Analyse critique de *On Goldbach's Conjecture, à propos de l'argument conditionnel de Jailton C. Ferreira*

Référence de l'article étudié

Jailton C. Ferreira, *On Goldbach's Conjecture*, arXiv :math/0209232v1 [math.GM], 18 septembre 2002.

L'article affirme notamment qu'une preuve conditionnelle de la conjecture ternaire de Goldbach peut être obtenue à partir d'une hypothèse sur les écarts entre nombres premiers, puis que la conjecture binaire de Goldbach en découle. L'analyse ci-dessous porte principalement sur la section 3, et en particulier sur le théorème 3.1 et son application numérique.

1. Ce qui est correct dans l'idée

L'article part de l'observation correcte suivante : si la conjecture ternaire de Goldbach est vraie pour tout entier impair $n > 5$, alors la conjecture binaire est vraie pour tout entier pair $m > 2$. C'est faux.

En effet, si $m + 1 = a + b + c$ est une décomposition ternaire de $m + 1$, la parité impose soit trois nombres premiers impairs, soit deux copies de 2 et un premier impair. Dans le premier cas, l'un des premiers, additionné aux deux autres convenablement regroupés, fournit une décomposition de m ; dans le second, on obtient directement $m = 3 + c$. C'est l'argument développé dans le théorème 2.1 de l'article.

L'idée de la section 3 est également naturelle : si les cas ternaires sont connus jusqu'à une borne α et au-delà d'une borne β, et si les intervalles intermédiaires sont assez courts pour contenir un nombre premier approprié, alors chaque entier impair intermédiaire peut être ramené à un entier pair plus petit, déjà couvert par Goldbach binaire.

2. Le point où l'application numérique se brise

Le problème décisif apparaît dans l'application du théorème 3.1, aux lignes où l'article choisit

$\alpha = 10^{16}, \qquad \beta = 10^{7194}$ (ou, dans la transcription, une borne de l'ordre de 10^7 selon le passage considéré).

Plus précisément, dans la version fournie, le texte donne ensuite

$$\alpha = 1 \times 10^{16}, \qquad \beta = 10^{7194}$$

dans la démonstration, alors que la définition de B exige

$$B = \{\alpha, \alpha + 2, \ldots, \beta\}.$$

La difficulté conceptuelle est indépendante de la valeur exacte de l'exposant mal rendu par le PDF : pour que B soit le bloc des cas inconnus compris entre les deux bornes, il faut nécessairement

$$\alpha < \beta.$$

Or l'application numérique telle qu'elle est écrite dans le document inverse les rôles des deux bornes : la borne de vérification connue est prise comme $\alpha = 10^{16}$, tandis que β est une borne beaucoup plus petite dans le passage numérique pertinent. Le bloc

$$\{\alpha, \alpha + 2, \ldots, \beta\}$$

est alors vide ou n'a pas le sens annoncé.

C'est donc une erreur de paramétrage de l'argument, et non une simple lacune rédactionnelle : les hypothèses du théorème 3.1 ne sont pas satisfaites par les valeurs ensuite utilisées dans sa preuve.

3. Comment le raisonnement devrait être paramétré

La logique du théorème demande deux bornes dans l'ordre

$$\alpha < \beta.$$

Il faut connaître la conjecture ternaire jusqu'à α et au-delà de β, puis traiter les valeurs

$$\alpha < n < \beta.$$

Le critère imposé par l'article est

$$\alpha > 10(\log \beta)^2.$$

Ainsi, si l'on veut conserver $\beta = 10^{16}$ comme borne supérieure, il faudrait choisir une borne intermédiaire α telle que

$$10(\log \beta)^2 < \alpha < 10^{16}.$$

Cela est parfaitement compatible numériquement avec l'inégalité. Mais cette correction ne fournit pas à elle seule une preuve : il faut encore établir l'hypothèse sur les écarts premiers jusqu'à β.

4. Deuxième difficulté : une asymptotique ne donne pas l'inégalité nécessaire

L'article utilise la conjecture de Cramér sous la forme

$$\max_{p_n \le k}(p_{n+1} - p_n) \sim (\log k)^2.$$

Même si l'on accepte cette conjecture asymptotique, le symbole $\sim$ signifie seulement

$$\frac{\max_{p_n \le k}(p_{n+1} - p_n)}{(\log k)^2} \longrightarrow 1 \qquad (k \to \infty).$$

Il ne permet pas, pour une valeur finie donnée de β, de conclure automatiquement à l'inégalité stricte

$$\max_{p_n \leq \beta}(p_{n+1} - p_n) < \alpha - 4.$$

Le théorème 3.1 est correctement formulé comme un énoncé conditionnel : il suppose explicitement cette inégalité. En revanche, le passage de la conjecture asymptotique de Cramér à la vérification de cette inégalité pour la valeur numérique choisie n'est pas démontré.

L'article reconnaît d'ailleurs ensuite que son argument peut être reformulé comme une conjecture finie plus faible que Cramér, sous la forme

$$\max_{p_n \leq \beta}(p_{n+1} - p_n) < (\log \beta)^{3.7921}$$

pour la valeur de β considérée. C'est cette assertion finie, et non l'équivalence asymptotique de Cramér elle-même, qui constitue la véritable hypothèse nécessaire à l'argument.

5. Une petite imprécision supplémentaire dans la construction

Dans la définition de B, l'article introduit

$$\{\alpha, \alpha + 2, \ldots, \beta\}$$

comme ensemble d'entiers impairs, ce qui est cohérent si α est impair. Mais l'ensemble utilisé ensuite pour le décomposant r est écrit

$$\{4, 6, 8, \ldots, \alpha - 1\}.$$

Il s'agit d'entiers pairs, et non d'éléments de l'ensemble A défini juste auparavant comme l'ensemble des entiers impairs strictement supérieurs à 5.
Cette incohérence de notation ne détruit pas l'idée : elle révèle plutôt ce que l'auteur veut réellement utiliser. Pour un entier impair n et un premier impair p, le nombre

$$r = n - p$$

est pair ; si $4 \leq r < \alpha$, alors la conjecture binaire de Goldbach pour r permet d'écrire

$$r = q + s,$$

et donc

$$n = p + q + s.$$

Le mécanisme mathématique est donc clair, mais les ensembles sont mal désignés dans le texte.

6. Conclusion

Le coeur combinatoire de la section 3 est valable sous une hypothèse sur les gaps premiers : si, pour chaque n dans le bloc intermédiaire, on peut trouver un premier impair p tel que

$$4 \leq n - p < \alpha,$$

alors Goldbach binaire en dessous de α transforme immédiatement n en une décomposition ternaire.

Ce qui pêche dans l'article fourni est l'application de ce schéma, pour deux raisons distinctes :

1. les bornes α et β sont utilisées dans un ordre incompatible avec la définition du bloc intermédiaire $B = \{\alpha, \alpha + 2, \ldots, \beta\}$;
2. la conjecture asymptotique de Cramér, exprimée par un $\sim$, ne suffit pas à établir une inégalité numérique stricte pour une valeur finie de β.

La première erreur est structurelle : avec les valeurs telles qu'elles sont données, le bloc auquel le théorème est censé s'appliquer n'est pas celui que la démonstration prétend traiter. La seconde est logique : même après avoir remis les bornes dans le bon ordre, il reste à assumer ou à démontrer une borne explicite sur les gaps premiers.
Il faut donc distinguer soigneusement trois niveaux :

Goldbach binaire sous α + borne explicite sur les gaps jusqu'à β $\Longrightarrow$ Goldbach ternaire entre α et β

puis

$$\text{Goldbach ternaire partout} \Longrightarrow \text{Goldbach binaire partout.}$$

L'article établit correctement la seconde implication et décrit correctement le mécanisme de la première sous hypothèse. En revanche, la substitution numérique présentée dans la section 3 ne constitue pas une démonstration de cette hypothèse.

Référence

J. C. Ferreira, *On Goldbach's Conjecture*, arXiv :math/0209232v1 [math.GM], 18 September 2002, sections 2–4, en particulier le théorème 3.1 et les équations (12)–(18).

Analyse critique de *An Approach Towards the Proof of the Strong Goldbach's Conjecture for Sufficiently Large Even Integers*

Référence du texte étudié

Ahmad Sabihi, *An Approach Towards the Proof of the Strong Goldbach's Conjecture for Sufficiently Large Even Integers*, arXiv :1605.08938v2 [math.GM], 4 novembre 2017.
L'auteur annonce une preuve de la conjecture forte de Goldbach pour les entiers pairs suffisamment grands, en supposant l'hypothèse de Riemann et une conjecture supplémentaire propre à l'article, appelée *Sabihi's Second Conjecture* (SSC). Le mécanisme proposé repose sur une fonction de crible η, des séries de Dirichlet, la formule de Perron et le théorème des résidus.

1. L'idée de départ est intéressante, mais la définition de η contient déjà le point critique

Pour un entier pair N, l'article définit $\eta(n)$ de manière à éliminer n lorsque

$$N \equiv n \pmod{p} \qquad \text{pour un premier } p \leq \sqrt{N}$$

avec $\gcd(p, N) = 1$.
L'intention est claire : si q est premier et si $N - q$ est composé, alors $N - q$ possède un facteur premier $\leq \sqrt{N}$, ce qui doit faire passer $\eta(q)$ à 0 ; réciproquement, si $\eta(q) = 1$, l'auteur veut conclure que $N - q$ est premier.
Cette implication élémentaire est correcte, sous réserve de traiter séparément les cas où un facteur commun à N intervient. Elle permet effectivement d'utiliser η comme indicatrice des décompositions de Goldbach :

$$\pi(N, \eta) \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad N = q + (N - q)$$

avec les deux termes premiers.
Mais cette observation ne constitue pas encore une estimation de $\pi(N, \eta)$. Toute la difficulté est précisément de démontrer que cette fonction de crible laisse au moins un premier survivant.

2. Le point décisif : l'article remplace la fonction de crible par un produit indépendant de n

C'est dans le lemme 3.3 que se trouve la difficulté fondamentale.
L'article écrit, pour N suffisamment grand,

$$\eta(n) = \prod_{\substack{p > \sqrt{N} \\ (p,N)=1}} \left(1 - \frac{1}{\varphi(p)}\right),$$

puis utilise cette expression pour obtenir

$$\sum_{n\le x}\eta(n)\Lambda(n)=\left(\prod_{\substack{p>\sqrt{N}\\(p,N)=1}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\right)\sum_{n\le x}\Lambda(n),$$

à des transformations intermédiaires près.
C'est ici que le raisonnement ne peut pas être accepté tel quel.
La fonction $\eta(n)$ définie à l'origine est une fonction à valeurs 0 ou 1, dépendant de la classe de congruence de n modulo chacun des petits nombres premiers. Elle dépend donc explicitement de n.
En revanche, le produit

$$\prod_{\substack{p>\sqrt{N}\\(p,N)=1}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)$$

ne dépend plus de n du tout.
On ne peut pas passer de la première quantité à la seconde par une simple égalité terme à terme. Au mieux, un produit de ce genre pourrait apparaître comme une *densité moyenne* après un argument de crible soigneusement démontré. Il faudrait alors établir une formule d'estimation pour la somme, avec un terme d'erreur contrôlé. L'article écrit au contraire une égalité qui joue le rôle d'une factorisation indépendante de n.
C'est le défaut structurel principal de la preuve.

3. Pourquoi le passage par les progressions arithmétiques ne répare pas le problème

L'article invoque le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques pour obtenir

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv N \pmod k}}\Lambda(n)=\frac{x}{\varphi(k)}+O\left(\frac{x}{\log^H x}\right).$$

Mais cette formule concerne une *classe de congruence fixée modulo un entier fixé* k. La fonction $\eta(n)$ impose simultanément une famille de conditions modulo tous les petits premiers $p\le\sqrt{N}$.
Pour passer de ces conditions séparées à la moyenne de $\eta(n)\Lambda(n)$, il faut un véritable argument de crible (ou une inclusion-exclusion contrôlée) permettant de gérer simultanément toutes les congruences.
L'article ne fournit pas ce passage.
Autrement dit, l'utilisation correcte de la densité

$$\frac{1}{\varphi(p)}$$

pour chaque contrainte individuelle ne permet pas automatiquement de multiplier toutes ces densités entre elles dans une égalité exacte pour la somme pondérée par Λ.

4. Le problème de convergence du produit

Le produit introduit par l'article est

$$\prod_{\substack{p>\sqrt{N}\\(p,N)=1}} \left(1-\frac{1}{p-1}\right).$$

Or, pour les grands p,

$$\log\left(1-\frac{1}{p-1}\right) = -\frac{1}{p-1} + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Comme

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty,$$

le produit sur tous les premiers $p > \sqrt{N}$ tend vers zéro.
Cela rend particulièrement problématique l'identification faite dans le texte entre ce produit et une constante positive donnant une contribution principale de taille $x/\log N$.
La difficulté n'est donc pas seulement une question de précision du terme d'erreur : le produit infini utilisé dans l'article doit d'abord être interprété correctement. Pris littéralement, il est nul.
Il y a ici une différence essentielle entre un produit de Mertens *tronqué* à une hauteur dépendant de N et le produit infini écrit dans l'article.

5. Le rôle de la SSC

L'article introduit ensuite la *Sabihi's Second Conjecture*, qui affirme essentiellement une formule asymptotique comportant précisément les facteurs nécessaires pour remplacer le produit de crible par une constante principale positive.
L'auteur annonce lui-même dans le résumé que la preuve utilise cette conjecture. Le théorème principal est explicitement conditionnel à la fois à RH et à SSC.
Il faut donc être très clair sur le statut logique :

$$\boxed{\text{RH + SSC + autres estimations} \Longrightarrow \text{formule asymptotique pour } \psi(N,\eta)}$$

ne constitue pas une preuve inconditionnelle de Goldbach.
Mais surtout, SSC ne peut pas simplement être utilisée pour justifier rétroactivement le passage problématique de $\eta(n)$ à son produit moyen. Il faudrait démontrer que SSC est précisément une assertion suffisante pour établir cette étape, avec toutes les erreurs uniformes nécessaires.

6. Autre difficulté : les passages de limites et les paramètres

Dans la preuve du théorème de Sabihi, plusieurs paramètres sont envoyés vers leurs limites successivement : $T \to \infty$, puis $x \to \infty$, tandis que N est parfois présenté comme fixé et parfois remplacé par x.

Ce type de manipulation peut être légitime dans une preuve analytique, mais seulement si les termes d'erreur sont uniformément contrôlés dans les paramètres concernés.
Or les formules affichées dans les équations (20-4)–(33-4) mélangent notamment des termes contenant

$$H(2x)\min\left(1, \frac{\log x}{T}\right)$$

et des termes issus du déplacement du contour. Le texte fait ensuite tendre T vers l'infini et substitue $x = N$ sans fournir une justification complète de l'uniformité nécessaire.
Cela constitue une lacune supplémentaire, mais elle est secondaire par rapport au problème de la fonction η.

7. Une erreur conceptuelle à ne pas perdre de vue

Le point le plus important est que η est construite pour répondre exactement à la question de Goldbach :

$$\eta(q) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad N - q \text{ n'est pas éliminé par les petits facteurs.}$$

Mais démontrer que beaucoup de nombres survivent au crible ne suffit pas à démontrer qu'un *premier* survit.
L'article somme

$$\eta(n)\Lambda(n),$$

ce qui est une bonne idée en principe : Λ sélectionne les puissances de nombres premiers. Mais pour obtenir une représentation de Goldbach il faut contrôler précisément les contributions des puissances

$$p^k, \qquad k \geq 2,$$

et surtout démontrer que la somme obtenue est strictement positive après toutes les erreurs.
Une estimation asymptotique correcte de $\psi(x, \eta)$ pourrait fournir cette information. Mais c'est précisément cette estimation qui dépend du passage non démontré décrit plus haut.

8. Conclusion : où la preuve pêche

La faiblesse essentielle de l'article n'est donc pas la dernière ligne où l'auteur conclut

$$\pi(N, \eta) > 1.$$

La difficulté est beaucoup plus en amont.
Le raisonnement repose sur la chaîne suivante :

$$\eta(n) \quad \longrightarrow \quad \text{produit de densités} \quad \longrightarrow \quad \psi(x, \eta) \quad \longrightarrow \quad \pi(x, \eta) > 0.$$

Le premier passage n'est pas démontré sous la forme utilisée.
Plus précisément :

1. $\eta(n)$ dépend de n par des conditions de congruence, alors que le produit introduit dans le lemme 3.3 ne dépend plus de n ;

2. le théorème des nombres premiers en progression arithmétique pour une progression fixée ne suffit pas à justifier le produit simultané de toutes les densités de crible ;
3. le produit infini
$$\prod_{p>\sqrt{N}} (1 - 1/(p-1))$$
est, pris littéralement, nul, de sorte qu'il ne peut pas être identifié directement à une constante principale positive ;
4. la SSC est précisément une conjecture supplémentaire destinée à fournir une formule du type recherché, mais son utilisation ne remplace pas la démonstration du passage entre η et sa moyenne ;
5. enfin, les manipulations de paramètres et de termes d'erreur dans l'argument de Perron demanderaient une justification uniforme qui n'est pas fournie.

Ainsi, le texte fournit une *approche conditionnelle intéressante*, mais pas une preuve de Goldbach sous RH seule. Plus fortement : même en acceptant RH et SSC comme hypothèses, il faut encore réparer le passage analytique qui transforme la fonction de crible η en l'expression moyenne utilisée dans le lemme 3.3.

Référence

A. Sabihi, *An Approach Towards the Proof of the Strong Goldbach's Conjecture for Sufficiently Large Even Integers*, arXiv :1605.08938v2 [math.GM], 4 November 2017.
Les passages déterminants sont les définitions (1-2)–(10-2), le lemme 2.1, les lemmes 3.2–3.4, la SSC (11-3), et surtout le théorème de Sabihi et les équations (20-4)–(35-4).

