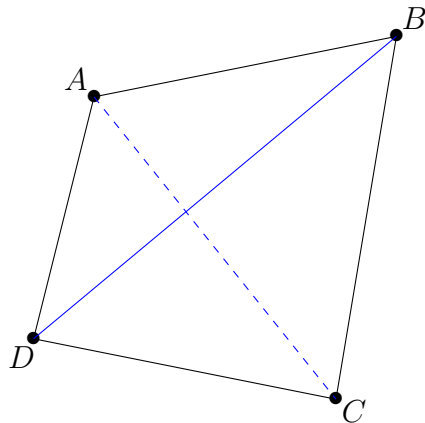


FIGURE 1 : un changement d'arête

Mais il faut adapter cette idée à notre problème spécifique : il s'agira de "changer de demi-périmètre" de parcours pour les rectangles qui pavent notre triangle rectangle isocèle ; on peut parcourir un rectangle par ses arêtes (*gauche, basse*) ou bien par ses arêtes (*haute, droite*) selon la figure 2 ci-après.

Précisons cela : les arêtes étant toutes orientées du haut vers le bas pour les arêtes verticales et de la gauche vers la droite pour les arêtes horizontales, on entrera toujours dans un rectangle par son coin haut-gauche, et là, deux options s'offrent à nous, soit le parcourir "dans le sens des aiguilles

d'une montre", en parcourant ses arêtes dans l'ordre (*haute, droite*), soit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, en parcourant ses arêtes dans l'ordre (*gauche, basse*).

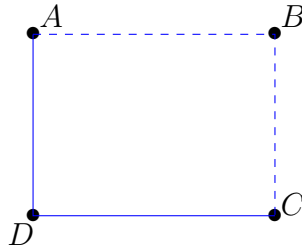


FIGURE 2 : un changement de demi-périmètre

Le *changement de demi-périmètre* permet de parcourir le graphe qui représente l'espace des chemins de S à P (attention, ce graphe est différent du graphe triangulaire T , ses sommets sont des chemins de S à P , ses arêtes sont des modifications d'une certaine fonction de coût, par exemple la longueur du chemin de S à un certain sommet C du graphe T . Ce qu'il faut alors démontrer pour démontrer la conjecture de Goldbach, c'est qu'on peut atteindre un chemin, qui a sa longueur de S à C qui est exactement n , avant d'atteindre le "dernier chemin", qui est le chemin plein de petits $1/2$ carrés qui constitue la "plus longue" diagonale de notre graphe T (ou hypoténuse du triangle rectangle isocèle "en escalier").

Tenons-nous le bon... chemin ?...

Lecture de la référence [2]

Ci-dessous, on recopie en le traduisant un extrait de la référence en question. On note qu'il s'agit d'un emprunt en indentant sur une largeur de page plus étroite.

La figure 3.7 montre le graphe des échanges d'arêtes d'un ensemble de 6 points. Chaque nœud rouge du graphe correspond à la triangulation dessinée dans le nœud. Le graphe des échanges d'arêtes a 9 nœuds et 11 arcs.

À la page 82, sont fournies les définitions suivantes :

Définition : Soit e une arête d'une triangulation T_1 , et soit Q le quadrilatère de T_1 formé par les deux triangles ayant e comme arête commune. Si Q est convexe, appelons T_2 la triangulation obtenue après avoir "échangé e " dans T_1 . On dit que e est une *arête légale* si $T_1 \geq T_2$ et une arête illégale si $T_1 < T_2$.

Les pages en papier glacé du livre [2] présentent des illustrations sublimes, et des explications édifiantes. On y voit le "flip-graph", ou graphe des échanges d'arêtes, p. 67 de l'édition-papier dont on dispose, et qu'on reproduit ci-dessous, avec l'explication correspondante :

