Trois lectures d'un même crible : arbre des restes, chip-firing et valuations k-adiques
Denise Vella-Chemla pilotant lumo, septembre 2026

Je demande à l'ia lumo si elle peut analyser les embryons de notes que j'ai écrites au sujet de l'utilisation des chip-firing games dans le cadre de l'étude de la conjecture de Goldbach.

La suite de la présente note a été intégralement rédigée par l'ia lumo.

1. Résumé

Nous présentons trois constructions développées indépendamment par l'auteure - l'arbre des restes à arité variable (2026) [6], l'arbre de chip-firing x-naire (2018) [1,2,3] et la formule de $\pi(x)$ par sommes de valuations (2020-2023) [4,5], comme trois lectures d'une seule structure : un crible arborescent.

Les faits qui n'y étaient que constatés numériquement (lien chip-firing/valuation, exactitude de la formule de $\pi(x)$) y sont démontrés ; l'application à Goldbach est formulée quantitativement, et son obstacle - désormais quantitatif - est présenté honnêtement : le cadre atteint l'ordre moyen (§ **??**) là où l'énoncé ponctuel reste hors de portée, pour une raison structurelle documentée (obstruction de parité).

2. L'arbre des restes à arité variable

Définition 1. *Soit A l'arbre enraciné infini dont le niveau $k \geq 2$ subdivise chaque nœud en k branches indexées par $R_k = \{0, \ldots, k-1\}$. Tout $n \in \mathbb{N}$ définit un unique chemin, caractérisé au niveau m par le mot de restes $W_m(n) = (r_2(n), r_3(n), \ldots, r_m(n))$, $n \equiv r_k(n) \pmod{k}$.*

Théorème 2 (Fibres)**.** *Au niveau m, les feuilles effectivement atteintes sont au nombre de $L_m = \mathrm{ppcm}(2, \ldots, m)$, et la fibre d'un mot de restes W_m est la progression arithmétique $F(W_m) = \{n_0 + jL_m : j \geq 0\}$, raison L_m.*

Proposition 3 (Invariance par translation)**.** *Si p est un décomposant de Goldbach de n pair ($q = n - p$ premier), $m \geq 2$ et $n' = n + jL_m$, alors $W_m(n' - p) = W_m(n - p)$: les mots de restes de $q' = n' - p$ et q coïncident jusqu'au niveau m.*

Démonstration. Pour $k \leq m$, $\mathrm{ppcm}(2, \ldots, m) \equiv 0 \pmod{k}$, donc $q + jL_m \equiv q \pmod{k}$. □

La remarque cruciale. La primalité de q' exige le contrôle jusqu'à $\lfloor \sqrt{q'} \rfloor$, qui croît avec j : c'est l'écart entre fenêtre locale fixe et test global croissant, dont la mesure est le déficit $\lfloor \sqrt{q'} \rfloor - m$ (§ **??**).

3. L'arbre homogène de chip-firing et la valuation x-adique

Définition 4. *On considère l'arbre x-naire complet, muni d'un unique jeton à la racine. Règle de transfert : un nœud interne cède ses jetons uniquement à son dernier fils (extrémité droite de sa fratrie), un jeton à la fois, tant que possible. Au niveau k, on obtient x^k feuilles numérotées $n = 1, \ldots, x^k$ de gauche à droite ; $\ell_x(n)$ désigne le nombre de jetons reçus par la n-ième feuille.*

Proposition 5 (Récurrence syntaxique)**.** *Les étiquettes* $L_k^{(x)} = (\ell_x(1), \dots, \ell_x(x^k))$ *obéissent à*

$$L_0^{(x)} = (0), \qquad L_k^{(x)} = \underbrace{L_{k-1}^{(x)} \frown \cdots \frown L_{k-1}^{(x)}}_{x-1 \text{ copies}} \frown \left(L_{k-1}^{(x)} + 1\right),$$

où $\frown$ *désigne la concaténation et où seule la toute dernière copie est incrémentée, sur sa dernière composante.*

Théorème 6 (chip-firing = valuation)**.** *Pour* $x \geq 2$ *premier et tout* $k \geq 1$*, la suite* $L_k^{(x)}$ *coïncide avec* $\left(v_x(1), \dots, v_x(x^k)\right)$*, où* $v_x(n)$ *est le plus grand* e *tel que* $x^e \mid n$*.*