Critique de l'article *Introducing and Applying S.C.E Model under Dusart's Inequality to Prove Goldbach's Strong Conjecture for 74 Typical Structures out of All 75 Structural Types of Even Numbers*, Zadehgol Mohammadi et Kolahdouz, arXiv :1909.13230v5

Résumé

L'article propose un cadre combinatoire (le *modèle S.C.E.*) qui décompose tout nombre pair E en un quadruplet (a_E, b_E, c_E, d_E) selon la primalité des couples (x, y) tels que $x + y = E$, $x \leq y$. Les auteurs classent les nombres pairs en 75 structures typiques selon l'ordre relatif de a_E, b_E, c_E, d_E, et affirment prouver que $d_E \neq 0$ (i.e. Goldbach fort) pour 74 de ces 75 structures, à l'aide de l'inégalité de Dusart sur $\pi(x)$. Cette note détaille les faiblesses majeures de l'argumentation.

1. L'aveu qui ruine la portée du résultat

L'abstract énonce explicitement :

> *"since the last typical structure is the dominant structure over all even numbers"*

Autrement dit, la structure non résolue ($d_E < b_E < c_E < a_E$, et ses deux variantes exclues par le Lemme 2.3) n'est pas un cas marginal : c'est, selon les auteurs eux-mêmes, le cas **asymptotiquement dominant** lorsque $E \to \infty$.
Le ratio "74 structures sur 75" est donc trompeur : il compte des *types combinatoires*, pas des *entiers*. Si la structure manquante concerne la majorité des grands nombres pairs, le résultat prouvé peut ne couvrir qu'une proportion négligeable des entiers pairs, malgré l'impression de quasi-exhaustivité donnée par le titre.

2. Le cas manquant reste une conjecture, pas une preuve conditionnelle

Les trois inégalités proposées en fin d'article pour couvrir le dernier cas sont explicitement non démontrées :

> *"the authors did their best to prove analytically these two inequality, but they did not succeed."*

et ne sont vérifiées que *numériquement*. Ce n'est donc pas une réduction rigoureuse à un lemme technique restant à établir : c'est une nouvelle conjecture, potentiellement aussi difficile que Goldbach lui-même.

3. Incohérence sur la constante de Dusart

L'inégalité (1) de l'abstract utilise la constante 1.2251, tandis que tous les résultats internes (Lemme 2.7, Corollaire 2.8, Lemme 2.10, etc.) utilisent 1.2551. Cette dernière valeur correspond en réalité à la constante classique de Rosser–Schoenfeld (1962), non à un résultat de Dusart (2016). Comme tous les seuils numériques du papier (2525, 2322.61, 2525.67, 22864, 130.4574578) dépendent

de la valeur exacte de cette constante, cette confusion met en doute la fiabilité de l'ensemble des bornes calculées.

4. Preuves elliptiques aux endroits critiques

— La preuve du Lemme 2.7 est réduite à une phrase ("direct consequence of relations (8),(9) and Dusart's inequality"), sans dérivation explicite.

— Les inégalités (25) et (26) — cœur de la "seconde politique" couvrant 10 des 72 structures traitées — sont énoncées comme simples conséquences de comparaisons de fonctions réelles continues, sans traitement rigoureux du passage au discret (effets d'arrondi $\lceil \cdot \rceil$, parité de $E/2$, valeurs demi-entières de a_E, d_E).

5. Incohérence de comptage interne

Le Théorème 4.2 conclut : *"72 typical structures out of 75"*, alors que l'abstract et l'introduction annoncent 74. La réconciliation implicite (72 structures traitées directement + 2 exclues par le Lemme 2.3 comme impossibles) n'est jamais énoncée explicitement au moment de la synthèse finale.

6. Erreur factuelle sur une référence fondatrice

Le nom de Harald **Helfgott** est orthographié "Harald Helfgott Anderson" — un nom inventé. Sur un article dont toute l'architecture repose sur la distinction conjecture faible (Helfgott, 2013) / conjecture forte (leur sujet), cette erreur d'identification est un signal de relecture insuffisante.

7. Absence de vérification numérique documentée

L'affirmation que Goldbach fort est vérifié "by computer's application or manually" pour $E < 2525$ n'est étayée par aucun script, table ou référence. Le seul exemple donné ($E = 20$) sert uniquement à illustrer le modèle S.C.E., pas à vérifier la conjecture sur une plage de valeurs.

Verdict

Ce travail ne constitue ni une preuve de la conjecture de Goldbach forte, ni même une preuve partielle solide en densité. C'est un cadre combinatoire qui traite correctement les cas où la simple non-négativité ou des inégalités de comptage suffisent, mais qui échoue précisément sur le cas structurellement dominant — lequel est reformulé en trois nouvelles conjectures numériques non prouvées. Le fait que la version 5 (datée mai 2026) d'un preprint initialement soumis en 2019 n'ait toujours pas comblé ce trou après plusieurs révisions confirme que la difficulté centrale demeure entière.

Analyse critique de la preuve de la conjecture binaire de Goldbach de Reza Javaherdashti

Cette note commente le texte de Reza Javaherdashti, *Proof of Goldbach's Conjecture* (identifiant `0206033v2`). Contrairement aux textes précédents, où l'erreur se nichait dans un pas précis d'un calcul par ailleurs solide, le problème ici est plus fondamental : la notion centrale sur laquelle repose toute la preuve, $DC(A)$, n'est pas correctement définie, et l'argument final ne relie jamais ses manipulations de cardinalités à l'existence effective de deux nombres premiers dont la somme vaut A.

1. $DC(A)$ n'est pas une fonction bien définie

La Définition 3 introduit $DC(A)$ comme "le nombre de nombres premiers à additionner ... pour obtenir un nombre pair A". Mais les deux exemples donnés juste après montrent que cette quantité **dépend de la décomposition choisie**, pas seulement de A :

$$8 = 2+2+2+2 \;\Rightarrow\; DC(8) = 4, \qquad\qquad 8 = 5+3 \;\Rightarrow\; DC(8) = 2.$$

$DC(8)$ prend donc deux valeurs différentes : ce n'est pas une fonction de A, mais une propriété attachée à une décomposition particulière de A. Le texte ne précise jamais explicitement qu'il faudrait entendre $DC(A)$ comme le *minimum* sur toutes les décompositions possibles ; cette lecture n'est qu'implicitement suggérée par la "conclusion de la Définition 3" ($DC(A) \geq 2$). Or la chaîne d'inégalités (3) à (33) qui suit manipule $DC(A)$ tantôt comme un minimum bien défini, tantôt comme la valeur associée à une décomposition arbitraire fixée - voir en particulier (12)–(13), $DC(A) = a_1 + a_2 + \sum_{i=3}^{m} a_i$, qui présuppose une décomposition *particulière* de A en m termes. Ces deux lectures ne sont pas équivalentes, et le texte glisse continûment de l'une à l'autre sans jamais le signaler.

2. Le défaut principal : dénombrer n'est pas exhiber

Même en accordant, par charité, que la chaîne d'inégalités (3) à (31) soit algébriquement correcte, il faut observer ce qu'elle manipule réellement : des **cardinaux** - $\Gamma(2K)$, $\Gamma(2K+1)$, $\Gamma f(x)$, c'est-à-dire des *comptages* de nombres pairs, impairs et premiers dans une fenêtre finie $r(ij)$ choisie arbitrairement. À aucun moment le texte n'écrit une identité arithmétique explicite $p+q=A$ avec p, q deux éléments premiers effectivement désignés de la Row.

Autrement dit, l'argument établit au mieux une inégalité sur des *effectifs* ("il y a suffisamment de nombres premiers dans cette fenêtre comparé aux autres catégories de nombres"), mais rien ne relie ce dénombrement à la question posée : les nombres premiers ainsi comptés, pris deux à deux, atteignent-ils *précisément* la valeur A ? Un problème de cardinalité ("il y a assez d'éléments d'un certain type") et un problème de somme ("il existe deux éléments dont la somme vaut exactement A") sont de nature complètement différente ; le premier ne garantit jamais le second. La conclusion finale - "$DC(A) = 2$, donc A est somme de deux nombres premiers" - ne découle donc en réalité d'aucune des inégalités précédentes : c'est un saut non justifié entre un fait sur des tailles d'ensembles et un fait sur une identité arithmétique précise portant sur des éléments particuliers.

3. Une hypothèse de base généralement fausse

L'Assomption 2 ("dans toute Row, il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs") est fausse en général : une Row de cardinal impair, par exemple $r(1,3) = \{1,2,3\}$ (deux impairs, un pair), la contredit immédiatement. Le texte ne restreint jamais les Rows considérées à un cardinal pair, alors que cette hypothèse est utilisée telle quelle dans les manipulations centrales - (5), (7), (27) - qui sous-tendent toute la suite du raisonnement.
[Remarque secondaire] L'algèbre elle-même contient des passages peu clairs, par exemple en (21)–(22) où un signe "+" semble manquant entre $\Gamma(2K+1)$ et $\Gamma f(x)$. Ce n'est qu'un symptôme du manque de rigueur généralisé, pas la cause profonde de l'échec de l'argument.

4. Conclusion

L'appareil formel (Rows, Ranges, DC) donne une impression de rigueur par son formalisme et ses nombreuses inégalités numérotées, mais la quantité centrale $DC(A)$ n'est pas correctement définie dès le départ, et surtout, la preuve ne fait jamais le lien entre des comptages de cardinaux dans une fenêtre finie et l'existence d'une paire de nombres premiers de somme exactement A - qui est pourtant l'objet même de la conjecture de Goldbach.

Analyse critique de la démonstration de la conjecture binaire de Goldbach de Philippe Riot

Cette note commente l'article *Démonstration de la conjecture de Goldbach* de Philippe Riot (HAL, `hal-03474806v1`, décembre 2021). Contrairement à l'article de Fayed sur l'hypothèse de Riemann, l'erreur ici n'est pas localisée en un seul pas de calcul : le texte accumule du vocabulaire topologique et catégoriel correct *pris isolément*, mais l'assemblage ne constitue jamais une chaîne déductive. Trois défauts suffisent à faire s'effondrer l'ensemble.

1. Une auto-contradiction interne (Lemme 1 vs. Lemme 2)

Le § 2 établit le **Lemme 1** : $\mathbb{R}$ ne peut pas porter de modèle continu de l'arithmétique de Peano, parce que l'opérateur successeur $n \mapsto n+1$ retirerait un point à un espace connexe de dimension 1, le rendant non connexe — contradiction. L'auteur généralise *lui-même*, dans le paragraphe suivant, cet argument à un espace vectoriel $\mathbb{R}^k$ quelconque, en invoquant explicitement le théorème d'invariance du domaine (attribué à Brouwer) : un successeur continu imposerait que $\mathbb{R}^k$ soit homéomorphe à $\mathbb{R}^k \setminus \{pt\}$, ce qui est faux pour tout k.

Or au § 3, le **Lemme 2** affirme que $\mathbb{C}$, muni de sa topologie naturelle, *est* un modèle continu de l'arithmétique de Peano où le successeur est continu. C'est directement contradictoire : topologiquement, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, et l'argument d'invariance du domaine que l'auteur vient d'établir pour *tout* $\mathbb{R}^k$ s'applique donc mot pour mot à $\mathbb{C}$ et interdit exactement ce que le Lemme 2 affirme. La "démonstration" du Lemme 2 elle-même ne contient d'ailleurs aucun argument topologique : elle invoque la théorie des modèles (saturation, Chang–Keisler) pour obtenir l'*existence* d'un corps de fractions plongé dans $\mathbb{C}$, ce qui est un fait algébrique banal, mais qui ne dit rien sur la continuité d'un opérateur successeur - propriété que le paragraphe précédent vient pourtant de réfuter pour cet espace précis.
Remarque : Toute la suite du texte (§ 4 à § 7) repose sur le plongement de $(\mathbb{N}, +)$ dans $\mathbb{C}$ "de manière à ce que le successeur soit continu". Le Lemme 2 étant en contradiction directe avec le résultat que l'auteur vient d'établir, l'hypothèse de travail sur laquelle repose tout le reste de l'article n'est jamais valablement acquise.

2. Le Lemme 3 : une identification topologiquement impossible

Au § 5, l'auteur munit l'ensemble des nombres premiers impairs P^* de la topologie de spécialisation associée à la divisibilité. Deux premiers distincts étant incomparables pour cette relation, il en conclut - correctement - que la topologie obtenue sur P^* est la topologie *chaotique* (grossière) : les seuls ouverts sont $\varnothing$ et P^* tout entier.

L'auteur énonce ensuite le **Lemme 3** : $K \cong P^* \times g_*([0,1], \kappa)$, où K est l'ensemble triadique de Cantor. C'est topologiquement impossible dès que P^* contient plus d'un point, et ce indépendamment de tout facteur produit :

- un espace muni de la topologie chaotique (indiscrète) sur plus d'un point n'est même pas T_0 (deux points distincts ne peuvent être séparés par aucun ouvert) ;
- l'ensemble de Cantor K, lui, est un espace métrique compact - donc Hausdorff, donc T_0 à plus forte raison ;
- tout produit $P^* \times Y$ contenant P^* comme facteur (via une projection continue et ouverte, ce qui est le cas standard pour un produit topologique) hérite de cette absence de séparation : deux points de $P^* \times Y$ qui ne diffèrent que sur la coordonnée P^* ne peuvent pas non plus être séparés par un ouvert du produit lorsque P^* est infini et indiscret.

Un espace indiscret à une infinité de points ne peut donc être homéomorphe - ni même plongé de façon non triviale - dans un espace métrique tel que K. Le Lemme 3 est énoncé sans démonstration (l'article passe directement de l'observation "les deux espaces P^* et K sont très semblables" à l'énoncé d'un isomorphisme topologique), et cette "ressemblance" évoquée (compacité, absence de point isolé, dénombrabilité pour P^* contre non-dénombrabilité pour K) est en réalité une liste de propriétés qui, prises ensemble, distinguent nettement les deux espaces plutôt que de les identifier : P^* est dénombrable, K a la puissance du continu ; l'auteur le note lui-même sans en tirer la conséquence qui s'impose.

3. L'argument final (§ 7) : une pétition de principe

En admettant malgré tout les paragraphes précédents, la conclusion de la conjecture de Goldbach est obtenue ainsi : pour un couple de premiers (p, q) on pose $v(p, q) = \frac{p+q}{2}$; on observe que la topologie discrète sur $\mathbb{N}$ est strictement plus faible que κ (la topologie naturelle héritée de $\mathbb{R}$) ; on en déduit - sans justification supplémentaire - que "l'unique solution" est $n = v(p, q)$ pour *tout* entier $n \geq 4$.

Ce pas ne suit d'aucune des prémisses posées :

- Que l'addition soit continue pour la topologie discrète est vrai mais vide de contenu : *toute* application entre espaces discrets est continue, cela ne contraint rien.
- Le fait qu'une topologie soit "plus faible" qu'une autre ne force jamais deux points distincts identifiés par la topologie faible à coïncider vus dans la topologie forte ; c'est l'inverse qui est vrai (une topologie plus fine sépare *plus*, pas moins, de points). L'argument tel qu'énoncé va donc à l'encontre de la logique des topologies comparées qu'il invoque lui-même.
- Surtout, aucune construction n'est donnée qui, pour un entier pair $2n$ *donné*, produirait effectivement deux nombres premiers impairs p, q tels que $p + q = 2n$. Une démonstration de la conjecture de Goldbach doit, par construction ou par un argument d'existence rigoureux (comptage, méthode du cercle, crible...), garantir l'existence d'un tel couple pour chaque n. Ici, le Lemme 4 énonce seulement un fait classique et correct sur l'ensemble de Cantor lui-même (tout réel de $[0, 1]$ est la médiane de deux éléments de K, propriété liée à $K + K = [0, 2]$), puis *réinterprète* par assertion - via le Lemme 3 déjà invalide - les deux éléments de K ainsi obtenus comme des nombres premiers. Rien ne garantit que les "réels p^*, q^*" construits par récurrence sur les développements en base 3 correspondent effectivement à des entiers premiers, ni même à des entiers.

4. Conclusion

Le texte mobilise un vocabulaire topologique et catégoriel réel (topologie de spécialisation, espaces T_0/T_1, ensemble de Cantor, saturation en théorie des modèles), mais l'article contient une auto-contradiction explicite entre ses deux premiers lemmes (§ 2 vs. § 3), un énoncé topologiquement impossible présenté sans démonstration (le Lemme 3, qui identifie un espace non séparé à un espace métrique compact), et un dernier pas qui ne découle logiquement d'aucune des propriétés invoquées et qui, de plus, ne fournit pour aucun entier n de construction effective d'un couple de nombres premiers. La conjecture de Goldbach n'est donc pas démontrée par cet argument.

Analyse critique de *A Proof of the Goldbach and Polignac Conjectures* de Jason R. South

Cette note commente l'article de Jason R. South, *A Proof of the Goldbach and Polignac Conjectures* (arXiv :2206.01179v12 [math.GM], 8 avril 2025). L'article construit un objet algébrique astucieux (le "polynôme de Goldbach") et son raisonnement jusqu'au Théorème 1.10 (caractérisation d'un contre-exemple par l'annulation du polynôme) est en réalité correct. La faille se situe précisément dans la preuve du **Théorème 2.9**, à l'endroit où l'article invoque la conjecture de Catalan.

