

1. Résumé

Ce document présente une approche quantique de la conjecture de Goldbach, synthétisant les travaux exploratoires de Denise Vella-Chemla entre 2016 et 2026. L'idée centrale est de modéliser les nombres premiers comme des états quantiques sur la sphère de Bloch, en exploitant les analogies entre la polarisation de la lumière (sphère de Poincaré) et la primalité (sphère quantique).

2. Introduction et motivations

2.1. La Conjecture de Goldbach

En 1742, Christian Goldbach a formulé une conjecture qui résiste encore et toujours à toute preuve depuis près de 300 ans :

Conjecture 1 (de Goldbach). *Tout nombre pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.*

2.2. Pourquoi une approche quantique ?

Plusieurs motivations nous poussent à explorer une approche quantique :

1. **Non-déterminisme inhérent** : La primalité semble gouvernée par un aléa fondamental, similaire à celui gouvernant la mécanique quantique.
2. **Analogies physiques** :
 - La polarisation de la lumière (sphère de Poincaré) peut être vue comme un modèle pour la primalité (sphère de Bloch).
 - Les photons (qubits naturels) ont des états de polarisation qui se superposent.
3. **Inspiration d'Alain Connes** : Utilisation de la géométrie non commutative et des matrices de Heisenberg.
4. **Calcul quantique** : Les algorithmes quantiques permettent de traiter des problèmes de recherche avec une complexité réduite.

3. Modélisation quantique des nombres premiers

3.1. Qubits et divisibilité

Chaque nombre naturel n est associé à un ensemble de $n - 2$ qubits, où chaque qubit correspond à une division de n par $d \in \{3, 4, \dots, n\}$:

Définition 2 (Qubit de divisibilité). *Pour un nombre n et un diviseur potentiel d , on définit un qubit $|\psi_d\rangle$ tel que :*

- État $|0\rangle$: d divise n (reste = 0)
- État $|1\rangle$: d ne divise pas n (reste $\neq 0$)

L'état quantique associé à n est :

$$|n\rangle = \bigotimes_{d=3}^{n-1} |\psi_d\rangle \quad (1)$$

où chaque qubit $|\psi_d\rangle$ est défini par :

$$|\psi_d\rangle = \alpha_d |0\rangle + \beta_d |1\rangle, \quad |\alpha_d|^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

Pour $n = 7$ (premier) : divisions par $d = 3, 4, 5, 6, 7$. Seule $d = 7$ divise 7, donc un seul qubit sur $|0\rangle$.

3.2. Sphère de Bloch et primalité

La sphère de Bloch est une représentation géométrique des états d'un qubit :

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |1\rangle \quad (3)$$

Proposition 3. *La modélisation choisie fait que*

- un nombre premier p correspond à un vecteur de norme proche de 1 (état pur).
- un nombre composé c correspond à un vecteur de norme < 1 (état mixte).

Définition 4 (Opérateur de Primalité).

$$P = \sum_{p \text{ premier}} |p\rangle \langle p| \quad (4)$$

4. Intrication et Décompositions de Goldbach

4.1. État Intriqué pour les Paires $(x, n - x)$

Définition 5 (État de Goldbach).

$$|\Psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=2}^{n-2} |x\rangle \otimes |n-x\rangle \quad (5)$$

Proposition 6 (Condition de Goldbach Quantique). *La conjecture de Goldbach est vraie si et seulement si pour tout n pair > 2 , on a :*

$$(P \otimes P) |\Psi_n\rangle \neq 0 \quad (6)$$

4.2. Opérateur de Goldbach

Définition 7 (Opérateur de Goldbach).

$$G = \sum_{n \text{ pair}, n > 2} |n\rangle \langle n| \otimes (P \otimes P) S_n (P \otimes P) \quad (7)$$

où

$$S_n = \sum_{x=2}^{n-2} |x, n-x\rangle \langle x, n-x|.$$

5. Approche par résidus modulaires

5.1. Propriété clé des résidus pour $m = 2p$

Théorème 8 (Propriété des résidus quadratiques). *Pour $m = 2p$ où p est un nombre premier impair, on a :*

$$\sum_{x=1}^{m-1} x^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{m} & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \\ p \pmod{m} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \end{cases} \quad (8)$$

Pour $p = 5$ ($m = 10$) : $1+4+9+16+25+36+49+64+81 = 285 \equiv 5 \pmod{10}$ (et $5 \equiv 1 \pmod{4}$).

6. Algèbres et Matrices de Heisenberg

6.1. Matrices de Transition

[Matrice Unitaire pour $p = 5$]

$$U_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Vérification : $U_5 U_5^\dagger = I$.

7. Simulation et Implémentation

7.1. Programme Perl de Damian Conway

```
sub find_GC {
    my($n) = @_;
    my @p = 2..$n/2;
    return grep {my $p=$_; is_prime($p) && not_equiv($p, $n, @mod_set)} @p;
}

sub is_prime {
    my ($n) = @_;
    return 0 if $n < 2;
    for my $divisor (2..sqrt($n)+1) {
        return 0 if $n % $divisor == 0;
    }
}
```

```
    return 1;
}
```

7.2. Adaptation Quantique (Qiskit)

```
from qiskit import QuantumCircuit, Aer, execute

def check_goldbach_quantum(n):
    num_qubits = int(n.bit_length())
    qc = QuantumCircuit(num_qubits, num_qubits)
    for q in range(num_qubits):
        qc.h(q) # Superposition
    for x in range(2, n//2 + 1):
        if is_prime(x) and is_prime(n - x):
            qc.x(x % num_qubits)
            qc.x((n - x) % num_qubits)
    qc.measure(range(num_qubits), range(num_qubits))
    backend = Aer.get_backend('qasm_simulator')
    result = execute(qc, backend, shots=1).result()
    return any('1' * num_qubits == state for state in result.get_counts(qc))

def is_prime(k):
    if k < 2:
        return False
    for i in range(2, int(k**0.5) + 1):
        if k % i == 0:
            return False
    return True
```

Références

- [1] [balade.pdf](#).
- [2] [carres.pdf](#).
- [3] [Goldbach-programme-perl.pdf](#).
- [4] [mat-quant-d.pdf](#).
- [5] [probaquant.pdf](#).
- [6] [spherequantique.pdf](#).
- [7] Cours de Philippe Grangier : [transgrangier.pdf](#).