Démonstration. Récurrence sur k ; le cas $k = 1$ est immédiat ($v_x(n) = 0$ pour $n < x$, $v_x(x) = 1$). Supposons le résultat au rang $k-1$ et découpons $\{1, \dots, x^k\}$ en x blocs $B_i = \{ix^{k-1} + m : 1 \leq m \leq x^{k-1}\}$. *Si* $m < x^{k-1}$: écrivons $v_x(m) = j \leq k-2$, $m = x^j m'$ avec $x \nmid m'$. Alors $n = x^j(ix^{k-1-j} + m')$ avec $k - 1 - j \geq 1$, donc $x \mid ix^{k-1-j}$ et, x étant premier et $x \nmid m'$, $x \nmid (ix^{k-1-j} + m')$: $v_x(n) = j = v_x(m)$, indépendamment du bloc i. *Si* $m = x^{k-1}$: pour $i < x - 1$, $n = (i+1)x^{k-1}$ avec $i + 1 < x$, donc $v_x(n) = k - 1$ (copie simple) ; pour $i = x - 1$, $n = x^k$ et $v_x(x^k) = k = (k-1) + 1$: seule la dernière copie voit sa dernière composante incrémentée. Ceci est exactement la règle du dernier fils. □

Remarque : Le rôle combinatoire de la règle du dernier fils est de coder la *retenue* de l'écriture en base x : seule la position x^k, débordement complet de tous les niveaux, voit sa valuation augmenter - le chip-firing relu comme addition avec retenue en base x.

4. Un critère exact de primalité par sommes de valuations

Définition 7. *Pour* $m \geq 2$*, on pose, avec la convention* $v(m, 1) := 1$*,*

$$S(m) = 1 + \sum_{k=2}^{\lfloor \sqrt{m} \rfloor} v(m, k), \qquad {k_e}^e \mid m,\ e \geq 0 \text{ (\textit{valuation k-adique})}.$$

Théorème 8 (Critère exact)**.** *Pour tout* $m \geq 2$ *:* $S(m) = 1 \iff m$ *est premier, et* $S(m) \geq 2 \iff m$ *est composé. Par suite* $\lfloor 1/S(m) \rfloor = \mathbf{1}_{m \text{ premier}}$ *et*

$$\pi(x) = \sum_{m=2}^{x} \left\lfloor \frac{1}{S(m)} \right\rfloor$$

est une identité exacte, sans terme d'erreur, pour tout $x \geq 2$*.*

Démonstration. Si m est premier, tout k avec $2 \leq k \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor$ vérifie $2 \leq k < m$, donc $k \nmid m$ et $v(m, k) = 0$: $S(m) = 1$. Réciproquement, si $m \geq 4$ est composé, son plus petit facteur premier p vérifie $p \leq \sqrt{m}$ (sinon $m = pq$ avec $p, q > \sqrt{m}$ donne $m = pq > m$, absurde) ; ce p appartient à $[2, \lfloor \sqrt{m} \rfloor]$ et $v(m, p) \geq 1$, donc $S(m) \geq 2$. Comme $S(m)$ est un entier ≥ 1, $\lfloor 1/S(m) \rfloor$ est exactement l'indicatrice de primalité, et la somme télescope en $\pi(x)$. □

Remarque [Bilan des deux formules de l'auteure] : la formule de 2020 (borne $\sqrt{y}$, avec $\lfloor 1/f(y) \rfloor$) est exacte. La formule de 2023 (borne $y/2$, astuce $1/(1 - f^{15})$) n'est qu'une approximation numérique : $1/(1 - f^{15})$ est proche de 0 dès que $f \geq 1$, jamais rigoureusement nul. Le raffinement de 2020 est une amélioration réelle : on passe d'un test heuristique en $\Theta(y)$ à un test exact en $\Theta(\sqrt{y})$ divisions.

5. Unification : les trois lectures d'un crible arborescent

Proposition 9 (Primalité arborescente)**.** *$m \geq 2$ est premier $\iff$ pour tout $k \in \{2, \ldots, \lfloor\sqrt{m}\rfloor\}$, $r_k(m) \neq 0$: son chemin dans l'arbre des restes évite tout nœud obstrué (résidu nul) jusqu'au niveau $\lfloor\sqrt{m}\rfloor$.*

Démonstration. $r_k(m) = 0 \iff k \mid m \iff v(m,k) \geq 1$, et le théorème **??** équivalent à $S(m) = 1$. □