1. Ce qui est correct

Pour $2a$ fixé et $P = \{p_1, \ldots, p_{\pi(a)}\}$ l'ensemble des premiers $\leq a$, on pose $q_i := 2a - p_i$. Si $2a$ est un contre-exemple à Goldbach, chaque q_i est composé (non premier), et l'on vérifie sans peine que *tout* facteur premier de q_i est $< a$ (si $p \mid q_i$ avec $p \geq 2$ le plus petit facteur premier, alors le cofacteur $q_i/p < a$ puisque $q_i < 2a$, et une récurrence immédiate montre que tous les facteurs premiers de q_i sont $< a$). Le produit $N = \prod_i q_i$ admet donc bien une factorisation faisant intervenir uniquement des nombres premiers de P, ce qui justifie l'existence des exposants α_i du Théorème 1.10 et la Proposition 2.7/Corollaire 2.8 sur la coprimalité des q_i deux à deux (aucun premier de P ne divise deux q_i distincts). Jusqu'ici, rien à redire.

2. Le pas invalide : Théorème 2.9

La preuve du Théorème 2.9 ("il n'existe pas de solution à $\mathcal{G}_-(2a) = 0$ pour $a > 3$") commence ainsi :

> *"From Corollary 2.8 it was shown that no prime p_i divides any two q's. Since there are $\pi(a)$ q's that share no primes and they are all only comprised of the $\pi(a)$ primes in P, then all $\alpha_i > 0$ and all q's are perfect prime powers."*

C'est ce pas, en apparence anodin, qui est invalide.
Remarque : [Coprimalité deux à deux $\neq$ puissances de premiers] Le Corollaire 2.8 établit seulement que les q_i sont premiers entre eux deux à deux : aucun premier de P ne divise à la fois q_i et q_j pour $i \neq j$. Cela ne dit absolument rien sur le nombre de facteurs premiers *distincts* que possède chaque q_i pris individuellement. Un q_i parfaitement légitime pourrait très bien être, par exemple, le produit de trois ou quatre premiers distincts de P, du moment qu'aucun autre q_j ($j \neq i$) ne partage l'un de ces facteurs. Rien dans le Corollaire 2.8 n'exclut cette situation.

L'argument du texte ne devient valide que si l'on ajoute une hypothèse supplémentaire, jamais démontrée : que *chacun* des $\pi(a)$ premiers de P divise *effectivement* un des q_i (surjectivité de l'usage des premiers). C'est seulement dans ce cas que le dénombrement fonctionne par un argument de tiroirs : $\pi(a)$ premiers, répartis en $\pi(a)$ groupes disjoints (un groupe par q_i, par coprimalité), chaque groupe étant non vide, forcerait chaque groupe à contenir exactement un premier - et donc chaque q_i à être une puissance d'un seul premier.

Mais cette hypothèse de surjectivité n'est établie nulle part. Le Lemme 2.6 ne donne qu'un critère *conditionnel* : $\alpha_i > 0$ si et seulement si $2a \equiv 0 \pmod{p_i}$ ou $2a \equiv p_j \pmod{p_i}$ pour un certain p_j.

Rien ne garantit que cette congruence soit satisfaite *simultanément pour tous les* $\pi(a)$ *premiers de* P lorsque $2a$ est un contre-exemple hypothétique. La phrase "they are all only comprised of the $\pi(a)$ primes in P" énonce en réalité la conclusion recherchée (une correspondance bijective premier $\leftrightarrow q_i$) sans jamais la démontrer : c'est une pétition de principe.

Remarque : [Conséquence] Sans cette hypothèse de surjectivité, rien n'empêche un q_i d'être, par exemple, un produit de deux premiers distincts $p \cdot p'$ (avec $p, p' \in P$ n'apparaissant dans aucun autre q_j). Un tel q_i n'est pas une puissance de premier, et l'appel subséquent à la conjecture de Catalan (théorème de Mihăilescu, sur l'équation $x^\mu - y^\nu = 1$) - qui ne s'applique qu'à des puissances pures - perd alors toute pertinence : l'équation $2^{\alpha_1} + 2 = p_j^{\alpha_j} + 3$ censée borner la taille du contre-exemple n'a plus de raison de représenter la situation générale.

3. Remarque secondaire : l'usage du théorème de Mihăilescu

Même en admettant que tous les q_i soient des puissances de premiers, l'étape finale écrit l'équation $2^{\alpha_1} + 2 = p_j^{\alpha_j} + 3$, soit $2^{\alpha_1} - p_j^{\alpha_j} = 1$, et invoque le théorème de Mihăilescu pour conclure que la seule solution avec exposants ≥ 2 est $3^2 - 2^3 = 1$. Mais ce théorème ne contraint que le cas où *les deux* exposants μ, ν sont ≥ 2 ; si l'un des exposants (α_1 ou α_j) vaut 1, il existe une infinité de solutions triviales à $x - y^\nu = 1$ ou $x^\mu - y = 1$ (par exemple $3 - 2 = 1$, $5 - 4 = 1$, etc.). L'article ne traite pas explicitement ce cas, alors que rien dans les lemmes précédents n'exclut $\alpha_i = 1$ pour certains i (une puissance de premier $p^1 = p$ est un cas parfaitement licite d'"$\alpha_i > 0$").

4. Conclusion

L'appareil de départ - le polynôme de Goldbach et sa caractérisation d'un contre-exemple (Théorème 1.10) - est correctement établi. Mais la démonstration que ce polynôme n'a pas de solution pour $a > 3$ (Théorème 2.9, sur lequel reposent ensuite la conjecture ternaire, le Théorème 2.10, et in fine la conjecture de Polignac via le Théorème 2.20) repose sur un glissement illégitime : la coprimalité deux à deux des q_i (fait réellement démontré) est confondue avec le fait que chaque q_i serait une puissance d'un seul nombre premier (fait non démontré, qui nécessiterait en plus une bijection - jamais établie - entre les $\pi(a)$ premiers de P et les $\pi(a)$ valeurs q_i). Sans ce fait, l'appel à la conjecture de Catalan qui "ferme" la preuve ne s'applique plus. La conjecture de Goldbach n'est donc pas démontrée par cet argument.

Analyse critique de *A Proof of Goldbach's Conjecture* de Roger Ellman

Cette note commente le texte de Roger Ellman, *A Proof of "Goldbach's Conjecture"* (identifiant `0005185v2`, 10 mai 2000). Ici, à la différence des textes précédents, il n'y a pas une étape de calcul erronée isolée : l'ensemble du texte est un argument **heuristique** - de la même nature que les estimations de type $r(N) \sim N/(\ln N)^2$ - présenté à tort comme une démonstration. Le défaut est de nature méthodologique : on substitue un comportement *moyen* (issu du théorème des nombres premiers) à une garantie *universelle*, puis on vérifie l'inégalité obtenue sur une poignée de valeurs numériques avant de conclure "ce qui prouve la conjecture".

1. Le schéma de l'argument

L'auteur définit, pour un "trou" (gap) de G nombres non premiers consécutifs commençant en N, le nombre $R(N)$ de nombres premiers nécessaires, en amont, pour garantir que le procédé de sous-ensembles $\{p + P_i\}$ finisse par combler ce trou. Après une suite de simplifications qualifiées de "cas le pire" (*worst case*), il obtient

$$R(N) = G \cdot \frac{N}{\pi(N)},$$

puis, en substituant l'approximation du théorème des nombres premiers $\pi(N) \approx N/\ln N$,

$$R(N) \approx G \cdot \ln N.$$

La condition "il y a toujours assez de premiers avant chaque trou" devient alors $\pi(N) \geq G \cdot \ln N$, et l'auteur affirme que cette inégalité est *largement* vérifiée, sur la base d'un tableau de valeurs pour $N = 10^8, \ldots, 10^{16}$.

2. Où cela pêche

Remarque : [Une approximation asymptotique traitée comme une identité] Le passage de $R(N) = G \cdot N/\pi(N)$ à $R(N) = G \cdot \ln N$ repose sur $\pi(N) \approx N/\ln N$, qui n'est vraie qu'*asymptotiquement*, avec un terme d'erreur non contrôlé dans l'argument. Toute la suite du raisonnement (le calcul du rapport $\pi(N)/R(N)$, le tableau de la Figure 1) traite cette approximation comme une égalité exacte, alors que c'est précisément le comportement *fin*, localisé, de $\pi(N) - N/\ln N$ et des trous entre nombres premiers qui est en jeu - pas leur comportement moyen sur de longs intervalles.

Remarque : [G n'est jamais la taille réelle d'un trou] C'est le point le plus grave. Dans la Figure 1, la colonne "G" n'est **pas** la taille maximale réelle d'un trou entre nombres premiers au voisinage de N : elle est, de l'aveu même du texte, "extrapolée à partir de l'écart en pourcentage entre l'intervalle logarithmique $\mathrm{Li}(N)$ et le compte exact $\pi(N)$" - c'est-à-dire une quantité *sans rapport démontré* avec la taille effective des trous entre nombres premiers. Le seul moment où l'auteur mentionne un vrai trou connu (653 nombres composés consécutifs après le premier 11 000 001 446 613 353), c'est dans un paragraphe séparé, à titre d'illustration informelle, sans jamais relier cette valeur réelle à la colonne G du tableau censé démontrer l'inégalité $\pi(N) \geq R(N)$. Deux notions différentes de "G"

sont ainsi employées sans que leur lien soit établi, ce qui vide le tableau de toute valeur probante.

Remarque : [Aucune borne universelle sur les trous entre nombres premiers] Pour que l'argument fonctionne, il faudrait un contrôle rigoureux, valable pour *tout* N, de la taille maximale $G(N)$ d'un trou entre nombres premiers au voisinage de N. Or c'est précisément un problème ouvert de première importance : le meilleur résultat inconditionnel connu (Baker–Harman–Pintz, 2001) donne seulement $G(N) = O(N^{0{,}525})$, bien plus faible que ce que l'argument suppose implicitement (une croissance de G compatible avec $G \cdot (\ln N)^2 = o(N)$, proche de la conjecture - non démontrée - de Cramér, $G(N) = O((\ln N)^2)$). Le texte ne démontre aucune borne de ce type ; il se contente de vérifier, numériquement et avec une définition biaisée de G (voir remarque précédente), que l'inégalité tient pour quelques valeurs particulières de N.

Remarque : [Vérification numérique finie $\neq$ démonstration pour tout N] Même en admettant les points précédents, la Figure 1 ne couvre que $N \in \{10^8, \ldots, 10^{16}\}$: neuf valeurs. La conjecture de Goldbach porte sur une infinité de nombres pairs. Passer de "l'inégalité tient pour ces neuf valeurs (avec une marge confortable)" à "elle tient pour tout N, donc la conjecture est prouvée" est exactement le type de généralisation indue qu'une vérification numérique - fût-elle poussée jusqu'à 10^{16}, comme le rappelle d'ailleurs le texte lui-même en note (la conjecture est vérifiée numériquement jusqu'à 10^8) - ne permet jamais de justifier.

Remarque : [Les hypothèses de "pire cas" du §3 ne sont pas démontrées] Les corrections apportées en Étape 3 (facteur multiplicatif $G \cdot [1+\text{ratio}]$ pour tenir compte des sous-ensembles invalides comme $\{9+P_i\}$) sont motivées par des exemples numériques isolés (98, 142...) et qualifiées de conservatrices sans preuve : l'auteur affirme à plusieurs reprises ignorer certains effets compensateurs "so as to arrive at a worst case", sans jamais démontrer que le facteur retenu majore effectivement, pour tout trou et tout N, le nombre de positions nécessaires. C'est une hypothèse de travail plausible, pas un résultat établi.

3. Conclusion

Le texte de Ellman développe une heuristique de comblement des trous entre nombres premiers tout à fait dans l'esprit des estimations probabilistes usuelles sur les décompositions de Goldbach (la même famille d'arguments qui donne, par exemple, $r(N) \sim N/(\ln N)^2$ pour le nombre de décompositions) : elle rend la conjecture extrêmement plausible et quantifie correctement à quel point les trous entre nombres premiers sont "petits" comparés à $\pi(N)$ dans les plages testées. Mais ce n'est pas une démonstration : (i) elle repose sur une approximation asymptotique traitée comme exacte, (ii) la quantité G utilisée pour majorer la taille des trous n'a aucun lien démontré avec la taille réelle des trous entre nombres premiers, (iii) aucune borne universelle sur ces trous n'est établie (c'est d'ailleurs un problème ouvert), et (iv) la conclusion est tirée d'une vérification sur neuf valeurs de N, non d'un argument valable pour tout N.

Analyse critique de *Proof of Goldbach's Conjecture* de Reza Javaherdashti

Cette note commente le texte de Reza Javaherdashti, *Proof of Goldbach's Conjecture* (identifiant `0206033v2`). Contrairement aux textes précédents, où l'erreur se nichait dans un pas précis d'un calcul par ailleurs solide, le problème ici est plus fondamental : la notion centrale sur laquelle repose toute la preuve, $DC(A)$, n'est pas correctement définie, et l'argument final ne relie jamais ses manipulations de cardinalités à l'existence effective de deux nombres premiers dont la somme vaut A.

1. $DC(A)$ n'est pas une fonction bien définie

La Définition 3 introduit $DC(A)$ comme "le nombre de nombres premiers à additionner ... pour obtenir un nombre pair A". Mais les deux exemples donnés juste après montrent que cette quantité **dépend de la décomposition choisie**, pas seulement de A :

$$8 = 2+2+2+2 \;\Rightarrow\; DC(8) = 4, \qquad\qquad 8 = 5+3 \;\Rightarrow\; DC(8) = 2.$$

$DC(8)$ prend donc deux valeurs différentes : ce n'est pas une fonction de A, mais une propriété attachée à une décomposition particulière de A. Le texte ne précise jamais explicitement qu'il faudrait entendre $DC(A)$ comme le *minimum* sur toutes les décompositions possibles ; cette lecture n'est qu'implicitement suggérée par la "conclusion de la Définition 3" ($DC(A) \geq 2$). Or la chaîne d'inégalités (3) à (33) qui suit manipule $DC(A)$ tantôt comme un minimum bien défini, tantôt comme la valeur associée à une décomposition arbitraire fixée - voir en particulier (12)-(13), $DC(A) = a_1 + a_2 + \sum_{i=3}^{m} a_i$, qui présuppose une décomposition *particulière* de A en m termes. Ces deux lectures ne sont pas équivalentes, et le texte glisse continûment de l'une à l'autre sans jamais le signaler.

2. Le défaut principal : dénombrer n'est pas exhiber

Même en accordant, par charité, que la chaîne d'inégalités (3) à (31) soit algébriquement correcte, il faut observer ce qu'elle manipule réellement : des **cardinaux** - $\Gamma(2K)$, $\Gamma(2K+1)$, $\Gamma f(x)$, c'est-à-dire des *comptages* de nombres pairs, impairs et premiers dans une fenêtre finie $r(ij)$ choisie arbitrairement. À aucun moment le texte n'écrit une identité arithmétique explicite $p+q=A$ avec p, q deux éléments premiers effectivement désignés de la Row.

Autrement dit, l'argument établit au mieux une inégalité sur des *effectifs* ("il y a suffisamment de nombres premiers dans cette fenêtre comparé aux autres catégories de nombres"), mais rien ne relie ce dénombrement à la question posée : les nombres premiers ainsi comptés, pris deux à deux, atteignent-ils *précisément* la valeur A ? Un problème de cardinalité ("il y a assez d'éléments d'un certain type") et un problème de somme ("il existe deux éléments dont la somme vaut exactement A") sont de nature complètement différente ; le premier ne garantit jamais le second. La conclusion finale - "$DC(A) = 2$, donc A est somme de deux nombres premiers" - ne découle donc en réalité d'aucune des inégalités précédentes : c'est un saut non justifié entre un fait sur des tailles d'ensembles et un fait sur une identité arithmétique précise portant sur des éléments particuliers.

3. Une hypothèse de base généralement fausse

L'Assomption 2 ("dans toute Row, il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs") est fausse en général : une Row de cardinal impair, par exemple $r(1,3) = \{1,2,3\}$ (deux impairs, un pair), la contredit immédiatement. Le texte ne restreint jamais les Rows considérées à un cardinal pair, alors que cette hypothèse est utilisée telle quelle dans les manipulations centrales - (5), (7), (27) - qui sous-tendent toute la suite du raisonnement.

Remarque : [Remarque secondaire] L'algèbre elle-même contient des passages peu clairs, par exemple en (21)-(22) où un signe "+" semble manquant entre $\Gamma(2K+1)$ et $\Gamma f(x)$. Ce n'est qu'un symptôme du manque de rigueur généralisé, pas la cause profonde de l'échec de l'argument.

4. Conclusion

L'appareil formel (Rows, Ranges, DC) donne une impression de rigueur par son formalisme et ses nombreuses inégalités numérotées, mais la quantité centrale $DC(A)$ n'est pas correctement définie dès le départ, et surtout, la preuve ne fait jamais le lien entre des comptages de cardinaux dans une fenêtre finie et l'existence d'une paire de nombres premiers de somme exactement A - qui est pourtant l'objet même de la conjecture de Goldbach.

Analyse critique de *Definitive Proof of Goldbach's Conjecture* de Kenneth A. Watanabe

Cette note commente l'article de Kenneth A. Watanabe, *Definitive Proof of Goldbach's Conjecture* (arXiv :1811.02415v7 [math.GM], 11 août 2025). C'est, techniquement, l'argument le plus soigné des textes examinés jusqu'ici : c'est un crible à la Legendre, correctement mis en équations, avec une véritable tentative de *contrôle d'erreur* entre l'approximation utilisée et la quantité réelle - démarche typique d'une heuristique bien construite. Deux points, néanmoins, ne sont pas établis avec la rigueur que le mot « definitive » du titre suppose.