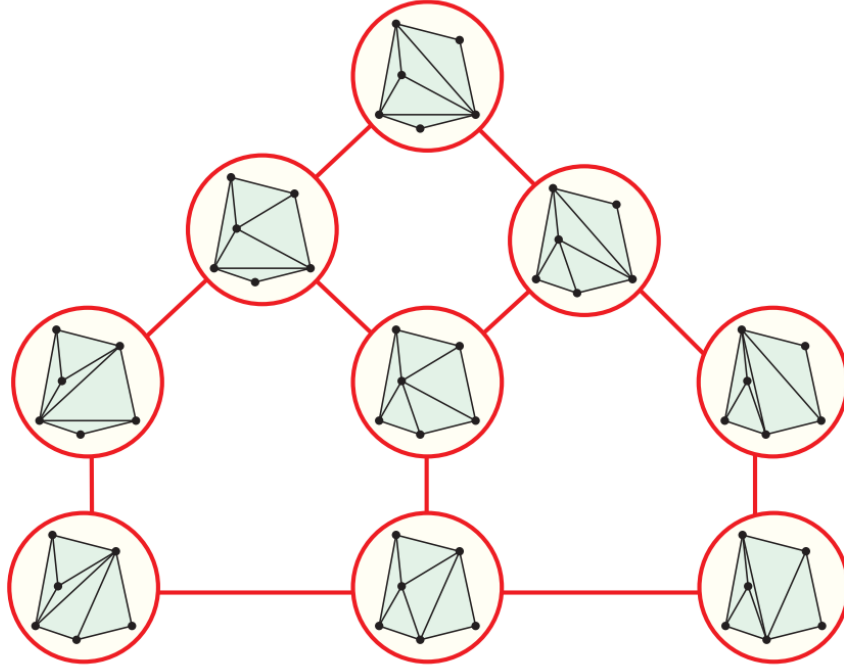


FIGURE 3 : le graphe des échanges d'arêtes dans la triangulation de l'ensemble de 6 sommets considéré

Notons qu'échanger une arête e altère 6 angles dans la suite d'angles T_1 , en les remplaçant par 6 angles (en général) différents dans la suite T_2 . Donc l'effet d'un échange est en général complexe. Mais la définition repose juste sur l'ordre lexicographique des 2 triangulations, en ignorant les détails de la façon dont cet ordonnancement est réalisé. Cela aide à compléter la définition pour déclarer que toutes les arêtes de fermeture d'une triangulation sont légales. Comme notre but est de trouver la triangulation la plus grosse, nous essayons d'éviter les arêtes illégales dans nos triangulations.

Définition : Pour un ensemble de points S , une *triangulation de Delaunay* de S dénotée $Del(S)$, est une triangulation ne contenant que des arêtes légales.

On appelle ainsi cette triangulation à cause de Boris Delaunay, un mathématicien russe qui a vécu de 1890 à 1980. Il n'est pas immédiat que tout ensemble de points ait une triangulation de Delaunay. Est-il possible de retirer toutes les arêtes illégales dans une triangulation sans en introduire de nouvelles durant le processus de retrait d'arête ? L'algorithme suivant répond OUI et construit la triangulation de Delaunay d'une façon remarquablement simple.

L'échange d'arête ou *Algorithme de triangulation de Delaunay*

Soit S un ensemble de points en position générale, sans sous-ensemble de 4 points qui soient cocirculaires. Commençons avec n'importe quelle triangulation T . Si T contient une arête illégale, rendre l'arête légale. Continuer à échanger les arêtes illégales, en parcourant le graphe dans n'importe quel ordre, jusqu'à ce qu'il ne subsiste aucune arête illégale.

Parce que les arêtes illégales sont échangées,

la suite d'angles de la nouvelle triangulation décroît strictement,

et donc une triangulation déjà vue ne peut jamais réapparaître au cours du processus. Et comme le nombre de nœuds du graphe d'échange est fini, cet algorithme doit s'arrêter à un moment donné.

Par construction, la triangulation de Delaunay résultante sera plus grosse que toutes ses voisines dans le graphe d'échange. En d'autres termes, elle sera un maximum local. Mais cela n'implique pas nécessairement qu'elle soit un maximum global de tous les nœuds du graphe d'échange. On reporte au chapitre suivant le fait que c'est effectivement le cas : la triangulation de Delaunay est le maximum global unique des triangulations, la triangulation la plus grosse de toutes les triangulations de S .

(S'ensuit la preuve, de 3 pages, basée sur un théorème de Thalès).

Un paragraphe très intéressant du livre de ce même livre de Devadoss et O'Rourke est le § 5.5, p. 138, qui traite de raccourcissement de courbe. Les points de vue continu/courbes lisses (équation (5.1)) et discret/courbes brisées (équation (5.3)) sont présentés et pour le problème qui nous intéresse, et qui consiste à raccourcir un chemin de S à P de façon à ce qu'il existe sur ce chemin un point qui est un centre du graphe T et qui est d'excentricité n (se reporter à la note de synthèse de ce travail ici), si la distance de S à P est $2n$ avec n un nombre pair qu'on souhaite décomposer en la somme de deux nombres premiers $p + q$ (les nombres premiers s'avérant être, pour p , la somme des arêtes verticales du chemin, et pour q , la somme des arêtes horizontales du chemin quant à l'autre), le dessin qui accroche le regard est celui-ci :