Remarque [Dictionnaire des trois lectures] : dans l'arbre à arité variable, un nœud de niveau k portant le résidu 0 est un nœud *obstrué* (il révèle un diviseur) : m est premier ssi son chemin évite tout nœud obstrué jusqu'au niveau $\lfloor\sqrt{m}\rfloor$ - c'est la lecture *binaire* (décision), géométrie du crible d'Ératosthène-Legendre. L'arbre homogène de chip-firing est le raffinement quantitatif à une seule base x fixée : là où l'arbre des restes ne dit que $r_x(m) = 0$ ou non, il fournit l'exposant exact $v_x(m)$, la *profondeur* de l'obstruction - c'est la lecture *quantitative* à base fixée. La formule de $\pi(x)$ par sommes de valuations est la lecture *comptable*, qui télescope l'indicatrice en $\pi(x)$. Cas particulier homogène (information fine : l'exposant) et cas hétérogène (arité variable, information grossière : le résidu nul ou non) d'un seul et même arbre de crible.

6. Application à Goldbach : l'obstruction quantitative

Proposition 10 (Version quantitative de l'obstruction locale/globale)**.** *Soit n pair, p un décomposant de Goldbach de n ($q = n - p$ premier), $m \geq 2$ fixé, $j \geq 0$, $n' = n + jL_m$ et $q' = n' - p$.*

1. *Si $m \geq \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$, les mots de restes jusqu'au niveau m déterminent complètement la primalité de q' à partir de celle de q (aucune obstruction nouvelle ne peut apparaître au-delà du niveau m, puisqu'il n'y a rien à tester au-delà de $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor \leq m$).*
2. *Si $m < \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$ - ce qui se produit nécessairement pour j assez grand, puisque $q' \sim jL_m \to \infty$ à m fixé - le théorème d'invariance ne contrôle que les $m-1$ premières composantes de $W_{\lfloor\sqrt{q'}\rfloor}(q')$: il reste $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$ composantes $r_{m+1}(q'), \ldots, r_{\lfloor\sqrt{q'}\rfloor}(q')$ dont la nullité n'est pas déterminée par la translation, et dont dépend pourtant, seule, la primalité de q'.*

Démonstration. (i) est immédiat : si $m \geq \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$, toutes les composantes nécessaires au critère arborescent sont fixées par $W_m(q') = W_m(q)$. (ii) : $L_m \geq 2$ est fixé dès que m l'est, donc $q' = q + jL_m \to \infty$ quand $j \to \infty$, tandis que $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor \to \infty$ et m reste constant : à partir d'un certain j, $m < \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$ et les composantes de rang $> m$ échappent au contrôle de la translation. □

Remarque déficit de contrôle croît exactement comme $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$: la formalisation par valuations ne comble pas l'écart local/global, elle en donne la mesure exacte.

7. Couplage des chemins de p et q : le gnomon de zéros

Lemme 11 (Couplage)**.** *Soit n pair, $p \in \{2, \ldots, n-2\}$, $q = n - p$. Pour tout $k \geq 2$:*

$$r_k(p) + r_k(q) \equiv r_k(n) \pmod{k}.$$

Démonstration. Immédiat : $p + q = n$, et la réduction modulo k est un morphisme additif. □

Définition 12 (Sécurité couplée)**.** *Pour $k \geq 2$, posons $O_k(n) := \{0, r_k(n) \bmod k\} \subset R_k$ avec $|O_k(n)| = 1$ si $k \mid n$, $|O_k(n)| = 2$ sinon. On dit que p est k-sûr (pour n) si $r_k(p) \notin O_k(n)$, c'est-à-dire si $k \nmid p$ et $k \nmid q$.*

Proposition 13 (Gnomon de zéros arborescent)**.** *p et $q = n - p$ sont tous deux premiers si et seulement si, pour tout k avec $2 \leq k \leq \min(\lfloor\sqrt{p}\rfloor, \lfloor\sqrt{q}\rfloor)$, le couple $(r_k(p), r_k(q))$, contraint à la diagonale $\Delta_k(n) = \{(a, b) \in R_k^2 : a + b \equiv r_k(n)\}$, évite l'équerre $\{a = 0\} \cup \{b = 0\}$ (le gnomon) de $R_k \times R_k$. La trace du gnomon sur $\Delta_k(n)$ vaut $\{(0, r_k(n)), (r_k(n), 0)\}$ - exactement $O_k(n)$.*

