Conjecture de Goldbach d'un point de vue analytique

Denise Vella-Chemla

31/10/2011

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.
On rappelle que p est un décomposant de Goldbach de n si p est un nombre premier incongru* à n selon tout module premier inférieur à $\sqrt{n}$.

$$\forall\, n \geq 6,\;\; n \;=\; p+q,\; p\; et\; q\; premiers\; impairs \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, q \leq \sqrt{n}, \quad p \not\equiv n\; (mod\; q)^{\dagger}$$

On note $\pi(x;q,a)$ l'ensemble des nombres premiers $p \leq x$ tels que $p \equiv a\; (mod\; q)$.

Théorème de Brun-Titchmarsh : Soit $q \geq 1$ un entier et a un entier premier à q. Pour M et N deux entiers ≥ 1, le nombre Z de nombres premiers congrus à a modulo q et dans l'intervalle $[M+1, M+N]$ est au plus $\frac{2N}{\varphi(q)ln(N/q)}$.

$$\pi(x;q,a) \leq \frac{2x}{\varphi(q)ln(x/q)}\; pour\; tout\; x > q.$$

.

Si on note $NbGoldbach(n)$ le nombre de décompositions de Goldbach de n, on a vu qu'il suffit d'enlever de l'ensemble des nombres premiers inférieurs à $n/2$ dont le nombre est $\pi(n/2)$ (qui tend vers $\frac{n/2}{ln(n/2)}$ selon le théorème d'Hadamard-De La Vallée Poussin) le nombre de nombres premiers à $n/2$ et congrus à $n/2$ modulo chacun des nombres premiers p_i inférieur à $\sqrt{n}$.
On obtient finalement le résultat :

$$NbGoldbach(n) = \frac{n^2}{2ln(n/2)\prod_{p_i}\varphi(p_i)ln(n/2p_i)}$$

p_i désignant tout nombre premier impair inférieur à $\sqrt{n}$.

*On utilise le terme proposé par Gauss dans les Recherches Arithmétiques.

†Par exemple, 98 a pour plus petit décomposant de Goldbach 19 parce que 3, 5, 7, 11, 13 et 17 sont tous congrus à 98 selon "quelqu'un".

$98 = 2.7^2$.
$98 \equiv 3\; (mod\; 5)$.
$98 \equiv 5\; (mod\; 3)$.
$98 \equiv 7\; (mod\; 7)$.
$98 \equiv 11\; (mod\; 3)$.
$98 \equiv 13\; (mod\; 5)$.
$98 \equiv 17\; (mod\; 3)$.