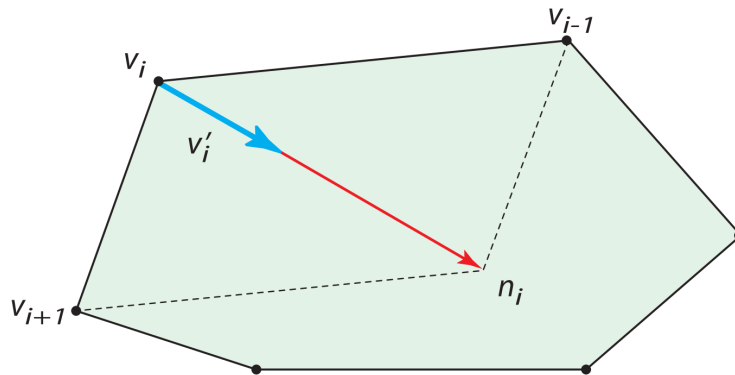


FIGURE 4 : mouvement d'un point d'un chemin général discret, et par conséquent modification du chemin, lorsqu'on choisit de remplacer ce point par un autre point dans le chemin considéré

car ce dessin fait sentir que notre algorithme de parcours de rectangles dans le sens des aiguilles d'une montre ou pas consistera à faire bouger les sommets du chemin initial, appelons-le

$$\text{SOP} = \{s_1 = S, \dots, s_{2n} = P\},$$

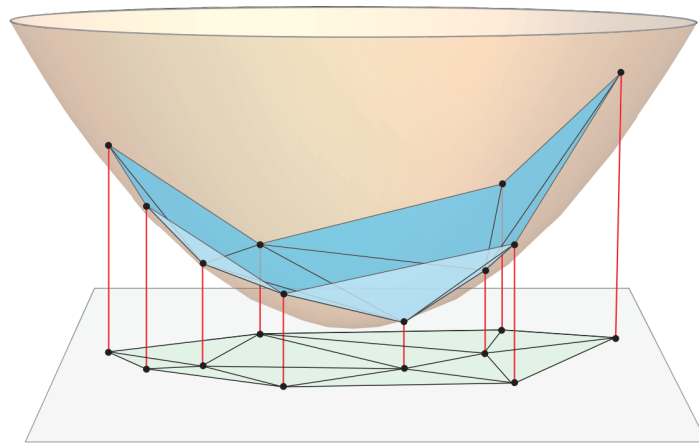
qui va de S à P en passant par l'origine (tout en bas à gauche) pour obtenir en fin d'application de l'algorithme un chemin de sommets qui relie S au centre C puis C à P , de la forme

$$\text{SCP} = \{s'_1 = S, \dots, s'_{2n} = P\}$$

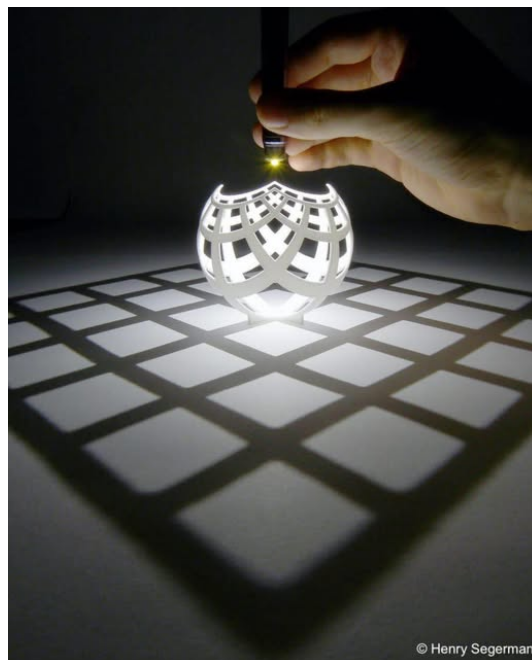
avec les sommets s' intermédiaires qui ont été changés par leur sommet opposé dans l'un des rectangles du pavage, parce que le chemin était "meilleur".

Le paragraphe § 5.6. "*Équation de la chaleur*" de ce chapitre 5 montre que les flots continu et discret sont les analogues géométriques d'un flot plus général, décrit par l'équation de la chaleur¹, mais nous n'irons pas plus loin dans ces "emprunts" à ce livre.