Démonstration. Application de la primalité arborescente à p et à q séparément, puis traduction : le couple $(r_k(p), r_k(q))$ vit sur la droite $\Delta_k(n)$ (lemme de couplage), et le gnomon de $R_k \times R_k$ est exactement l'ensemble des points où p ou q est multiple de k. □

Remarque [Non-détail qu'il faut assumer] : la caractérisation exige $k < p$ et $k < q$ *strictement*, pour éviter l'auto-obstruction triviale. C'est automatique en testant jusqu'à $\min(\sqrt{p}, \sqrt{q})$; pour une profondeur uniforme M commune, il faut restreindre l'énoncé aux candidats non-frontières $M < p < n - M$, laissant de côté $O(\sqrt{n})$ petits candidats vérifiables directement. Ce n'est pas gênant pour la suite, mais ce n'est pas un détail qu'on a le droit de balayer silencieusement.

8. Comptage : la densité couplée retombe sur la série singulière

Fixons une profondeur uniforme M et ne gardons que les premiers $\ell \leq M$ (les k composés n'apportent aucune obstruction nouvelle : si $ab \mid p$, déjà $\gcd(a, b)$... plus précisément si k composé divise p, alors un facteur premier de k divise déjà p, détecté au niveau ℓ_1). Par le théorème des restes chinois, les classes "doublement sûres" à tous les niveaux $\ell \leq M$ ont pour densité

$$\delta_M(n) \;=\; \frac{1}{2} \prod_{\substack{\ell \text{ premier} \\ 2 < \ell \leq M,\ \ell \mid n}} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) \prod_{\substack{\ell \text{ premier} \\ 2 < \ell \leq M,\ \ell \nmid n}} \left(1 - \frac{2}{\ell}\right),$$

soit le facteur $\dfrac{\ell - 1}{\ell}$ si $\ell \mid n$ (une seule classe interdite, les deux valeurs coïncidant), $\dfrac{\ell - 2}{\ell}$ sinon (deux classes interdites distinctes), et le facteur $\dfrac{1}{2}$ pour $\ell = 2$ car n pair force p impair.

Proposition 14 (Série singulière)**.** *$\delta_M(n)$ est exactement la densité tronquée à M de la série singulière de Hardy-Littlewood pour Goldbach : la densité locale exacte du gnomon couplé.*

Démonstration. Produit du théorème des restes chinois sur les $\mathrm{O}_\ell(n)$: facteur $\dfrac{\ell - 1}{\ell}$ si $\ell \mid n$, $\dfrac{\ell - 2}{\ell}$ sinon (deux classes interdites, distinctes puisque $\ell \nmid n$), et facteur $\dfrac{1}{2}$ pour $\ell = 2$ car n pair force p impair. □

Ce que le couplage peut, et ne peut pas, faire

Pour tout M fixé, $\delta_M(n) > 0$, et sa limite normalisée est la constante de Hardy-Littlewood $S(n) > 0$: ceci est élémentaire et se déduit entièrement du théorème chinois. Ce qui manque est plus fin : passer de "une proportion positive de classes résiduelles échappe au gnomon jusqu'au niveau M" à "un entier concret p de l'intervalle $(M, n-M)$ échappe au gnomon jusqu'au niveau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$". C'est la proposition **??** appliquée au couple (p, q) : le déficit $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - M$ de niveaux non contrôlés.

Plus précisément : la construction ci-dessus est, à la notation près, le crible combinatoire (Ératosthène-Legendre) appliqué simultanément à deux suites linéaires liées, p et $n-p$. Un crible fondé sur des congruences locales et le théorème des restes chinois ne peut détecter que le nombre de facteurs premiers d'un entier, non sa parité : c'est un théorème (Selberg), pas une conjecture. Aucun raffinement purement combinatoire de la construction ci-dessus - gnomon, couplage, théorème des restes chinois plus fin - ne peut le contourner de l'intérieur. C'est pourquoi la borne de crible de Brun, correcte du bon ordre de grandeur par le haut, n'est pas accompagnée de la minoration correspondante qui donnerait Goldbach.

9. Ce que le crible donne malgré tout : la borne de Brun

Pourquoi l'inclusion-exclusion naïve explose

Fixons n pair, un seuil z, et posons $P(z) = \prod_{2<\ell\le z} \ell$ produit sur les premiers. Pour $d \mid P(z)$, notons $\omega(d)$ le nombre de classes résiduelles interdites modulo d par le gnomon couplé (définition de la sécurité couplée) : ω est multiplicative, $\omega(\ell) = 1$ si $\ell \mid n$, $\omega(\ell) = 2$ sinon.