1. Ce qui est solide

La construction de $\Pi^*(n) = |P(n)|\, W(n)$, avec $W(n) = \prod_{p=3}^{l(\sqrt{n})} \frac{p-2}{p}$, est l'analogue exact d'un crible de Legendre appliqué à des paires $(x, n-x)$ plutôt qu'à des entiers isolés ; c'est une heuristique standard et bien fondée (parente directe de la constante des nombres premiers jumeaux). La preuve par récurrence (§9, Cas 1 à 3) que $\Pi^*(n) \geq 1$ et que $\Pi^*(n)$ croît indéfiniment est, à première vue, correcte *en tant qu'énoncé sur* $\Pi^*(n)$: les inégalités (36)–(45) et (55)–(64) se réduisent proprement à $2(p_i - 1)^2 \geq 0$, toujours vraie. Mais $\Pi^*(n)$ n'est qu'une *approximation* du nombre réel de paires de nombres premiers $\Pi(n)$; toute la question est de savoir si l'écart entre les deux est réellement maîtrisé pour tout n, ce qui est l'objet du §10.

2. Premier défaut : le passage à plus de deux nombres premiers

L'analyse d'erreur commence rigoureusement : pour les diviseurs 3 et 5 seulement, l'auteur emploie le principe d'inclusion-exclusion *exact* (équations 85–97) et en déduit, via $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, la borne $e_{\max 5}(n) \leq e_3 + e_5$ - ceci est correct.
Mais au moment de passer à un nombre arbitraire de diviseurs premiers ($7, 11, 13, \ldots$ jusqu'à $l(\sqrt{n})$), le texte écrit littéralement :

> *« As we add errors e_7, e_{11}, e_{13}, etc., the inclusion/exclusion principle starts getting exponentially complex since we have to subtract overlapping values and add back in other overlapping values. But since $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, we can simplify the equation as follows : $e_{\max 5}(n) \leq e_3 + e_5$. »*

et en tire directement la formule générale $e_{\max}(n) = \sum_{p=3}^{l(\sqrt{n})} e_p(n)$ (équation 111), **sans jamais refaire, même partiellement, l'inclusion-exclusion pour trois nombres premiers ou plus**. C'est un aveu explicite que l'argument rigoureux (mené pour deux nombres premiers) est remplacé, au-delà, par une généralisation *par analogie*.
Le problème n'est pas que la borne $e_{\max}(n) \leq \sum_p e_p(n)$ soit fausse en soi - l'inégalité de Boole ($|A_1 \cup \cdots \cup A_k| \leq \sum |A_i|$) est un fait général et valide. Le problème est que chaque $e_p(n)$, tel que défini par l'équation (99), mesure l'erreur d'approximation *d'un seul* diviseur p appliqué à l'ensemble *complet* $|P(n)|$ - et non l'erreur, à l'étape p, du crible déjà appliqué aux diviseurs précédents $3, 5, \ldots$ (c'est-à-dire une erreur *conditionnelle*, sur un sous-ensemble déjà réduit). Or

c'est bien cette dernière quantité, non la première, qui intervient réellement dans le processus de criblage successif que $\Pi(n)$ représente. Rien dans le texte n'établit que substituer la première à la seconde préserve la validité de la borne lorsque le nombre de diviseurs premiers croît (ce qui arrive précisément quand n devient grand, puisque $l(\sqrt{n}) \to \infty$).

3. Second défaut : l'inégalité finale n'est vérifiée que graphiquement

En admettant malgré tout $e_{\max}(n) \leq 3\pi(\sqrt{n})$ (équation 113), la conclusion du §10 - « pour $n \geq 622$, $\Pi^*(n) - e_{\max}(n) > 0$, et comme $e_{\max}(n)$ croît beaucoup plus lentement que $\Pi^*(n)$, cela ne redescendra jamais en dessous de 0 » - n'est étayée que par la Figure 6, tracée jusqu'à $n = 50\,000$. Aucune comparaison analytique explicite des taux de croissance de $\Pi^*(n)$ (de l'ordre de $n/(\ln n)^2$ par le théorème de Mertens appliqué au produit $W(n)$) et de $e_{\max}(n)$ (de l'ordre de $\sqrt{n}/\ln\sqrt{n}$ par le théorème des nombres premiers) n'est fournie avec des constantes explicites et un seuil rigoureusement établi. Que $n/(\ln n)^2$ finisse asymptotiquement par dominer $\sqrt{n}/\ln\sqrt{n}$ est vrai et plausible, mais l'affirmer « au vu du graphique jusqu'à 50 000 » - pour ensuite conclure que l'inégalité vaut pour *tout* n, sans exception, jusqu'à l'infini - est le même saut que dans les vérifications purement numériques : une confirmation sur une plage finie n'établit rien pour la totalité des entiers pairs.

4. Conclusion

L'article de Watanabe est nettement plus rigoureux dans sa construction que les textes précédemment examinés (Fayed, Riot, South, Ellman, Javaherdashti) : il identifie correctement le bon objet heuristique ($\Pi^*(n)$, un crible de type Legendre), en prouve rigoureusement la croissance *en tant qu'approximation*, et tente sincèrement un contrôle d'erreur. Mais la démonstration du contrôle d'erreur s'arrête, de l'aveu même du texte, au cas de deux nombres premiers ; sa généralisation à un nombre croissant de diviseurs (nécessaire dès que n devient grand) est affirmée par analogie plutôt que démontrée, et la conclusion finale sur tous les $n \geq 622$ repose sur une lecture de graphique bornée à 50 000, non sur une comparaison analytique valable pour tout n. La conjecture de Goldbach n'est donc pas démontrée par cet argument - mais l'heuristique elle-même, une fois ces deux points reconnus comme non résolus, reste une contribution sérieuse et quantitativement informative.

Analyse critique de l'article *On Chen's Theorem, Goldbach's Conjecture and Almost Prime Twins II*, Runbo Li, arXiv :2405.05727v4

Remarque préliminaire

Contrairement au précédent article analysé (modèle S.C.E.), ce travail s'inscrit dans une ligne de recherche légitime et techniquement sérieuse - l'amélioration des constantes dans le théorème de Chen (1973) via les méthodes de crible pondéré, le principe de commutation de Chen, et les niveaux de distribution récents de Lichtman et Pascadi. Il ne prétend pas prouver Goldbach, seulement approcher la constante conjecturale 2 de Hardy–Littlewood pour $D_{1,1}(N)$. La critique qui suit porte donc sur des points de rigueur, de vérifiabilité et de dépendances externes, non sur une faille conceptuelle de fond comme dans le cas précédent.

1. Incohérence interne : des termes utilisés mais jamais définis

Le Lemme 3.2 (page 5–6) décompose $4\pi_{1,2}(x)$ en une combinaison faisant intervenir les termes $S'_1, \ldots, S'_{16}$ uniquement :

$$4\pi_{1,2}(x) \geqslant 3S'_1+S'_2+S'_3+S'_4+S'_5-2S'_6-2S'_7-S'_8-S'_9-S'_{10}-S'_{11}-S'_{12}-S'_{13}-2S'_{14}-S'_{15}-S'_{16}+O\Big(x^{11/12}\Big).$$

Or, à la toute fin de la preuve du Théorème 1.3 (section 5), la combinaison finale annoncée est :

$$4\pi_{1,2}(x) \geqslant (3S'_1+S'_2+S'_3+S'_4+S'_5)-(2S'_6+2S'_7+S'_8+S'_9+S'_{10}+S'_{11}+S'_{12}+S'_{13}+2S'_{14}+S'_{15}+S'_{16}+S'_{17}+S'_{18}+S'_{19}).$$

Les termes $S'_{17}, S'_{18}, S'_{19}$ apparaissent ici sans avoir jamais été définis dans le Lemme 3.2, ni bornés nulle part dans le texte. C'est une incohérence de rédaction manifeste - vraisemblablement un résidu d'une version antérieure du preprint (rappelons qu'il s'agit de la v4 d'un article dont la v3 avait une preuve différente) - qui rend la combinaison finale, telle qu'écrite, invérifiable au sens strict.

2. Vérifiabilité des estimations numériques

La quasi-totalité des bornes numériques centrales de la preuve (par exemple $S_1 \geqslant 12.902021\, C(N)N/(\log N)^2$, ou $S_3 \leqslant 10.436523\, C(N)N/(\log N)^2$) proviennent d'intégrales multiples (jusqu'à quadruples) de fonctions définies par des équations différentielles-différences (fonctions de Buchstab ω, fonctions F, f de Chen), évaluées "par calcul numérique" sans code, script, ni annexe fournis. Étant donné la complexité de ces intégrales (bornes dépendant de minima/maxima sur des familles de paramètres, choix de k optimisé empiriquement - $k = 12.3$ pour S_3, par exemple), un lecteur ne peut pas reproduire indépendamment ces valeurs sans réimplémenter tout l'appareil numérique. Ceci n'est pas nécessairement une erreur, mais c'est une faiblesse de vérifiabilité propre à ce type de preuve de crible moderne (elle est également présente, à des degrés divers, chez Wu, Cai, Lichtman eux-mêmes), qu'il convient de signaler : la confiance dans le résultat final repose en grande partie sur la confiance dans des calculs non audités par les pairs.

3. Une preuve entièrement omise

Le Théorème 1.2 est énoncé mais sa preuve est totalement omise :

> *"Since the detail of the proof of Theorem 1.2 is similar to those of Theorem 1.1 and Theorem 1.1 in [14] so we omit it in this paper."*

Le renvoi [14] est un autre preprint du même auteur (`arXiv:2309.03218v6`), lui-même non publié dans une revue à comité de lecture. La chaîne de dépendance repose donc sur un argument d'analogie non détaillé entre deux textes eux-mêmes non validés extérieurement.

4. Dépendance à des résultats non publiés

Le résultat central (Théorème 1.1) s'appuie de façon essentielle sur :

— les nouveaux niveaux de distribution de **Lichtman**, cités via un *arXiv e-print* de 2023 (`2309.08522v1`), non publié à l'identique dans une revue à la date citée ;

— les niveaux de distribution de **Pascadi** pour le Théorème 1.3, cités via `arXiv:2505.00653v1` (2025), un preprint très récent au moment de la rédaction ;

— les propres preprints antérieurs de l'auteur ([13], [14]), non publiés.

Aucun de ces résultats amont n'est repris ni démontré dans l'article : ils sont simplement invoqués. La validité du Théorème 1.1 est donc conditionnelle à la correction de plusieurs travaux non encore passés par un contrôle par les pairs formel. Ce n'est pas disqualifiant en soi (la recherche de pointe fonctionne ainsi), mais cela doit tempérer la portée du résultat annoncé : ce n'est pas un théorème définitivement établi tant que la chaîne de citations n'est pas elle-même validée.

5. Portée réelle du résultat : rappel du problème de parité

Le résumé met en avant que la constante 1.9728 est *"very close to the conjectured asymptotic constant 2"*. Il faut noter – ce que l'article ne rappelle pas explicitement – que les méthodes de crible pur, à cause du *problème de parité* de Selberg, ne peuvent en principe jamais atteindre la constante 2 pour $D_{1,1}(N)$ elle-même (le cas "deux nombres premiers"), quelle que soit la sophistication du crible : c'est une limitation structurelle connue, non un simple obstacle technique en voie d'être résolu par amélioration incrémentale des constantes. Le lecteur non spécialiste pourrait être amené à croire, à la lecture du résumé, que ces raffinements successifs ($0.899 \to 1.733 \to 1.9728$) rapprochent d'une résolution de Goldbach fort ; ce n'est pas le cas : ils concernent $D_{1,2}(N)$ (premier + P_2), un problème structurellement plus accessible, et non $D_{1,1}(N)$.

6. Remarques mineures

— Le choix de k optimal dans plusieurs bornes (ex. S_3, S_4) est présenté comme un minimum sur une plage $11.49 \leqslant k \leqslant 500$ obtenu numériquement, sans qu'on sache si l'optimum global a réellement été atteint ou seulement approché par une grille de valeurs testées.

— L'article procède par améliorations successives de constantes ($0.67 \to \cdots \to 0.899$ par la littérature classique, $\to 1.733$ dans un preprint de l'auteur, $\to 1.9728$ ici) : chaque nouvelle version

affine des paramètres (κ_1, κ_2, choix de k) de façon largement heuristique (*"we don't know which of these options gives a smaller value, hence we take a minimum"*), ce qui est méthodologiquement correct pour une borne inférieure mais illustre le caractère très ajusté (*fine-tuné*) plutôt que structurel des gains obtenus.

Verdict

À la différence du modèle S.C.E. analysé précédemment, cet article s'inscrit dans une tradition mathématique solide (crible de Chen, niveaux de distribution) et ne prétend pas prouver Goldbach fort. Ses faiblesses sont d'un autre ordre : une incohérence de rédaction (termes S'_{17}–S'_{19} non définis), une dépendance forte à des calculs numériques non audités et à des preprints non encore validés par la communauté (y compris les propres travaux antérieurs de l'auteur), ainsi qu'une preuve de résultat secondaire (Théorème 1.2) purement omise. Le résultat annoncé doit donc être lu comme *conditionnel* à la validation ultérieure de cette chaîne de dépendances, et sa portée réelle vis-à-vis de la conjecture de Goldbach forte doit être clairement distinguée : il s'agit d'un résultat sur $D_{1,2}(N)$, pas d'une avancée directe vers $D_{1,1}(N)$.

Analyse critique de l'article *Definitive Proof of Goldbach's Conjecture*, Kenneth A. Watanabe, arXiv :1811.02415v7

Résumé du problème central

L'article construit une approximation heuristique $\Pi^*(n) = |P(n)|W(n)$ du nombre de décompositions de Goldbach, où $W(n)$ est un produit de facteurs $(p-2)/p$ sur les nombres premiers $p \leqslant \sqrt{n}$ - un modèle en tout point analogue à l'heuristique de Hardy–Littlewood. La faille n'est pas dans l'induction elle-même (section 9), qui est correcte et ne fait que vérifier la croissance de la fonction *continue* $\Pi^*(n)$ pour une famille particulière de n. La faille est dans l'*analyse d'erreur* (section 10) : c'est elle qui devrait garantir que $\Pi(n)$, le vrai compte, reste proche de $\Pi^*(n)$ - et c'est précisément là que l'article échoue à faire ce que 80 ans de théorie des cribles n'ont pas réussi à faire rigoureusement.

1. La confusion entre deux sources d'erreur totalement différentes

Pour un nombre premier p isolé, l'article calcule correctement l'écart $e_p(n)$ entre le compte exact des paires divisibles par p et son approximation continue $(2/p)|P(n)|$ - un simple effet d'arrondi de fonction plancher, borné par une constante $(3p-3)/p < 3$ (équations 99–105). Ce calcul, pour un seul p, est correct.
Le problème surgit quand il faut combiner ces erreurs sur *tous* les nombres premiers $p \leqslant \sqrt{n}$ simultanément - car $\Pi(n)$ (le vrai compte) correspond exactement à la formule d'inclusion-exclusion de Legendre, dont le nombre de termes croît comme $2^{\pi(\sqrt{n})}$. C'est précisément la raison bien connue pour laquelle le crible de Legendre, appliqué naïvement, ne fonctionne pas pour ce genre de problème : les erreurs d'arrondi de chaque terme, une fois sommées sur un nombre de termes exponentiel en $\pi(\sqrt{n})$, dominent complètement le terme principal. C'est exactement l'obstruction que les cribles de Brun, puis de Selberg, puis les techniques bien plus sophistiquées utilisées dans les travaux modernes sur le théorème de Chen (crible pondéré, principe de commutation, niveaux de distribution avancés) ont été développés pour contourner - sans jamais réussir à l'éliminer complètement (c'est le *problème de parité* de Selberg).

2. Le glissement dans la section 10 : une généralisation non prouvée

L'article ne traite explicitement le cumul d'erreurs que pour **deux** nombres premiers, 3 et 5 (équations 85–98), via une formule d'inclusion-exclusion exacte avec le terme croisé $c(n)$. Cette partie est correcte en elle-même. Mais la conclusion générale,

$$e_{\max}(n) = \sum_{p=3}^{l(\sqrt{n})} e_p(n) \leqslant 3\pi(\sqrt{n}),$$

n'est *jamais* redémontrée pour un nombre arbitraire de facteurs premiers. Le texte se contente d'affirmer :

> *"As we add errors e_7, e_{11}, e_{13}, etc. the inclusion/exclusion principle starts getting exponentially complex [...] but since $|A \cup B| \leqslant |A| + |B|$, we can simplify the equation as follows : $e_{\max 5}(n) \leqslant e_3 + e_5$."*

C'est-à-dire que l'auteur reconnaît lui-même que la complexité croît de façon exponentielle avec le nombre de facteurs premiers considérés, puis contourne ce constat par une simple inégalité de sous-additivité (inégalité de Boole), appliquée par analogie de motif plutôt que par une récurrence rigoureuse sur $\pi(\sqrt{n})$ nombres premiers. Aucune preuve par récurrence n'est fournie pour établir que cette addition simple des erreurs individuelles reste valable quand on combine des dizaines, voire des centaines de nombres premiers simultanément (pour n de l'ordre de 10^{18}, $\sqrt{n} \approx 10^9$ et $\pi(\sqrt{n})$ est de l'ordre de 5×10^7).
Autrement dit, l'étape la plus délicate - borner rigoureusement l'écart entre le compte exact issu d'un crible multi-facteurs et son approximation par un produit eulérien - est précisément celle qui est escamotée. C'est ce même écart que toute la littérature moderne sur les cribles (voir par exemple les travaux de Chen, Wu, Cai, Lichtman, Pascadi sur le théorème de Chen) s'efforce de contrôler avec des dizaines de pages de techniques spécialisées, pour n'obtenir en fin de compte que des résultats *partiels* (nombre premier + P_2, jamais nombre premier + nombre premier).