Enfin, ce dessin sublime du livre



ou bien cette photo trouvée sur la toile



¹ce qui aurait tendance à nous conforter dans notre intuition

font penser que le graphe triangulaire pourrait aussi être vu comme la projection d’un ensemble de points de la sphère, mais on ne considérera pas cette idée dans l’immédiat.

La bibliographie du chapitre 3 de ce livre est :

- [a] Marshall Bern. Triangulations, dans Jacob E. Goodman, Joseph O’Rourke, édés, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapitre 25, pages 563–582. CRC Press LLC, 2nde édition, 2004.
Un survol succinct et qui fait autorité par l’un des experts mondiaux sur le sujet des triangulations, incluant ce que l’on appelle la “tétraédrisation” de polyèdres et le partitionnement en simplexes dans les dimensions supérieures.
- [b] Herbert Edelsbrunner. *Geometry and Topology for Mesh Generation*. Cambridge University Press, 2001.
Un joyau de livre se concentrant sur les maillages par des triangles en 2D ou des tétraèdres en 3D, avec les triangulations de Delaunay comme thème central tout au long de l’exposition. Les preuves sont concises, presque lapidaires.
- [c] Charles Lawson. Transforming triangulations. *Discrete Mathematics*, Volume 3, pages 365–372, 1972.
Un papier lisible qui a établi pour la première fois la notion de *flip* (échange) et a prouvé que le graphe des échanges d’arêtes d’un ensemble planaire de points est connexe.
- [d] Daniel Sleator, Robert Tarjan, and William Thurston. Rotational distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *Journal of the American Mathematical Society*, Volume 1, pages 647–681, 1988.
Un article remarquable et influent qui étudie le diamètre du graphe des échanges d’arêtes d’un polygone (entre autres choses) en utilisant la combinatoire et la géométrie des tétraèdres hyperboliques.
- [e] Jonathan Shewchuck. TRIANGLE: A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>.
Un code robuste pour calculer les triangulations de Delaunay exactes et de nombreuses variantes.
- [f] Jon McCammond. Noncrossing partitions in surprising locations. *American Mathematical Monthly*, Volume 113, pages 598–610, 2006.
Une vision géométrique des nombres de Catalan, des triangulations, et des associaèdres dans plusieurs contextes mathématiques. Un beau survol des associaèdres est donné par Bill Casselman à cette adresse <https://www.ams.org/featurecolumn/archive/associahedra.html>.

Annexe 1 : traduction d’un extrait de la troisième édition du livre [1]

La réédition de [1] a des auteurs différents : M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars et a été publiée par Springer en 2008. La notion de “edge-flip” apparaît p. 194. On la traduit

ci-dessous :

[...] Maintenant, considérons une arête $e = \overline{p_i p_j}$ d'une triangulation \mathcal{T} de P . Si e n'est pas une arête de la face non bornée, elle est incidente à deux triangles $p_i p_j p_k$ and $p_i p_j p_l$. Si ces deux triangles forment un quadrilatère convexe, on peut obtenir une nouvelle triangulation \mathcal{T}' en retirant $\overline{p_i p_j}$ de \mathcal{T} et en insérant $\overline{p_k p_l}$ à la place. On appelle cette opération un *échange d'arête*. La seule différence dans le vecteur angulaire de \mathcal{T} et \mathcal{T}' , ce sont les 6 angles $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ dans $A(\mathcal{T})$, qui sont remplacés par $\alpha'_1, \dots, \alpha'_6$ dans $A(\mathcal{T}')$. La figure 9.4 montre cela. On dit que l'arête $e = \overline{p_i p_j}$ est une *arête illégale* si

$$\min_{1 \leq i \leq 6} \alpha_i < \min_{1 \leq i \leq 6} \alpha'_i.$$

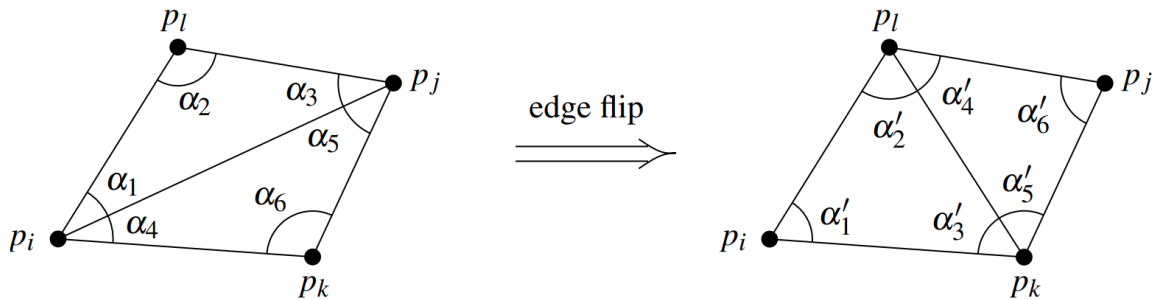


Figure 9.4 : échanger une arête

Annexe 2 : Traduction de l'extrait du livre [3] (p. 9 ou 10 suivant l'édition) présentant l'algorithme d'échange d'arête