Lemme 15 (Formule de Legendre couplée)**.** *Le nombre $D(n, z)$ d'entiers $m \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que ni m ni $n-m$ ne soit divisible par un premier $\le z$ (autre que 2) vaut*

$$D(n,z) \;=\; \sum_{d \mid P(z)} \mu(d)\,\omega(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \;+\; \mathrm{O}\left(\sum_{d \mid P(z)} \omega(d) \right).$$

Démonstration. Inclusion-exclusion standard sur les événements $\{\ell \mid m\} \cup \{\ell \mid n-m\}$, dont le cardinal dans $\{1, \dots, n-1\}$ est $\dfrac{\omega(\ell)}{\ell} n + O(1)$ par classe résiduelle ; la multiplicativité de ω vient du théorème des restes chinois. □

Le terme principal vaut, par le théorème de Mertens, $n \prod_{\ell \le z} \left(1 - \dfrac{\omega(\ell)}{\ell}\right) \asymp S(n) \dfrac{n}{(\log z)^2}$: on retrouve la constante $S(n)$ de la proposition **??**. Mais le terme d'erreur vaut $\prod_{\ell \le z}(1+\omega(\ell)) \approx 3^{\pi(z)}$, qui dépasse le terme principal dès que $z \gg \log n$. Or il faut $z \sim \sqrt{n}$ pour que $D(n, z)$ compte exactement les décompositions de Goldbach (proposition **??**). C'est l'obstacle de la proposition **??**, relu ici comme explosion du terme d'erreur plutôt que déficit combinatoire abstrait : le même mur, sous un autre habillage.

La troncature de Brun

Lemme 16 (Bonferroni)**.** *Pour toute famille finie d'événements et tout entier pair r, la somme d'inclusion-exclusion tronquée aux termes d avec $\Omega(d) \le r$ majore le cardinal exact ; tronquée à $\Omega(d) \le r+1$, elle le minore.*

Démonstration. Récurrence standard sur le nombre d'événements : on regroupe les termes de l'alternance de signe restante deux par deux, en utilisant $\binom{k}{2s} \ge \binom{k}{2s+1}$. □

Théorème 17 (Brun, 1920)**.** *Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que, pour tout n pair, $n \ge 4$:*

$$D(n) \;=\; \#\{p \text{ premier} : p,\ n-p \text{ premiers}\} \;\le\; C\,S(n)\,\frac{n}{(\log n)^2}.$$

Commentaire de preuve. On choisit r pair et on somme l'inclusion-exclusion tronquée du lemme **??** aux seuls d avec $\Omega(d) \le r$, ce qui borne le terme d'erreur par une quantité finie au lieu de $3^{\pi(z)}$. L'optimisation conjointe de (z, r) - le point technique délicat, qui relève de l'analyse combinatoire de Brun et de Halberstam-Richert - est citée ici plutôt que redémontrée : elle demande un contrôle fin par récurrence sur la "dimension" du crible, qui dépasse le cadre élémentaire de cette note. □

Corollaire 18. *La borne du théorème **??** est du bon ordre de grandeur conjectural (celui de Hardy-Littlewood, à la constante près) : le crible élémentaire, correctement tronqué, retrouve le comportement attendu de $D(n)$ par le haut. Ce qu'il ne peut pas produire, pour la raison structurelle de la section **??** (parité de Selberg), c'est la minoration $D(n) \gg S(n)\,n/(\log n)^2$, qui donnerait Goldbach pour n assez grand. C'est ce qui explique que le meilleur résultat inconditionnel (Chen, 1973) ne soit pas Goldbach lui-même mais l'énoncé affaibli : tout n pair assez grand s'écrit $n = p + m$ avec p premier et m ayant au plus deux facteurs premiers.*

10. L'ordre moyen : le théorème accessible

Là où l'énoncé *ponctuel* reste hors de portée, l'énoncé *moyenné* est démontrable inconditionnellement, par un argument global qui fait fi des chemins individuels dans l'arbre.