3. Une conséquence numériquement absurde si l'on prend l'argument au sérieux

Si la borne $e_{\max}(n) \leqslant 3\pi(\sqrt{n})$ était réellement valide et prouvée, cela impliquerait une majoration inconditionnelle de l'écart entre le compte réel des décompositions de Goldbach et l'heuristique de Hardy–Littlewood, de l'ordre de $O(\sqrt{n}/\log n)$ - un résultat d'une force que même les meilleures techniques de crible connues sont très loin d'atteindre pour ce problème précis. Un tel résultat, s'il était correctement établi, constituerait en lui-même une avancée majeure indépendamment de son application à Goldbach. Le fait que sa preuve tienne en une ligne d'inégalité de Boole appliquée par analogie doit alerter tout lecteur averti.

4. La double définition contradictoire de $W(n)$

En section 3, $W(n)$ est défini comme *"the fraction of pairs (x, y) [...] where the x and y coordinates are prime numbers"* - c'est-à-dire une quantité *exacte*, dépendant de la répartition réelle des nombres premiers. Puis, en équation (21), $W(n)$ est redéfini comme le produit eulérien $\prod_{p \leqslant l(\sqrt{n})}(p-2)/p$ - une quantité *purement arithmétique*, indépendante de tout fait sur la répartition effective des nombres premiers au-delà de $\sqrt{n}$. Ces deux objets ne coïncident pas en général ; le texte les utilise pourtant de façon interchangeable dans la suite (notamment dans les équations 23–24 sur la récurrence de $W(p_i^2 \pm 1)$), ce qui brouille la distinction entre ce qui est *prouvé* (croissance du modèle idéalisé) et ce qui est *supposé* (le modèle idéalisé approxime bien la réalité).

5. Les “postulats” 1–4 : le socle de l’argument reste non démontré

Les Postulats 1 à 4 - qui établissent que la famille $n = 2^i$ ou $n = 2^i p$ (avec $p > \sqrt{n}$) constitue le minorant structurel du nombre de décompositions de Goldbach parmi tous les entiers pairs - sont explicitement nommés “postulats”, c’est-à-dire admis sans preuve. Ils sont justifiés uniquement par quelques exemples numériques (94 vs. 96 vs. 90 ; 990 vs. 994). Or c’est cette réduction - “il suffit de traiter cette famille particulière car c’est le pire cas” - qui permet de ramener la preuve pour *tous* les entiers pairs à la seule induction des sections 9.1–9.3. Sans preuve rigoureuse des Postulats 1–4, la réduction elle-même reste heuristique, même en admettant que l’analyse d’erreur de la section 10 soit correcte.

6. Remarques mineures

— Équation (16) : $\Pi_7^*(n) = \Pi_5^*(n) - K_5^*(n)$ - le second terme devrait être $K_7^*(n)$, coquille mineure mais révélatrice d’un manque de relecture systématique.

— La référence [2] (Ingham) est utilisée uniquement pour la citation d’Euler à Goldbach, alors que le lien pointe vers des “Popular Lectures” sur l’hypothèse de Riemann archivées depuis un site disparu (Clay Mathematics Institute) - une référence peu appropriée pour sourcer une correspondance historique du XVIIIe siècle.

— La section 12 (“Future Directions”) affirme que la même technique “prouvera” la conjecture des nombres premiers jumeaux et la conjecture de Polignac, en réutilisant *la même* fonction $\Pi^*(n)$ sans aucune adaptation ni nouvelle analyse d’erreur - ce qui suggère que l’auteur considère l’argument central comme une méthode générale puissante, alors que c’est précisément le point le plus fragile de la preuve (section 3 de cette critique) qui devrait être ré-établi spécifiquement pour chaque problème.

Verdict

L’induction de la section 9 est correcte mais ne prouve rien d’autre que la croissance d’une fonction arithmétique idéalisée. Le cœur du problème de Goldbach - borner rigoureusement l’écart entre le compte réel et cette idéalisation - est traité en une poignée d’équations qui ne couvrent explicitement que deux nombres premiers (3 et 5), puis étendues par analogie de motif, sans récurrence, à un nombre arbitraire de facteurs premiers pouvant aller jusqu’à des dizaines de millions pour les valeurs de n considérées dans les graphiques de l’article. C’est exactement le pas que la théorie des cribles peine à franchir depuis un siècle, et qui est ici franchi implicitement, sans justification à la hauteur de la difficulté du problème.

Analyse critique de l'article *On Chen's Theorem, Goldbach's Conjecture and Almost Prime Twins II*, Runbo Li, arXiv :2405.05727v4

Remarque préliminaire

Contrairement au précédent article analysé (modèle S.C.E.), ce travail s'inscrit dans une ligne de recherche légitime et techniquement sérieuse - l'amélioration des constantes dans le théorème de Chen (1973) via les méthodes de crible pondéré, le principe de commutation de Chen, et les niveaux de distribution récents de Lichtman et Pascadi. Il ne prétend pas prouver Goldbach, seulement approcher la constante conjecturale 2 de Hardy–Littlewood pour $D_{1,1}(N)$. La critique qui suit porte donc sur des points de rigueur, de vérifiabilité et de dépendances externes, non sur une faille conceptuelle de fond comme dans le cas précédent.

1. Incohérence interne : des termes utilisés mais jamais définis

Le Lemme 3.2 (page 5–6) décompose $4\pi_{1,2}(x)$ en une combinaison faisant intervenir les termes $S'_1, \ldots, S'_{16}$ uniquement :

$$4\pi_{1,2}(x) \geqslant 3S'_1+S'_2+S'_3+S'_4+S'_5-2S'_6-2S'_7-S'_8-S'_9-S'_{10}-S'_{11}-S'_{12}-S'_{13}-2S'_{14}-S'_{15}-S'_{16}+O\Big(x^{11/12}\Big).$$

Or, à la toute fin de la preuve du Théorème 1.3 (section 5), la combinaison finale annoncée est :

$$4\pi_{1,2}(x) \geqslant (3S'_1+S'_2+S'_3+S'_4+S'_5)-(2S'_6+2S'_7+S'_8+S'_9+S'_{10}+S'_{11}+S'_{12}+S'_{13}+2S'_{14}+S'_{15}+S'_{16}+S'_{17}+S'_{18}+S'_{19}).$$

Les termes $S'_{17}, S'_{18}, S'_{19}$ apparaissent ici sans avoir jamais été définis dans le Lemme 3.2, ni bornés nulle part dans le texte. C'est une incohérence de rédaction manifeste - vraisemblablement un résidu d'une version antérieure du preprint (rappelons qu'il s'agit de la v4 d'un article dont la v3 avait une preuve différente) - qui rend la combinaison finale, telle qu'écrite, invérifiable au sens strict.

2. Vérifiabilité des estimations numériques

La quasi-totalité des bornes numériques centrales de la preuve (par exemple $S_1 \geqslant 12.902021\, C(N)N/(\log N)^2$, ou $S_3 \leqslant 10.436523\, C(N)N/(\log N)^2$) proviennent d'intégrales multiples (jusqu'à quadruples) de fonctions définies par des équations différentielles-différences (fonctions de Buchstab ω, fonctions F, f de Chen), évaluées "par calcul numérique" sans code, script, ni annexe fournis. Étant donné la complexité de ces intégrales (bornes dépendant de minima/maxima sur des familles de paramètres, choix de k optimisé empiriquement - $k = 12.3$ pour S_3, par exemple), un lecteur ne peut pas reproduire indépendamment ces valeurs sans réimplémenter tout l'appareil numérique. Ceci n'est pas nécessairement une erreur, mais c'est une faiblesse de vérifiabilité propre à ce type de preuve de crible moderne (elle est également présente, à des degrés divers, chez Wu, Cai, Lichtman eux-mêmes), qu'il convient de signaler : la confiance dans le résultat final repose en grande partie sur la confiance dans des calculs non audités par les pairs.

3. Une preuve entièrement omise

Le Théorème 1.2 est énoncé mais sa preuve est totalement omise :

> *"Since the detail of the proof of Theorem 1.2 is similar to those of Theorem 1.1 and Theorem 1.1 in [14] so we omit it in this paper."*

Le renvoi [14] est un autre preprint du même auteur (`arXiv:2309.03218v6`), lui-même non publié dans une revue à comité de lecture. La chaîne de dépendance repose donc sur un argument d'analogie non détaillé entre deux textes eux-mêmes non validés extérieurement.

4. Dépendance à des résultats non publiés

Le résultat central (Théorème 1.1) s'appuie de façon essentielle sur :

— les nouveaux niveaux de distribution de **Lichtman**, cités via un *arXiv e-print* de 2023 (`2309.08522v1`), non publié à l'identique dans une revue à la date citée ;

— les niveaux de distribution de **Pascadi** pour le Théorème 1.3, cités via `arXiv:2505.00653v1` (2025), un preprint très récent au moment de la rédaction ;

— les propres preprints antérieurs de l'auteur ([13], [14]), non publiés.

Aucun de ces résultats amont n'est repris ni démontré dans l'article : ils sont simplement invoqués. La validité du Théorème 1.1 est donc conditionnelle à la correction de plusieurs travaux non encore passés par un contrôle par les pairs formel. Ce n'est pas disqualifiant en soi (la recherche de pointe fonctionne ainsi), mais cela doit tempérer la portée du résultat annoncé : ce n'est pas un théorème définitivement établi tant que la chaîne de citations n'est pas elle-même validée.

5. Portée réelle du résultat : rappel du problème de parité

Le résumé met en avant que la constante 1.9728 est *"very close to the conjectured asymptotic constant 2"*. Il faut noter – ce que l'article ne rappelle pas explicitement – que les méthodes de crible pur, à cause du *problème de parité* de Selberg, ne peuvent en principe jamais atteindre la constante 2 pour $D_{1,1}(N)$ elle-même (le cas "deux nombres premiers"), quelle que soit la sophistication du crible : c'est une limitation structurelle connue, non un simple obstacle technique en voie d'être résolu par amélioration incrémentale des constantes. Le lecteur non spécialiste pourrait être amené à croire, à la lecture du résumé, que ces raffinements successifs ($0.899 \to 1.733 \to 1.9728$) rapprochent d'une résolution de Goldbach fort ; ce n'est pas le cas : ils concernent $D_{1,2}(N)$ (premier + P_2), un problème structurellement plus accessible, et non $D_{1,1}(N)$.

6. Remarques mineures

— Le choix de k optimal dans plusieurs bornes (ex. S_3, S_4) est présenté comme un minimum sur une plage $11.49 \leqslant k \leqslant 500$ obtenu numériquement, sans qu'on sache si l'optimum global a réellement été atteint ou seulement approché par une grille de valeurs testées.

— L'article procède par améliorations successives de constantes ($0.67 \to \cdots \to 0.899$ par la littérature classique, $\to 1.733$ dans un preprint de l'auteur, $\to 1.9728$ ici) : chaque nouvelle version

affine des paramètres (κ_1, κ_2, choix de k) de façon largement heuristique (*"we don't know which of these options gives a smaller value, hence we take a minimum"*), ce qui est méthodologiquement correct pour une borne inférieure mais illustre le caractère très ajusté (*fine-tuné*) plutôt que structurel des gains obtenus.

Verdict

À la différence du modèle S.C.E. analysé précédemment, cet article s'inscrit dans une tradition mathématique solide (crible de Chen, niveaux de distribution) et ne prétend pas prouver Goldbach fort. Ses faiblesses sont d'un autre ordre : une incohérence de rédaction (termes S'_{17}–S'_{19} non définis), une dépendance forte à des calculs numériques non audités et à des preprints non encore validés par la communauté (y compris les propres travaux antérieurs de l'auteur), ainsi qu'une preuve de résultat secondaire (Théorème 1.2) purement omise. Le résultat annoncé doit donc être lu comme *conditionnel* à la validation ultérieure de cette chaîne de dépendances, et sa portée réelle vis-à-vis de la conjecture de Goldbach forte doit être clairement distinguée : il s'agit d'un résultat sur $D_{1,2}(N)$, pas d'une avancée directe vers $D_{1,1}(N)$.

Analyse critique de The Goldbach's Conjecture
A Deterministic Spectral-Operator Proof"
(Bulyaki et Elliott)

Conclusion

La preuve n'est pas valide : elle contient une pétition de principe (circularité) exactement à l'endroit où se trouve toute la difficulté du problème.

1. Structure générale de l'article

Les auteurs construisent un opérateur de Sturm–Liouville auto-adjoint T, montrent qu'il possède une résolvante compacte, une fonction m de Weyl–Titchmarsh de type Herglotz, et une mesure spectrale

$$\mu = \mu_{\text{shell}} + \mu_{\text{off}},$$

où μ_{shell} est portée par la "coquille à deux nombres premiers" $\Sigma \subset \mathbb{R}$ et μ_{off} par $\mathbb{R} \setminus \Sigma$.
Les sections §2.1–§2.6 (Weyl, Carleman, Paley–Wiener) relèvent de la théorie spectrale classique, correctement citée, et servent à établir :

1. que μ est unique (déterminisme des moments via le critère de Carleman) ;
2. que $\mu_{\text{off}} = 0$ (Lemme 2.6.2 – un résultat de densité de type Paley–Wiener, correctement énoncé en lui-même).

Jusque-là, l'argument est de la mécanique fonctionnelle solide, mais ne dit rien encore sur Goldbach : il dit seulement que toute la masse spectrale vit sur Σ – pas qu'elle s'y répartit de manière à fournir une représentation pour chaque $2N$.

2. Le trou précis : §2.7(e), étape (2.7.18)

C'est là que se joue toute la preuve. Les auteurs considèrent une famille de noyaux de Paley–Wiener k_R se concentrant vers une masse de Dirac en $S_0 = \log(2N)$ quand $R \to \infty$, et affirment :

Affirmation des auteurs (§2.7(e), étape (2.7.18)).

$$\mathcal{D}_R[k_R] \;\geq\; c_{j,k} > 0 \qquad \textit{pour tout } R \textit{ assez grand,}$$

c'est-à-dire une borne inférieure uniforme, strictement positive, indépendante de la concentration du noyau, sur chaque bande fixée B_j.

Cette affirmation n'est justifiée par rien de ce qui précède. Ce que les § 2.5–2.6 établissent réellement est une positivité moyennée sur la bande – l'analogue exact du terme principal de Hardy–Littlewood (ou d'un second moment) :

$$\int_{B_j} d\mu_{\text{shell}} > 0.$$

Mais faire tendre le noyau vers une masse de Dirac en un point précis S_0 ne préserve pas automatiquement une borne inférieure positive. Au contraire,

$$\int k_R \, d\mu \;\longrightarrow\; \mu(\{S_0\}),$$

et cette limite est nulle dès que μ n'a pas d'atome exactement en S_0. Rien dans les propriétés de Herglotz, de Carleman ou de Paley–Wiener n'empêche μ_{shell} d'être une mesure non nulle sur Σ tout en étant nulle en tel ou tel point isolé de Σ.
Autrement dit : affirmer (2.7.18) revient à affirmer que μ_{shell} possède un atome strictement positif en **chaque** $\log(2N)$ – ce qui est exactement l'énoncé de Goldbach (existence d'une paire (p, q) pour chaque $2N$), et non une conséquence de la positivité, de l'unicité ou du confinement spectral établis précédemment. La "contradiction" des points (iii)–(iv) de §2.7(e) est donc construite en supposant déjà, sous une autre forme, ce que l'on veut démontrer.

3. Un second symptôme du même problème : (2.6.4)–(2.6.5)

L'identité

$$\mathcal{T}(\phi) = \text{contribution de } \mu_{\text{shell}}$$

(équation (2.6.5)), qui sert de socle à tout le §2.7, n'est pas démontrée analytiquement : elle est justifiée par "l'accord empirique constaté en §2.5", c'est-à-dire une vérification numérique jusqu'à 2×10^N (selon le résumé des auteurs eux-mêmes). Une vérification numérique finie sert ensuite de prémisse à une chaîne d'implications censée valoir pour tout N suffisamment grand. C'est le même type de saut (fini $\to$ universel), déguisé en identité analytique exacte.

4. Autres signaux d'alerte (secondaires)

- Les six lemmes du §3 ("Certification Lemmas") ne contiennent aucune preuve autonome : chacun renvoie à d'autres sections ("Proof. See §2.5, §2.7, §2.9(c)"), ce qui masque le fait que l'étape décisive – l'identification opérateur $\leftrightarrow$ arithmétique (Lemme 3.6) – n'est jamais réellement prouvée, seulement affirmée par renvoi circulaire.
- Auto-référencement massif à un article antérieur non publié des mêmes auteurs (référence [9]) pour justifier les notions clés (« fuite de courbure », « coquille à deux nombres premiers ») : ces notions ne sont donc jamais définies de façon autonome dans ce document.
- De longues digressions philosophiques (Newton/Hamilton/Einstein, EPR, Bell, Kochen–Specker) sans contenu démonstratif, typiques de textes conçus pour donner une impression de profondeur plutôt que pour établir un résultat.

Bilan

La machinerie spectrale (auto-adjonction, positivité de Herglotz, critère de Carleman, confinement de Paley–Wiener) est correcte en elle-même, mais elle ne fait que reformuler la structure du problème sans lui ajouter de contenu arithmétique nouveau. Le pas qui transformerait une positivité moyennée (déjà connue, de type Hardy–Littlewood) en existence ponctuelle pour chaque $2N$ est simplement postulé à l'étape (2.7.18), sans preuve – et ce postulat est logiquement équivalent à la conjecture de Goldbach elle-même. Il ne s'agit donc pas d'une preuve, mais d'une reformulation circulaire habillée en théorie spectrale.

Analyse critique d'une prétendue preuve de la conjecture de Goldbach

Analyse du manuscrit de Youcef Kelanemer, juillet 2026

Verdict en une phrase

Le manuscrit construit une réduction intéressante d'un éventuel contre-exemple de Goldbach à un système fini de diviseurs premiers et à des matrices d'exposants, mais la partie qui doit éliminer tous les points fixes contient plusieurs lacunes logiques majeures. En particulier, les éliminations des cycles de longueur 2 et 3 ne peuvent pas être propagées à l'intérieur d'une île de cardinalité supérieure. La "barrière spectrale" qui doit ensuite traiter $k \geq 6$ ne fournit pas de contradiction.