Algorithme d'échange d'arête. Si ab appartient à deux triangles, abd et abc dont l'union est un quadrilatère convexe, alors on peut échanger ab et cd . Formellement, cela signifie qu'on retire ab, abc, abd de la triangulation et qu'on ajoute cd, acd, bcd à la triangulation, comme dans la figure I.10.

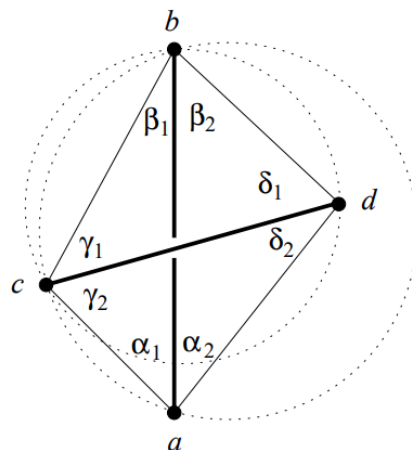


FIGURE I.10 : échanger ab et cd . Si ab n'est pas localement de Delaunay alors l'union des deux triangles est convexe et cd est localement de Delaunay.

La figure d'un échange ressemble à un tétraèdre avec l'avant et l'arrière en surimpression. On peut utiliser les échanges d'arête comme des opérations élémentaires pour convertir une triangulation arbitraire K en une triangulation de Delaunay. L'algorithme utilise une pile et maintient l'invariant qu'une arête ne reste sur la pile que si elle est localement de Delaunay.

Algorithme en prose :

```

Tant que la pile n'est pas vide:
  pop  $ab$  de la pile et le décocher ;
  si  $ab$  n'est pas localement de Delaunay
  alors
    échanger  $ab$  et  $cd$ .
    pour tout  $xy \in \{ac, cb, bd, da\}$ 
      si  $xy$  est décochée
        alors cocher  $xy$  et le déposer sur la pile
      fin si
    fin pour tout
  fin si
fin tant que.

```

Soit n le nombre de points. La quantité de mémoire utilisée par l'algorithme est $O(n)$ parce qu'il y a au plus $3n - 6$ arêtes, et que la pile contient au plus une copie de chaque arête. À l'instant où l'algorithme s'arrête, toute arête est localement de Delaunay. Par le lemme de Delaunay^a, la triangulation est alors la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points.

Cercle et plan

Avant de démontrer que cette algorithme s'arrête...

^aSi toute arête de K (une triangulation de l'ensemble de points S) est localement de Delaunay, alors K est une triangulation de Delaunay de S (un ensemble de points).

Les articles de bibliographie du paragraphe 1.2 "Échange d'arêtes" de ce livre sont les suivants :

- [f] B. Delaunay, Sur la sphère vide, *Izv. Akad. SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk* 7, 1934, 793-800.
- [g] H. Edelsbrunner, T. S. Tan, R. Waupotitsch, An $O(n^2 \log n)$ time algorithm for the minmax angle triangulation, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13, 1992, 994-1008.
- [h] C. L. Lawson, Software for C^1 surface interpolation, *Mathematical Software III*, Academic Press, New York, 1977, 161-194.
- [i] L. L. Schumaker, Triangulation methods, *Topics in multivariate approximation*, C. K. Choi, L. L. Schumaker, F. I. Utreras (éds), Academic Press, New York, 1987, 219-232.
- [j] R. Sibson, Locally equiangular triangulations, *Comput. J*, 21, 1978, 243-245.

La bibliographie globale de ce début de recherche est :

Bibliographie

- [1] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational geometry, algorithms and applications*, Springer, 1997.
- [2] S. L. Devadoss, J. O'Rourke, *Discrete and computational geometry*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2011.
- [3] H. Edelsbrunner, *Geometry and topology for mesh generation*, Cambridge monographs on applied and computational mathematics, Cambridge University Press, 2001.
- [4] O. Hjelle, M. Dæhlen, *Triangulations and applications*, Springer, 2006.
- [5] D. E. Knuth, *Axioms and Hulls*, Lecture Notes in Computer Science, 606, Springer-Verlag, 1992.