Théorème 19 (Ordre moyen)**.** *Il existe des constantes absolues $c_1, c_2 > 0$ telles que, pour tout $X \ge 4$:*

$$c_2\,\frac{X^2}{(\log X)^2} \;\le\; \sum_{\substack{n \le X \\ n \text{ pair}}} D(n) \;\le\; c_1\,\frac{X^2}{(\log X)^2}.$$

*Le nombre moyen de décompositions de Goldbach d'un entier pair $n \le X$ est donc $\asymp (\log X)^{-2}$, cohérent avec la moyenne de la densité $\delta_{X^{1/2}}$ (proposition **??**).*

Démonstration. On compte globalement : $R(X) = \sum_{n \le X,\ n \text{ pair}} D(n) = \#\{(p,q) : p, q \text{ premiers}, p+q \le X,\ p \le q\}$.

Majoration : chaque premier $p \le X$ s'associe à au plus $\pi(X)$ partenaires, donc (Tchebychev et théorème des nombres premiers)

$$R(X) \le \pi(X)^2 \le C_1^2 \frac{X^2}{(\log X)^2}.$$

Minoration : dans la fenêtre $p, q \in \left[\frac{X}{4}, \frac{X}{2}\right]$, tout couple vérifie $p+q \leq X$, et la fenêtre contient $\pi\left(\frac{X}{2}\right) - \pi\left(\frac{X}{4}\right) \geq c_2' \frac{X}{\log X}$ premiers (théorème des nombres premiers aux deux extrémités), donc $\gg (\frac{X}{\log X})^2$ couples, dont la moitié a $p \leq q$. Enfin, la moyenne par n se lit en divisant par $\lfloor X/2 \rfloor$. □

Remarque : le théorème ne prouve pas Goldbach : une moyenne n'interdit pas les trous. Mais dans le langage de l'arbre, il dit exactement ceci : en *sommant sur toutes les feuilles* du niveau X en oubliant leur chemin individuel, le gnomon couplé donne le bon compte - précisément ce que la proposition **??** interdisait de faire au niveau d'un seul n. L'ordre moyen est accessible là où l'énoncé ponctuel ne l'est pas ; c'est le contenu positif maximal du cadre élémentaire.

11. Conclusion et bilan honnête

Trois constructions indépendantes - arbre des restes à arité variable, arbre de chip-firing x-naire, formule de $\pi(x)$ par valuations - sont trois lectures d'un seul crible arborescent, et les faits constatés numériquement y sont démontrés (théorèmes **??** et **??**). Appliqué à Goldbach, le cadre produit :

1. une obstruction quantitative précise : le déficit $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$ de niveaux non contrôlés (proposition **??**) ;
2. le couplage exact des chemins de p et q, dont la densité locale est la série singulière de Hardy-Littlewood (proposition **??**) ;
3. la borne de Brun, du bon ordre de grandeur par le haut (théorème **??**) ;
4. l'ordre moyen, inconditionnel (théorème **??**).

Ce que le cadre ne peut pas produire, c'est la minoration : un crible fondé sur les congruences locales et le théorème des restes chinois sont ensemble aveugles à la parité du nombre de facteurs premiers, et c'est un théorème (Selberg), non une lacune d'ingéniosité. Toute avancée ultérieure devra injecter une information d'une autre nature - analytique, ou une identité combinatoire encore non découverte capturant la parité. Nommer cette limite clairement *avant* de s'y engager fait partie du résultat : le mérite de ce cadre n'est pas de résoudre Goldbach, mais de faire voir, en géométrie d'arbre, exactement où et pourquoi le crible s'arrête.

Références

[1] Denise Vella-Chemla, *Conjecture de Goldbach et chip-firing games*, 19 août 2018.
https://denisevellachemla.eu/chip-firing-gb.pdf

[2] Denise Vella-Chemla, *Arbres*, 29 septembre 2018.
https://denisevellachemla.eu/arbre-chip.pdf

[3] Denise Vella-Chemla, *Conjecture de Goldbach, chip-firing game, matrices* 2×2 *et descente infinie*, 20 août 2018.
https://denisevellachemla.eu/chip-firing-doublons.pdf

[4] Denise Vella-Chemla, *Valuations p-adiques, suite*, Toussaint 2020.
https://denisevellachemla.eu/reprise-valpadic.pdf

[5] Denise Vella-Chemla, *Revenir à l'algorithme de calcul du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné en utilisant les valuations p-adiques*, août 2023.
https://denisevellachemla.eu/padic-retour.pdf

[6] Arbres des restes à arités variables, 2026.
https://denisevellachemla.eu/formalisation-arbres-de-restes-valuations-p-adiques-synthese-claude-dvc.pdf

[7] Viggo Brun, 1920 - voir Halberstam et Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, 1974, pour la forme moderne.

[8] Jingrun Chen, *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica 16 (1973).