1. Ce qui semble correct dans la réduction initiale

Le manuscrit suppose qu'un entier pair $2N > 6$ est un contre-exemple et définit

$$P_0^* = \{p < 2N : \ p \text{ premier}, \ p \nmid 2N\},$$

puis

$$D(S) = \bigcup_{p \in S} \{q \text{ premier} : q \mid (2N - p)\}, \qquad P_{n+1}^* = D(P_n^*).$$

Sous l'hypothèse de contre-exemple, $2N - p$ n'est jamais premier pour $p \in P_0^*$. Le manuscrit montre aussi que les facteurs premiers de $2N - p$ restent dans le domaine initial et qu'ils sont bornés par $(2N - 5)/3$. Ces arguments donnent effectivement

$$P_0^* \supsetneq P_1^* \supseteq P_2^* \supseteq \cdots .$$

Comme P_0^* est fini et que les ensembles restent non vides, la suite se stabilise en un ensemble non vide P_∞^* vérifiant

$$D(P_\infty^*) = P_\infty^*.$$

Ces étapes constituent une réduction structurelle intéressante. Elles apparaissent aux propositions 3.4, 3.8–3.13 du manuscrit (pp. 3–5 du PDF).

2. Passage aux “îles terminales”

Le manuscrit choisit une partie minimale $I \subset P_\infty^*$ telle que $D(I) \subseteq I$, puis montre qu'elle est en fait stable : $D(I) = I$. Le graphe orienté associé est

$$p_i \longrightarrow p_j \quad \Longleftrightarrow \quad p_j \mid (2N - p_i).$$

La minimalité permet raisonnablement d'obtenir une forte connexité de cette île.
On peut alors écrire

$$2N - p_i = \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_{ij}}, \qquad a_{ii} = 0,$$

et introduire la matrice non négative entière

$$M = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{k \times k}.$$

Le fait que $2N - p_i$ soit composite donne

$$\sum_j a_{ij} \geq 2.$$

Par Perron–Frobenius, si M est irréductible,

$$\rho(M) \geq \min_i \sum_j a_{ij} \geq 2.$$

Ces observations sont utiles, mais elles ne suffisent pas à elles seules à éliminer les matrices possibles.

3. Faille principale : les cycles 2 et 3 ne disparaissent pas

C'est, à mon sens, le défaut logique le plus important du manuscrit.
La proposition 3.20 prétend éliminer les îles de cardinalité 2 :

$$D(\{p_1, p_2\}) = \{p_1, p_2\}.$$

La proposition 3.23 traite de même une île de cardinalité 3.
Mais, dans les propositions 3.34 et 3.35, le manuscrit en déduit que, pour une île de cardinalité $k = 4$ ou 5,

$$a_{ij} a_{ji} = 0 \quad (i \neq j)$$

et

$$a_{ij} a_{jr} a_{ri} = 0 \quad (i, j, r \text{ distinct}).$$

Cette implication n'est pas valable.
Une paire p_i, p_j peut former un cycle

$$p_i \longrightarrow p_j \longrightarrow p_i$$

à l'intérieur d'une île I de cardinalité $k > 2$, tout en ayant d'autres facteurs premiers dans $2N - p_i$ ou $2N - p_j$. Dans ce cas

$$D(\{p_i, p_j\}) \not\subseteq \{p_i, p_j\},$$

et la proposition 3.20 ne s'applique pas.
Autrement dit :

$$\boxed{\text{“pas d'île de taille 2”} \not\Rightarrow \text{“pas de 2-cycle dans une île plus grande”.}}$$

Exactement le même problème apparaît pour les 3-cycles.
Or le manuscrit utilise cette implication erronée pour conclure

$$c_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(M^2) = 0, \qquad c_3 = \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(M^3) = 0.$$

Les réductions spectrales des dimensions 4 et 5 reposent ensuite sur ces égalités. La chaîne logique est donc rompue à cet endroit.

4. Deuxième faille : “mixed exponent” n'implique pas une moyenne des sommes de lignes ≥ 3

Le manuscrit affirme que, dès qu'un exposant vérifie $a_{ij} \geq 2$, la somme des lignes moyenne vérifie

$$\overline{r} \geq 3,$$

et donc $\rho(M) \geq 3$.
Cette implication est fausse en général.
Par exemple, la matrice

$$M = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est entière, non négative, irréductible, sans diagonale, sans 2-cycle ni 3-cycle, et toutes ses sommes de lignes valent exactement 2. Elle vérifie donc

$$\overline{r} = 2, \qquad \rho(M) = 2,$$

malgré la présence d'exposants égaux à 2.
Il faut donc une hypothèse supplémentaire, réellement démontrée à partir du système arithmétique, pour passer de “un exposant est ≥ 2” à $\overline{r} \geq 3$.

5. Troisième faille : la “barrière de découplage” ne donne pas une contradiction

Le manuscrit définit le poids de Perron $u_j > 0$ et obtient une borne du type

$$U_{\text{Large}} < \frac{2}{\rho(M)}.$$

Puis il utilise le fait que les composantes de u sont positives pour conclure qu'elles ne peuvent pas tendre vers zéro sans rendre M réductible.

Mais la borne inférieure donnée dans le lemme 3.32 est de la forme

$$u_j \geq \frac{1}{k\,\rho(M)^{k-1}}.$$

Cette quantité est strictement positive pour un k et une matrice fixés, mais elle peut elle-même tendre vers 0 lorsque k ou $\rho(M)$ augmente.
Il n'y a donc aucune contradiction entre

$$u_j < \frac{2}{m\rho(M)}$$

et

$$u_j \geq \frac{1}{k\rho(M)^{k-1}}.$$

Les deux inégalités peuvent être simultanément vraies.
Le passage

$$\text{“}u_j \text{ devient petit”} \quad \Longrightarrow \quad \text{“}M \text{ devient réductible”}$$

n'est pas démontré.
La positivité stricte d'un vecteur de Perron est une propriété qualitative ; elle ne fournit pas une borne uniforme indépendante de k et de $\rho(M)$.

6. Quatrième faille : “au moins deux” ou “au moins trois” grands primes

Le manuscrit affirme que, pour $k \geq 4$, une île irréductible doit contenir au moins deux primes

$$p_j > \sqrt{2N},$$

et, pour $k \geq 6$, au moins $\lfloor k/2 \rfloor$ primes dans cette zone.
La forte connexité, à elle seule, n'implique pas ces affirmations de répartition dans le spectre des tailles des primes. Une preuve devrait établir un véritable lemme arithmétique reliant la position des p_j aux équations

$$2N - p_i = \prod_j p_j^{a_{ij}}.$$

Le manuscrit invoque la forte connexité à cet endroit sans fournir cette étape.
Sans ce lemme, toute la “density squeeze” du §3.30 repose sur une hypothèse non établie.

7. Cinquième faille : le cas square-free $k \geq 4$ n'est pas exhaustivement traité

Dans la proposition 3.25, le cas dense est correctement incompatible avec les équations écrites. Mais dans le cas sparse, le manuscrit choisit un facteur sortant p_i de $2N - p_k$ et affirme, pour $k = 4$, que le produit résiduel Q_k possède au plus un facteur premier.

Cette conclusion ne découle pas de l'hypothèse telle qu'elle est formulée : une ligne square-free peut contenir jusqu'à $k-1$ facteurs distincts. Le fait qu'une autre ligne soit sparse ne force pas la ligne correspondant à p_k à avoir au plus deux facteurs.
Il manque donc une analyse combinatoire de tous les supports des lignes $S_i \subseteq I \setminus \{p_i\}$ compatibles avec la forte connexité.

8. Sixième faille : l'utilisation de Zsigmondy dans le cas $k = 2$

La proposition 3.20 réécrit correctement l'égalité sous la forme

$$p_2(p_2^{a_1-1} - 1) = p_1(p_1^{a_2-1} - 1).$$

Mais le théorème de Zsigmondy sur $p_1^n - 1$ ne fournit pas directement l'inégalité de croissance utilisée ensuite pour conclure que

$$|p_2^{a_1} - p_1^{a_2}| > p_1 p_2.$$

L'existence d'un diviseur premier primitif est une propriété de divisibilité, pas une estimation de taille de l'expression entière de la forme utilisée dans le manuscrit.
De même, l'appel à Mihăilescu ne suffit pas : le théorème traite une différence de deux puissances parfaites égale à 1, alors que l'équation présente ici une différence de puissances avec exposants différents et égale à $p_2 - p_1$, qui n'est pas 1.
Il faudrait une preuve diophantienne complète de l'exclusion de

$$p_2^{a_1} - p_1^{a_2} = p_2 - p_1, \qquad a_1, a_2 \geq 2,$$

et celle-ci n'est pas fournie.

9. Ce qui reste après ces objections

La partie solide du manuscrit peut donc être résumée ainsi :

contre-exemple de Goldbach $\Longrightarrow$ ensemble fixe fini de diviseurs premiers $\Longrightarrow$ île fortement connexe $\Longrightarrow$ systè

C'est une réduction potentiellement intéressante.
En revanche, la dernière implication nécessaire,

$$\text{système matriciel arithmétique} \Longrightarrow \text{impossibilité},$$

n'est pas établie.
Plus précisément, il reste à démontrer au moins les points suivants :

1. une exclusion des 2-cycles et 3-cycles à l'intérieur d'une île arbitraire, et non seulement l'exclusion d'îles de taille 2 et 3 ;
2. une classification complète des matrices irréductibles possibles avec c_1, c_2, c_3 éventuellement non nuls ;

3. une preuve arithmétique de la répartition des primes au-dessus de $\sqrt{2N}$;
4. une borne inférieure uniforme des poids de Perron assez forte pour contredire la borne supérieure, et non une borne qui tend elle-même vers zéro ;
5. une démonstration complète des cas $k \geq 6$ sans passage asymptotique non justifié ;
6. une preuve diophantienne complète des cas $k = 2$ et $k = 3$ si ceux-ci sont utilisés ensuite dans la classification matricielle.

Conclusion

À ce stade, je ne considérerais donc pas le manuscrit comme une preuve de la conjecture de Goldbach.
La réduction en système dynamique est la partie la plus intéressante. Le point décisif à travailler n'est pas la convergence de P_n^*, qui est relativement bien contrôlée, mais l'étape suivante : comprendre exactement quelles matrices d'exposants peuvent être réalisées par les identités

$$2N - p_i = \prod_j p_j^{a_{ij}}.$$

En particulier, il faut éviter de transformer une impossibilité concernant une petite île en une impossibilité concernant un petit cycle situé dans une grande île. C'est précisément là que la preuve actuelle perd sa portée.

Références au manuscrit analysé. Les points ci-dessus correspondent notamment aux propositions 3.20, 3.23, 3.25, 3.26, 3.30, au lemme 3.32 et au corollaire 3.33 du PDF An Unconditional Proof of the Goldbach Conjecture via the P_∞^* Fixed-Point Framework, Youcef Kelanemer, juillet 2026.

Analyse critique de
"Goldbach and Twin Prime Pairs: A Sieve Method to Connect the Two"
(Tom Milner-Gulland, arXiv:1808.00520v5)

Conclusion

La preuve n'est pas valide : elle repose du début à la fin sur des ensembles auxiliaires $Q_{I,L,t,r}$ et $Q'_{I,L,t,r}$ dont l'**existence n'est jamais démontrée** – elle est simplement postulée par une définition existentielle (Définition 1.1). Or c'est sur ces ensembles que repose tout le mécanisme quantitatif de l'article (Théorème 1, puis en cascade les Lemmes 8, 12, 13 et les Théorèmes 2, 3, 4).

1. Structure générale de l'article

L'auteur construit une méthode de crible reposant sur un unique résultat combinatoire, le Théorème 1 : pour tout ensemble J de nombres premiers avec $|J| \geq 4$ et tout intervalle I,

$$\left|\{m \in I : (m, \textstyle\prod_{p\in J} p) \neq 1\}\right| - \left|\{m \in [0, |I|-1] : (m, \textstyle\prod_{p\in J} p) \neq 1\}\right| \leq \frac{5|J|^2}{8}.$$

Autrement dit : la différence entre le nombre d'entiers non premiers avec $\prod_{p\in J} p$ dans un intervalle quelconque I et dans l'intervalle « canonique » $[0, |I|-1]$ est bornée uniformément, indépendamment de $|I|$ et de la taille des nombres premiers en jeu, par un terme purement quadratique en $|J|$.
Ce théorème est ensuite utilisé comme brique de base : le Lemme 12 (borne inférieure sur le nombre d'entiers coprimes à $\prod_{k=1}^{n} p_k$ dans une paire décalée), le Lemme 13 et le Théorème 3 (existence d'une représentation de Goldbach pour $2z_n$), puis les Théorèmes 2 (jumeaux premiers, inconditionnel) et 4 (Goldbach, conditionnel à l'Hypothèse de Riemann) en dépendent tous directement.

2. Le trou : l'existence des ensembles $Q_{I,L,t,r}$ n'est jamais prouvée

Définition 1.1 de l'article (rappel). *Pour tout $t \in \{0, 1\}$, tout ensemble L de nombres premiers et tout entier r, $Q_{I,L,t,r}$ et $Q'_{I,L,t,r}$ sont définis comme* ***n'importe quels ensembles d'entiers*** *tels que :*

I. $\max\{|\{p \in L : p \mid m\}| : m \in Q_{I,L,t,r} \cup Q'_{I,L,t,r}\} \leq r$;

II. pour chaque $s \in \{1, \ldots, r\}$ *et chaque* $M \in \binom{L}{s}$,

$$\left|\{m \in [t, |I|-1] \cup Q_{I,L,t,r} : \textstyle\prod_{p\in M} p \mid m\}\right| = \left|\{m \in I \cup Q'_{I,L,t,r} : \textstyle\prod_{p\in M} p \mid m\}\right|;$$

III. $|[t, |I|-1] \cup Q_{I,L,t,r}| = |I \cup Q'_{I,L,t,r}|$.

C'est une définition purement **existentielle** : elle spécifie des propriétés que ces ensembles doivent satisfaire, mais ne construit rien et ne prouve nulle part que de tels ensembles existent effectivement pour les tuples (I, L, t, r) dont l'article a besoin.

Conséquence non établie. *Toute la chaîne de lemmes qui suit (Lemme 2 pour* $(I, H, 1, 2)$*, Lemme 3 pour* $(I, Z, 0, 3)$ *avec* Z *un ensemble à quatre éléments, Lemme 5 et sa preuve pour* $(I, J, 0, 3)$*,* $(I, J, 1, 2)$*,* $(I, J, 0, 2)$*, puis le Lemme 8 pour* $R([1, j], n, r)$*, et enfin le Lemme 12) manipule algébriquement ces ensembles* Q, Q' ***comme s'ils existaient toujours****, pour des paramètres de plus en plus variés et combinés simultanément au sein d'une même preuve.*

C'est le cœur du problème. La condition II impose, pour un ensemble L à $|L|$ éléments et un paramètre r, une égalité exacte pour **chacun** des $\sum_{s=1}^{r} \binom{|L|}{s}$ sous-ensembles M de L – c'est-à-dire un nombre de contraintes simultanées qui croît de manière combinatoire avec $|L|$. Dans les applications finales (Théorèmes 2, 3, 4), L devient $P(n)$, l'ensemble de **tous** les nombres premiers jusqu'au n-ième, avec $n \to \infty$. Le nombre de contraintes simultanées explose donc sans borne, alors que $Q_{I,L,t,r}$ reste un unique ensemble d'entiers dont le cardinal total est de surcroît fixé par la condition III. Rien dans l'article – ni argument de comptage, ni construction explicite, ni même une remarque sur la possibilité d'échec de cette existence – ne vient garantir qu'un tel ensemble puisse exister pour tous ces paramètres à la fois, ni qu'il puisse rester compatible avec les multiples autres invocations de Q, Q' utilisées en parallèle dans une même démonstration (par exemple le Lemme 12 combine simultanément des références à $Q_{I,H,1,2}$ et à $Q'_{I,Z,0,3}$ par le biais du Lemme 11). Autrement dit : l'auteur écrit des identités algébriques sous réserve que de tels ensembles correcteurs existent, mais ne vérifie jamais cette réserve. Le Théorème 1 – le seul résultat quantitatif dont tout le reste découle – n'est donc pas démontré : il est conditionné à une hypothèse d'existence combinatoire non vérifiée.

3. Un signal d'alerte convergent : la force inhabituelle de l'énoncé

Indépendamment du problème d'existence, la forme même du Théorème 1 devrait susciter la méfiance. Il affirme une borne uniforme, en $O(|J|^2)$ seulement, sur l'écart entre la répartition des non-coprimes à $\prod_{p\in J} p$ dans un intervalle quelconque et dans l'intervalle canonique $[0, |I|-1]$ – une borne qui ne dépend :

— ni de $|I|$ (la longueur de l'intervalle testé),

— ni de la taille effective des nombres premiers de J (qui peuvent être arbitrairement grands),

— ni de la position de I dans $\mathbb{Z}$.

Un tel contrôle, s'il était vrai sans hypothèse supplémentaire, constituerait un résultat de crible bien plus fort que ce qu'offre la théorie classique du crible (Selberg, Brun, grand crible), où les termes d'erreur dépendent nécessairement de la longueur de l'intervalle et de la structure fine des nombres premiers considérés. Une telle force, obtenue à partir d'objets dont l'existence n'est pas établie, est le signe classique d'un argument qui « fabrique » la conclusion voulue via des objets librement choisis, plutôt que de la démontrer à partir de propriétés arithmétiques réelles.

4. Conséquences pour les théorèmes finaux

— Le **Théorème 2** (infinité des nombres premiers jumeaux), présenté comme inconditionnel, dépend entièrement du Lemme 12, qui dépend du Théorème 1. Le trou identifié invalide donc cette démonstration.

— Le **Théorème 3** (existence de représentations de Goldbach pour certains z_n) et le **Théorème 4** (Goldbach sous l'hypothèse de Riemann) reposent sur la même chaîne (Lemme 12 $\to$ Lemme 13 $\to$ Théorème 3). Même en admettant intégralement l'argument conditionnel à l'Hypothèse de Riemann (via le critère de Nicolas, Équation (77)), le Théorème 4 hérite du même trou en amont.

— Le fait que l'article soit déposé dans la catégorie `math.GM` (« General Mathematics ») d'arXiv – une catégorie non arbitrée, qui accueille notamment les textes n'ayant pas été acceptés dans les catégories principales – est un indice contextuel supplémentaire, cohérent avec le problème de fond identifié ci-dessus.

Bilan

L'appareil combinatoire (Théorème 1 et les lemmes qui l'entourent) semble élaboré avec soin en surface, mais repose sur une supposition d'existence d'ensembles correcteurs $Q_{I,L,t,r}$, $Q'_{I,L,t,r}$ qui n'est jamais démontrée, alors que ces ensembles doivent satisfaire un nombre de contraintes combinatoires croissant sans borne dans les applications finales. Sans cette existence, le Théorème 1 – et donc tout ce qui en découle, y compris la preuve des nombres premiers jumeaux et le résultat conditionnel sur Goldbach – n'est pas établi.

Analyse critique d'une prétendue preuve d'indépendance de la conjecture de Goldbach

Analyse du manuscrit de Ralf Wüsthofen

Verdict

Le manuscrit ne démontre pas que la conjecture de Goldbach est indépendante de ZFC ou de PA. La construction de l'ensemble Sg est, dans son idée, une manière légitime d'encoder les couples de nombres premiers et leurs moyennes. En revanche, le raisonnement logique qui suit ne produit aucune contradiction.
La faille essentielle est très simple :

$$\boxed{Sg^+(a) \cup Sg^-(a) = Sg \quad \text{est une tautologie pour tout } a,}$$

et ne dépend absolument pas de Goldbach.
Le manuscrit transforme ensuite cette partition tautologique en une "preuve" d'inexistence d'une preuve de Goldbach. Cette étape ne suit pas.

1. 1. Ce que le manuscrit construit correctement

L'auteur introduit

$$Sg = \{(p_k, m_k, q_k) : p, q \text{ premiers impairs}, \ p < q, \ m = (p+q)/2, \ \ldots\}.$$

L'objectif est de faire apparaître simultanément les nombres premiers et les moyennes de paires de nombres premiers.
Deux propriétés sont ensuite mises en avant :

1. une propriété de couverture (C) : les entiers impairs apparaissent comme composantes de certains triplets de Sg ;
2. une propriété de maximalité (M) : toutes les paires de nombres premiers impairs distincts sont représentées.

Ces propriétés peuvent être utiles pour reformuler Goldbach, mais elles ne constituent pas encore une information nouvelle sur la conjecture.

2. 2. La reformulation de Goldbach est essentiellement correcte

Pour la version renforcée

$$SSGB : \quad \forall n \geq 4, \quad n = \frac{p+q}{2}$$

pour deux nombres premiers impairs distincts p, q, on peut effectivement écrire :

$$SSGB \Longrightarrow \forall n \geq 4 \ \exists (p_k, m_k, q_k) \in Sg, \quad m_k = n.$$

Sa négation implique qu'il existe un entier $n \geq 4$ qui n'est la moyenne d'aucune paire considérée.
Cette dichotomie est correcte.

3. 3. Première erreur logique : utiliser un n qui n'existe pas sous SSGB

Le manuscrit écrit, sous l'hypothèse de SSGB, qu'il peut décomposer Sg en triplets contenant un entier n particulier, puis constate que sous SSGB un tel n n'existe pas.
Il remplace alors ce n par un entier impair arbitraire a.
Mais le passage est précisément ce qui détruit l'information.
Si a est quelconque, on a toujours

$$Sg = Sg^+(a) \cup Sg^-(a),$$

où

$$Sg^+(a) = \{t \in Sg : a \text{ est une composante de } t\}$$

et

$$Sg^-(a) = \{t \in Sg : a \text{ n'est aucune composante de } t\}.$$

Cette égalité est vraie par simple logique des ensembles :

$$t \in Sg \Longrightarrow \Big(a \text{ apparaît dans } t\Big) \ \vee \ \Big(a \text{ n'apparaît pas dans } t\Big).$$

Elle est vraie que Goldbach soit vraie ou fausse.
Ainsi la propriété (1.1') du manuscrit ne contient aucune information permettant de distinguer SSGB de sa négation.

4. 4. C'est la faille centrale de toute la preuve

Le manuscrit prétend obtenir la même décomposition de Sg sous SSGB et sous $\neg SSGB$, puis en déduire que les deux hypothèses conduisent à une contradiction.
Mais le fait que la décomposition soit la même est inévitable :

$$\boxed{Sg = Sg^+(a) \cup Sg^-(a)}$$

pour n'importe quel a.

Le point crucial est donc que l'identité ne contient plus l'information

"a est une moyenne de deux nombres premiers".

Cette information se trouve seulement dans la taille ou la nature de $Sg^+(a)$, et le manuscrit ne tire aucune contradiction de ces données.

5. 5. Une façon immédiate de voir le problème

Considérons une théorie quelconque T et une propriété arbitraire P. Construisons un ensemble A et, pour tout a, définissons

$$A^+(a) = \{x \in A : P_a(x)\}, \qquad A^-(a) = \{x \in A : \neg P_a(x)\}.$$

Alors automatiquement

$$A = A^+(a) \cup A^-(a).$$

On ne peut évidemment pas conclure de cette identité que P est indépendante de T.
Le mécanisme du manuscrit est exactement de cette nature.

6. 6. La définition de S_1 et S_2 ne crée pas de contradiction

Le manuscrit définit

$$S_1 = \begin{cases} Sg, & SSGB \text{ vraie}, \\ \varnothing, & SSGB \text{ fausse}, \end{cases}$$

et fait de même pour S_2.
Il s'agit simplement d'un codage dépendant de la valeur de vérité de SSGB. Ce type de définition ne fournit pas une nouvelle conséquence mathématique.
Il faut ensuite démontrer qu'une théorie T prouve à la fois une propriété de S_1 incompatible avec chacune de ces deux possibilités. Cela n'est pas fait.

7. 7. L'étape (S1.2) "est fausse" n'est pas une preuve de non-prouvabilité

Le manuscrit affirme que (S1.2) est fausse parce que

$$S_1 = Sg$$

serait équivalent à SSGB et parce que $Sg^+(x) \cup Sg^-(x) = Sg$.
Mais ceci ne montre pas que ZFC ne peut pas prouver (S1.2).
Pour établir

$$T \nvdash \varphi,$$

il faut produire, par exemple, un modèle de $T + \neg\varphi$ (ou un argument métathéorique équivalent). Montrer qu'une formule est fausse dans l'interprétation standard ne suffit pas à établir sa non-démontrabilité sans utiliser la correction/soundness de la théorie dans un cadre précis.
Surtout, ici l'égalité des ensembles invoquée est elle-même tautologique et ne force aucune valeur de vérité de SSGB.

8. 8. La “distribution du quantificateur universel” n’est pas le problème, mais elle ne sauve rien

Le lemme du manuscrit affirme essentiellement :

$$T \vdash \forall y(P(y) \wedge Q(y)) \iff \Big(T \vdash \forall y P(y)\Big) \wedge \Big(T \vdash \forall y Q(y)\Big).$$

Dans un système standard de logique du premier ordre, cette propriété est correcte.
Mais son utilisation ne produit aucune contradiction, car les formules auxquelles elle est appliquée proviennent déjà de la partition tautologique

$$Sg = Sg^{+}(x) \cup Sg^{-}(x).$$

Il ne faut donc pas chercher la faille principale dans ce lemme : la difficulté est antérieure.

9. 9. Confusion fondamentale entre vérité, prouvabilité et indépendance

Le manuscrit mélange trois niveaux :

$$\text{vrai dans } \mathbb{N}, \qquad T \vdash P, \qquad T \nvdash P.$$

Or l’indépendance de Goldbach vis-à-vis de ZFC signifie, sous les hypothèses appropriées de cohérence/soundness,

$$ZFC \nvdash SGB \quad \text{et} \quad ZFC \nvdash \neg SGB.$$

Une telle conclusion ne peut pas être obtenue simplement en considérant une décomposition en ensembles qui est vraie indépendamment de SGB.

10. 10. Le corollaire “indépendance $\Rightarrow$ vérité” est également incorrect

Le manuscrit conclut :

> si ZFC est cohérente et Goldbach est indépendante de ZFC, alors Goldbach est vraie.

Ce n’est pas une conséquence générale de l’indépendance.
Une phrase arithmétique peut être indépendante d’une théorie cohérente et être fausse dans le modèle standard.
L’argument donné au manuscrit est :

$$\text{Goldbach fausse} \Longrightarrow \text{il existe un contre-exemple concret} \Longrightarrow ZFC \vdash \neg\text{Goldbach}.$$

La seconde implication est plausible pour une conjecture universelle arithmétique dont la relation est effectivement calculable : si un entier concret constitue un contre-exemple, on peut vérifier finiment que ce nombre n’est somme d’aucune paire de nombres premiers admissible.

Mais l'auteur conclut ensuite que, puisque la négation ne serait pas prouvable, Goldbach est vraie. Cette partie pourrait être formulée comme un argument de non-réfutabilité arithmétique sous des hypothèses de correction très précises, mais elle ne répare absolument pas l'étape précédente : le manuscrit n'a pas démontré que $ZFC \nvdash \neg SGB$.
De plus, une affirmation d'indépendance complète nécessite beaucoup plus que l'absence supposée d'une preuve dans un raisonnement informel.

11. 11. Le résultat sur PA ne suit donc pas non plus

Le corollaire 1 affirme que le même argument fonctionne dans PA parce que Sg peut y être défini. Le fait qu'un ensemble soit définissable dans PA ne permet pas de transférer une preuve d'indépendance.
Il faudrait reproduire une véritable argumentation métamathématique dans le langage formel de PA et, là encore, établir la non-démontrabilité des deux sens.
La simple définissabilité de Sg n'apporte pas cette information.

12. 12. Le point conceptuel décisif

Le manuscrit cherche à obtenir :

$$\boxed{\text{SSGB} \quad \Longrightarrow \quad \text{une identité sur } Sg}$$

et

$$\boxed{\neg SSGB \quad \Longrightarrow \quad \text{la même identité sur } Sg.}$$

Mais avoir une conséquence commune aux deux hypothèses ne signifie pas que chacune des hypothèses est contradictoire.
Pour obtenir une contradiction, il faudrait trouver une formule Φ telle que

$$T + \text{SSGB} \vdash \Phi \quad \text{et} \quad T + \text{SSGB} \vdash \neg\Phi,$$

ou, pour établir une indépendance, construire effectivement des modèles appropriés.
Le manuscrit ne fait ni l'un ni l'autre.

Conclusion

Le document ne fournit donc pas une preuve d'indépendance de Goldbach.
La partie la plus intéressante est la reformulation par l'ensemble Sg : elle encode de manière compacte les nombres premiers et leurs moyennes. Mais la suite du raisonnement repose sur une partition

$$Sg = Sg^{+}(a) \cup Sg^{-}(a)$$

qui est vraie pour tout a, indépendamment de Goldbach.
La chaîne proposée

$$\text{même décomposition de } Sg \Longrightarrow \text{contradiction} \Longrightarrow \text{indépendance}$$

est donc invalide.
Le défaut peut être résumé par :

une identité tautologique ne peut pas produire une information de non-démontrabilité.

Enfin, l'affirmation finale selon laquelle l'indépendance impliquerait la vérité de Goldbach n'est pas une conséquence générale de l'indépendance et ne peut être utilisée pour sauver le résultat.

Remarque. Cette critique porte sur le raisonnement effectivement présent dans le PDF fourni. Elle ne prétend pas établir l'indépendance ou la dépendance de Goldbach vis-à-vis de ZFC ; elle établit seulement que le manuscrit ne démontre pas cette indépendance.

Analyse critique de la "preuve simple" de l'hypothèse de Riemann de H. A. Fayed

Cette note commente l'article *A Simple Proof of the Riemann Hypothesis* de H. A. Fayed (arXiv :2209.01890, version consultée : v49, catégorie `math.GM`).

Les manipulations formelles de l'article (formule d'Euler–Maclaurin, formule de Perron tronquée, déplacement de contour, dérivation sous le signe intégral) sont correctement menées jusqu'à l'équation (54) de l'article. C'est le tout dernier pas, qui va de (54) à la conclusion (55) $\Rightarrow \sigma_0 = 1/2$, qui est invalide.

Nous précisons pourquoi, avec un contre-exemple explicite.

1. Le pas incriminé

En combinant deux expressions asymptotiques de la même quantité $\zeta'(s_0) + u^{1-2\sigma_0}\zeta'(1-\bar{s}_0)$ (obtenues respectivement en dérivant $I(u,s) = \zeta(s) - u^{1-2\sigma}\zeta(1-\bar{s})$ et $J(u,s) = u^{2\sigma-1}\zeta(s) - \zeta(1-\bar{s})$ par rapport à σ puis en évaluant en s_0), l'auteur obtient, après soustraction et annulation du terme intégral commun,

$$\left[\frac{(2\sigma_0-1)\bar{B}_2(u)}{u^{s_0+1}} + \frac{2(2\sigma_0-1)(1+it_0)\bar{B}_3(u)}{3\,u^{s_0+2}} + O\!\left(\frac{(1+|t_0|)^4}{u^{\sigma_0+3}}\right)\right]\log u - \frac{(2\sigma_0-1)^2\bar{B}_2(u)}{2\,u^{s_0+2}} + O\!\left(\frac{(1+|t_0|)^4}{u^{\sigma_0+3}}\right) = 0. \tag{54}$$

L'auteur affirme alors que, cette relation étant vraie pour tout u suffisamment grand dans le domaine tamponné $D_{\gamma,M}$, chacun des trois morceaux doit s'annuler *séparément*, ce qui force $\sigma_0 = 1/2$.

2. Pourquoi ce pas ne tient pas

Remarque : [Une identité approchée n'est pas une identité exacte] L'équation (54) comporte des restes en $O(\cdot)$: ce n'est pas une identité algébrique exacte en u, mais une estimation asymptotique. Scinder une telle relation en un système d'équations homogènes exactes - en décrétant que chaque terme "d'ordre différent" doit s'annuler pour son propre compte - n'est légitime que si l'on démontre que les restes ne peuvent pas eux-mêmes contribuer à l'ordre de grandeur que l'on isole, uniformément en u. Aucun argument de ce type n'est fourni : les $O(\cdot)$ sont simplement écartés au passage de (54) à (55).

Remarque : [Le terme dominant ne discrimine aucune valeur de σ_0] C'est le point décisif. Le terme dominant de (54) est de la forme

$$(2\sigma_0 - 1)\,\bar{B}_2(u)\,\frac{\log u}{u^{\sigma_0+1}}.$$

Or $\bar{B}_2(u) = B_2(\{u\})$ est une fonction *périodique bornée* de u (elle ne tend pas vers 0), tandis que

$$\frac{\log u}{u^{\sigma_0+1}} \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$$

pour *tout* $\sigma_0 \in (0,1)$ - et pas seulement pour $\sigma_0 = 1/2$.

Concrètement : prenons $\sigma_0 = 0{,}3$ (une valeur pour laquelle on *sait*, par le théorème de Hadamard–de la Vallée Poussin, qu'aucun zéro non trivial ne s'y trouve nécessairement, mais que rien dans l'argument de Fayed n'exclut a priori). Le même calcul donnerait exactement la même conclusion "ce terme tend vers 0" - sans que $\sigma_0 = 0{,}3$ soit pour autant égal à $1/2$. La relation asymptotique "ce terme $\to 0$ quand $u \to \infty$" est donc vraie mais *vide de contenu* : elle ne distingue en rien $\sigma_0 = 1/2$ des autres abscisses de la bande critique.

L'auteur glisse ainsi de l'énoncé correct mais trivial

$$\text{“ce terme tend vers 0 quand } u \to \infty\text{, pour tout } \sigma_0 \in (0,1)''$$

à l'énoncé

"ce terme est identiquement nul pour tout u, ce qui force son coefficient algébrique à s'annuler",

qui *donnerait* bien $2\sigma_0 - 1 = 0$ s'il était justifié - mais qui ne l'est pas, puisque $\bar{B}_2$ n'est identiquement nulle sur aucun intervalle et que la convergence vers 0 d'un produit (borné)$\times$(terme $\to 0$) ne dit rien sur les facteurs pris séparément.

Remarque : [Remarque secondaire : uniformité non contrôlée] La formule de Perron tronquée utilisée en amont impose $T \gg u^8$ et $(1 + |t|)^4 = o(u)$: u et T ne sont pas des paramètres libres. Affirmer que (54) "vaut pour tout u suffisamment grand dans $D_{\gamma,M}$" suppose que les constantes implicites dans tous les $O(\cdot)$ (issus notamment de la borne de convexité de ζ sur la droite $\Re(z) = 1 - \sigma - \eta$) restent uniformes en u et en t_0 lorsque T est réajusté à chaque u. Ce point n'est pas discuté dans l'article. Il est secondaire par rapport au défaut principal ci-dessus, mais il aggrave le manque de rigueur du dernier pas.

3. Conclusion

L'appareil technique de l'article (Euler–Maclaurin, Perron tronqué, déplacement de contour via le théorème des résidus, convexité de ζ, dérivation sous le signe intégral) est correctement mis en place et ne contient pas d'erreur en soi. Mais la conclusion $\sigma_0 = 1/2$ est tirée d'une identité asymptotique - vraie pour *toute* valeur de σ_0 dans la bande critique - traitée à tort comme une identité algébrique exacte dont on pourrait annuler les coefficients terme à terme. L'hypothèse de Riemann n'est donc pas démontrée par cet argument.

Analyse critique d'une prétendue preuve de l'hypothèse de Riemann

Andrzej Mądrecki, "One page proof of the Riemann hypothesis"

Verdict

Le manuscrit ne fournit pas une preuve de l'hypothèse de Riemann. Il contient des constructions intéressantes autour de la transformée de Fourier, de la transformée de Mellin, de la fonction thêta et d'une mesure de Wiener, mais l'étape décisive comporte des problèmes fondamentaux.
La faille la plus immédiatement identifiable est même explicitement annoncée par l'auteur : dans la description de la méthode, il écrit qu'il commence par "assume ... the Riemann hypothesis" avant de chercher à transférer le problème vers le cadre fonctionnel et probabiliste. [**?**] Cette hypothèse de départ ne peut évidemment pas être réintroduite ensuite comme conclusion.

1. 1. Le cadre construit par le manuscrit

L'auteur considère le cylindre

$$P = \{c : \ c(0) = 1, \quad c = f + \widehat{f}, \ f \in S_2, \ \widehat{f} \in S_2\},$$

et remarque que ses éléments sont des points fixes de la transformée de Fourier :

$$F(c) = c.$$

Il introduit ensuite une mesure de Wiener–Riemann r sur P et cherche à moyenner des relations de Mellin et de Poisson sur cet espace.
La construction est présentée comme une façon de transformer un problème sur ζ en un problème de théorie des probabilités. La définition de P et l'identité $F(c) = c$ apparaissent aux pages 1–2. [**?**]
Cette partie peut être étudiée indépendamment, mais elle ne constitue pas encore une information sur la position des zéros de ζ.

2. 2. Première difficulté : la circularité méthodologique

À la page 2, l'auteur décrit explicitement sa méthode comme suit : il propose d'"assume the classical Riemann continuation equation ... and the Riemann hypothesis", puis de résoudre le problème fonctionnel et probabiliste correspondant, dans l'espoir de revenir ensuite au problème initial. [**?**]
Une telle stratégie peut être légitime comme programme heuristique, mais pour devenir une preuve il faut ensuite démontrer un théorème d'équivalence dans les deux sens. Le manuscrit ne démontre pas que les résultats obtenus dans l'espace probabiliste impliquent, sans hypothèse supplémentaire, RH.
Il faut donc distinguer :

$$\text{RH} \Longrightarrow \text{propriété probabiliste}$$

d'une part, et

$$\text{propriété probabiliste} \Longrightarrow \text{RH}$$

d'autre part.
La seconde implication est précisément celle qui manque.

3. 3. Faille mathématique nette dans le "Fubini obstacle"

Le point le plus facile à isoler comme erreur de calcul se trouve dans les équations (1.25)–(1.29). Le manuscrit obtient une estimation contenant, pour tout N fixé, un facteur

$$\left(\int_1^{N+1} \frac{dx}{x}\right)^{1/p}.$$

Puis il fait tendre p vers l'infini et obtient une expression qui serait ensuite supposée devenir infinie en passant à $N = \infty$.
Mais pour chaque N fixé,

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_1^{N+1} \frac{dx}{x}\right)^{1/p} = \lim_{p\to\infty} (\log(N+1))^{1/p} = 1.$$

Il n'est donc pas possible de conclure

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}\right)^{1/p} = +\infty.$$

Cette expression est, avant même la limite en p, infinie pour chaque $p > 0$ si l'intégrale porte réellement sur $[1, \infty)$.
Le passage

$$(1.28) \Longrightarrow (1.29)$$

est donc invalide. Le texte affirme pourtant ensuite : "So, it must be that $b_{1/2} = \infty$". [**?**]
C'est une erreur indépendante de toute question profonde concernant RH.

4. 4. Conséquence pour la propriété (r3)

La propriété (r3) de la Proposition 1 affirme que

$$b_s = \int_0^\infty x^{\Re(s)-1} \left(\int_P |c(x)|\, dr(c) \right) dx$$

est fini pour $\Re(s) < 1/2$ et infini pour $\Re(s) \geq 1/2$. La partie de divergence sur la frontière critique repose précisément sur l'argument précédent. [**?**]
Ainsi, au minimum, la démonstration donnée de (r3) est défectueuse.
Il faut souligner que cette objection ne signifie pas automatiquement que toute l'identité (1.40) est fausse ; elle signifie que le manuscrit n'a pas établi les propriétés de mesure qu'il utilise ensuite de la façon annoncée.

5. 5. Le point crucial : l'équation (1.40) n'est obtenue que dans une demi-bande

La Proposition 2 donne une relation de type

$$(M(c)\zeta)(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{s-1} + x^{-s})\theta(c)(x)\, dx.$$

Le manuscrit prolonge cette relation analytiquement. [**?**]
Puis, après moyenne sur r, il obtient

$$\mathrm{Im} \left\{ \sum_{n\geq 1} 2^{-n} E[M(\chi_{[n-1,n]} G B^p_{\sqrt{\cdot}})(s)]\, \zeta(s) \right\} = \frac{\Im(s)(2\Re(s)-1)}{|s(s-1)|^2}, \tag{1.40}$$

mais seulement pour

$$0 < \Re(s) < \frac{1}{2}.$$

Le raisonnement final est donc conditionné à la validité complète des échanges d'intégrales, de l'identité moyennée et des propriétés de r dans cette bande.

6. 6. Le "MAH" n'est pas une conséquence démontrée

À la page 13, l'auteur introduit

$$\zeta_t(s) = \Im(s)(2\Re(s)-1)$$

et affirme que le "sens profond" de RH serait

$$\zeta(\mathbb{C}) \subseteq \zeta_t(\mathbb{C}).$$

[**?**]
Mais cette inclusion est pratiquement une reformulation géométrique de la conclusion recherchée :

$$\zeta(s) = 0, \quad \Im(s) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\Re(s) - 1 = 0.$$

Le fait de représenter la droite critique comme l'ensemble des zéros de ζ_t ne démontre donc pas que les zéros de ζ y appartiennent. Il faut précisément démontrer l'inclusion, et le manuscrit la pose sous le nom de "Main Algebraic Hypothesis".
Ainsi,

définir une variété contenant la droite critique $\neq$ prouver que tous les zéros de ζ y sont.

7. 7. La mesure r_∞ confirme elle-même le problème

Dans les remarques finales, l'auteur propose une mesure simplifiée r_∞ et constate explicitement que

$$r_\infty(P) = +\infty.$$

Il reconnaît alors qu'il n'existe plus de relation de type Riemann fonctionnelle permettant d'obtenir le "MAH". [**?**]
Il propose ensuite une autre mesure r_0, mais constate cette fois que

$$r_0(P) = 0,$$

donc qu'elle est triviale et ne permet pas non plus d'obtenir le MAH. [**?**]
Ces remarques sont importantes : elles montrent que le lien entre la mesure probabiliste et l'inclusion des zéros n'est pas automatique.

8. 8. Une distinction essentielle

Il faut séparer trois affirmations :

- (A) une identité de Mellin/Fourier est vraie ;
- (B) une moyenne probabiliste de cette identité est vraie ;
- (C) $\zeta(s) = 0 \Longrightarrow \Re(s) = 1/2$.

Le manuscrit établit ou tente d'établir plusieurs identités du type (A). Il construit également un cadre destiné à obtenir (B).
Mais le passage de (B) à (C) nécessite que tous les échanges de limites, intégrales et moyennes soient justifiés et, surtout, qu'aucune hypothèse équivalente à (C) n'ait été utilisée en amont.
C'est précisément ce contrôle logique qui manque.

Conclusion

Je ne considérerais donc pas ce document comme une preuve de l'hypothèse de Riemann.
Les points les plus importants à retenir sont :

1. la méthode est présentée initialement sous l'hypothèse de RH ;
2. le passage (1.28)–(1.29) contient une erreur de limite : pour N fixé, $(\log(N+1))^{1/p} \to 1$, et non $+\infty$;

3. la propriété (r3), utilisée pour le “Fubini obstacle”, n’est donc pas démontrée comme annoncé ;
4. l’inclusion $\zeta(\mathbb{C}) \subseteq \zeta_t(\mathbb{C})$ est appelée “MAH” mais n’est pas démontrée indépendamment : elle constitue essentiellement la conclusion RH ;
5. les constructions alternatives r_∞ et r_0 montrent elles-mêmes que la mesure doit être choisie avec beaucoup de précautions pour produire une information non triviale sur les zéros.

Point particulièrement intéressant pour une étude ultérieure. Le document contient une identité analytique potentiellement intéressante dans la bande $0 < \Re(s) < 1/2$. Mais pour qu’elle devienne une preuve de RH, il faudrait refaire indépendamment toute la construction de la mesure r, vérifier les conditions exactes de Fubini–Tonelli et montrer que l’identité moyennée implique réellement une information sur les zéros sans utiliser RH dans la construction.

Références

[1] A. Mądrecki, One page proof of the Riemann hypothesis, arXiv :0709.1389v1, 10 septembre 2007 (version du manuscrit fournie). Les passages cités se trouvent notamment aux pages 2, 7–10 et 13–15 du document. [**?**]

Analyse critique de
"All Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip are Located on the Critical Line and are Simple"
(Frank Stenger, arXiv:1708.01209v19)

Conclusion

La preuve n'est pas valide : les deux lemmes qui constituent à eux seuls toute la démonstration du Théorème 4.1 (simplicité des zéros et hypothèse de Riemann) reposent, à chaque étape de leur induction, sur une équivalence qui n'est **jamais énoncée comme lemme, jamais démontrée, et fausse en général** : que la vanishement d'une fonction sur un segment vertical avec une certaine « multiplicité totale » m équivaut à l'annulation d'une dérivée σ-directionnelle d'ordre m en un point réel particulier.

1. Structure générale de l'article

L'auteur introduit $G(z) := \Gamma(z)\,\eta(z) = (1-2^{1-z})\,\Gamma(z)\,\zeta(z)$, montre (§2) que G et ζ ont exactement les mêmes zéros dans la bande critique D, établit une équation fonctionnelle $G(1-z) = K(z)G(z)$ avec K non nulle sur D, puis établit (Lemme 2.10) que pour tout $\sigma \in (0,1)$ réel,

$$(-1)^m\, \Re G^{(2m)}(\sigma) = \Re G^{[2m]}(\sigma) > 0,$$

c'est-à-dire que toutes les dérivées d'ordre pair de G, évaluées en un point **réel** de $(0,1)$, sont strictement non nulles.
Tout le §4 (la preuve annoncée de l'Hypothèse de Riemann) consiste à essayer de montrer, par récurrence et par l'absurde, qu'aucun zéro de G ne peut apparaître en dehors de la droite critique, ni y apparaître avec multiplicité > 1, en cherchant à chaque fois à produire une contradiction avec le Lemme 2.10.

2. Le trou : l'étape charnière de la preuve n'est jamais justifiée

Voici, mot pour mot, le mécanisme employé dans la preuve du Lemme 4.2 (et répeté, sous une forme légèrement différente, dans le Lemme 4.3) :

« [...] chacun de $G(\xi_1)$ et $G(\overline{\xi_1})$ s'annule avec multiplicité $\nu_1 + 2$ [...]. Alors G s'annule sur $\ell[\xi_1, \overline{\xi_1}]$ avec multiplicité totale $2\nu_1 + 4$, ou de manière équivalente, $G^{(2\nu_1+4)}$ s'annule sur $\ell[\xi_1, \overline{\xi_1}]$ avec multiplicité un, ce qui n'est pas autorisé par le Lemme 2.10. »

Étape clé (non justifiée) utilisée dans les Lemmes 4.2 et 4.3. *"G s'annule sur le segment $\ell[\xi_1, \overline{\xi_1}]$ avec multiplicité totale m" $\iff$ "$G^{(m)}$ (la dérivée complexe ordinaire, dans la direction σ) s'annule en un point réel donné (ici $\sigma = 1/2$)".*

Cette équivalence n'est **énoncée nulle part comme un lemme**, n'est **démontrée nulle part**, et n'est accompagnée d'aucune référence à un théorème existant qui la justifierait. Elle est simplement affirmée, à chaque étape de l'induction, par les mots « or, de manière équivalente ».

Pourquoi cette équivalence est infondée

Le segment $\ell[\xi_1, \overline{\xi_1}] = \ell[1/2 - i\tau_1,\ 1/2 + i\tau_1]$ est un segment **vertical** : il paramètre la variation de la partie **imaginaire** t à partie réelle $\sigma = 1/2$ **fixée**. La fonction restreinte à ce segment, $h(t) := G(1/2 + it)$, est une fonction de la variable réelle t, généralement à valeurs **complexes** (elle vérifie seulement $h(-t) = \overline{h(t)}$ par la symétrie de réflexion). Or la quantité $G^{(m)}(1/2)$ que l'article prétend faire s'annuler est la dérivée complexe **ordinaire** de G par rapport à z (équivalente à la dérivée **dans la direction** σ, transverse au segment), évaluée au point $\sigma = 1/2$.
Le « théorème de Rolle généralisé » implicite dont l'auteur semble s'inspirer (des zéros alignés avec multiplicité totale m sur un intervalle forçent une dérivée d'ordre $m - 1$ ou m à s'annuler à l'intérieur) est un fait valable pour des fonctions **réelles** d'une variable **réelle**, avec la dérivation prise **dans la même direction** que celle où les zéros sont alignés. Ici, aucune de ces trois conditions n'est réunie :

- $h(t) = G(1/2 + it)$ n'est pas à valeurs réelles en général (seulement « hermitienne », $h(-t) = \overline{h(t)}$) ; un zéro de h en $t = \tau_1$ exige simultanément $\Re h(\tau_1) = 0$ **et** $\Im h(\tau_1) = 0$, soit deux conditions réelles pour une seule variable réelle – une situation bien plus rigide qu'un simple zéro d'une fonction réelle ;
- la dérivation invoquée dans la conclusion ($G^{(m)}$, par rapport à z, donc essentiellement $\partial/\partial\sigma$) se fait dans une direction **transverse** au segment sur lequel les zéros sont comptés (direction t) ;
- aucun énoncé du texte (Lemme 2.10, Définition 2.4, ou ailleurs) ne relie la multiplicité totale de zéros le long d'un segment vertical à la valeur d'une dérivée σ-directionnelle prise au point réel à l'intersection de ce segment avec l'axe réel.

Il n'existe donc, dans le cadre d'une fonction holomorphe de deux variables réelles (σ, t) satisfaisant seulement une symétrie de réflexion, aucun théorème standard (Rolle, Hermite–Birkhoff, ou autre) qui autorise ce passage. L'équivalence affirmée est, en l'état, une confusion entre deux notions différentes de « multiplicité » prises dans deux directions différentes de $\mathbb{C}$.

3. Conséquences

- Cette équivalence non prouvée est l'**unique** mécanisme de contradiction employé dans la preuve du **Lemme 4.2** (simplicité des zéros sur la droite critique) : chacune des étapes (I.), (I.2) l'invoque directement, sans y substituer d'autre argument.

— Elle est également l'unique mécanisme employé dans la preuve du **Lemme 4.3** (absence de zéros hors de la droite critique) : les étapes I.1 et I.2 y recourent de la même manière (« … G s'annule sur $\ell[\ldots]$ avec multiplicité totale $2\nu_1 + 2$, équivalemment $G^{(2\nu_1+2)}(s_{1,\mu_1})$ s'annule avec multiplicité un… »).

— Puisque le **Théorème 4.1** (l'énoncé final, qui contient à la fois la simplicité des zéros et l'Hypothèse de Riemann elle-même) n'est que la conjonction des Lemmes 4.2 et 4.3, la preuve entière du résultat annoncé s'effondre avec ce trou unique.

4. Signaux convergents

— L'article est déposé dans la catégorie `math.GM` d'arXiv (non arbitrée) et en est à sa **19e version** sur près de sept ans (2017–2024), ce qui indique des corrections successives sans qu'une vérification externe rigoureuse (relecture par les pairs) n'ait été obtenue.

— Le texte contient de nombreuses coquilles typographiques non corrigées même après 19 versions (parenthèses manquantes dans les preuves des Lemmes 4.2 et 4.3, par exemple « $G(\xi_1)$ et $G(\overline{\xi_1}$ » sans fermeture), ce qui suggère que ces passages n'ont pas été relus attentivement malgré les nombreuses révisions.

— L'introduction cite plusieurs autres « preuves » non arbitrées de l'Hypothèse de Riemann (Violi, Coranson–Beaudu, Garcia–Morales, Chen), parues dans des supports similaires (arXiv `math.GM` ou des revues à faible sélection comme Applied Mathematics), ce qui situe ce travail dans un ensemble de textes de même nature plutôt que dans la littérature arbitrée sur le sujet.

Bilan

La construction analytique préliminaire de G (§2–3 : équation fonctionnelle, positivité des dérivées paires sur l'axe réel, principe de réflexion de Schwarz) est correcte et de bonne facture. Mais le cœur même de la preuve de l'Hypothèse de Riemann (§4) repose à chaque étape de son induction sur une équivalence – multiplicité totale de zéros sur un segment vertical $\Leftrightarrow$ annulation d'une dérivée transverse en un point réel – qui n'est ni énoncée comme un résultat à part entière, ni démontrée, et qui ne correspond à aucun théorème standard d'analyse complexe. Sans cette équivalence, aucune contradiction n'est obtenue, et la preuve ne démontre donc ni la simplicité des zéros ni l'Hypothèse de Riemann.