

1. Objet du calcul

Pour un entier pair N , on considère

$$m + (N - m) = N.$$

Pour chaque premier $p \leq \sqrt{N}$, le double crible élimine

$$m \equiv 0 \pmod{p}, \quad m \equiv N \pmod{p}.$$

La seconde condition signifie que p divise $N - m$.

Le programme compte les nombres qui passent à travers ces deux cribles dans la fenêtre

$$\sqrt{N} < m \leq N/2.$$

2. Pourquoi cette fenêtre ?

Pour $N > 4$, dans cette fenêtre,

$$m > \sqrt{N}, \quad N - m \geq N/2 > \sqrt{N}.$$

Si aucun premier $p \leq \sqrt{N}$ ne divise un entier $m > \sqrt{N}$, alors m est premier. Le même raisonnement vaut pour $N - m$.

Ainsi, dans cette fenêtre, les nombres qui passent à travers le double crible correspondent exactement aux décompositions

$$N = m + (N - m)$$

dont les deux termes sont premiers et strictement supérieurs à $\sqrt{N}$.

On note $S(N)$ leur nombre.

3. Produit local

Pour un premier $p \leq \sqrt{N}$ tel que $p \nmid N$, les deux classes 0 et N modulo p sont distinctes. La proportion locale autorisée est donc

$$1 - \frac{2}{p}.$$

Si $p \mid N$, ces deux classes coïncident et la proportion est

$$1 - \frac{1}{p}.$$

On définit donc

$$L(N) = \prod_{\substack{p \leq \sqrt{N} \\ p \nmid N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p \leq \sqrt{N} \\ p \mid N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

La quantité de comparaison utilisée par le programme est

$$T(N) = \frac{N}{2} L(N).$$

Attention : $T(N)$ est une estimation obtenue par les densités locales ; ce n'est pas une identité.

4. La divergence étudiée

Le programme calcule

$$E(N) = S(N) - T(N)$$

et

$$Q(N) = \frac{S(N)}{T(N)}.$$

Il calcule également l'erreur relative

$$\frac{E(N)}{T(N)} = Q(N) - 1.$$

L'objectif est de voir expérimentalement si l'écart entre le comptage effectif et le produit local possède une structure particulière.

En particulier, nous voulons savoir si la symétrie

$$m \longleftrightarrow N - m$$

produit une annulation ou une régularité que ne ferait pas apparaître un simple argument de densité.

5. Ce que le programme ne démontre pas

Même si $Q(N) > 1$ pour tous les N testés, cela ne constituerait pas une preuve de Goldbach pour tout N .

Le but est de déterminer s'il existe une loi ou une borne sur $E(N)$ qui pourrait ensuite être démontrée mathématiquement.

Le calcul ne prétend donc pas résoudre à lui seul l'obstruction de parité.

6. Pourquoi cela est lié à l'obstruction de parité

L'obstruction de parité est une difficulté réelle des méthodes de crible : les seules informations locales sur les petits diviseurs ne suffisent généralement pas à distinguer assez finement les nombres premiers des nombres ayant plusieurs facteurs premiers.

Mais il ne faut pas transformer cette difficulté en l'affirmation beaucoup plus forte selon laquelle toute construction utilisant un crible serait nécessairement incapable de démontrer Goldbach.

Notre construction contient une information supplémentaire :

$$m + (N - m) = N.$$

Le programme teste précisément si cette relation additive et le couplage $m \leftrightarrow N - m$ se manifestent dans la divergence.

7. Sorties

Pour chaque entier pair N , le fichier CSV éventuel contient :

- $S(N)$: nombre de nombres qui passent à travers le double crible dans la fenêtre centrale ;
- $L(N)$: produit local ;
- $T(N) = \frac{N}{2}L(N)$;
- $E(N) = S(N) - T(N)$;
- $E(N)/T(N)$;
- $Q(N) = S(N)/T(N)$.

Le programme affiche également les valeurs extrêmes de $Q(N)$.

8. Utilisation

Premier essai :

```
python double_crible_discrepancy.py --max 10000
```

Avec sauvegarde CSV :

```
python double_crible_discrepancy.py --max 100000 \  
--csv resultats_double_crible.csv
```

On peut augmenter progressivement la borne. Il est préférable de commencer modestement afin de vérifier les résultats avant un calcul long.

On obtient ce genre de résultats.

```

N=10,000 S=125 Q=0.97918792
tranche=10000-99999
N=20,000 S=225 Q=1.02934172
tranche=10000-99999
N=30,000 S=590 Q=0.97046444
tranche=10000-99999
N=40,000 S=379 Q=0.99650014
tranche=10000-99999
N=50,000 S=440 Q=0.94282171
tranche=10000-99999
N=60,000 S=1074 Q=1.00100337
tranche=10000-99999
N=70,000 S=706 Q=0.96232214
tranche=10000-99999
N=80,000 S=643 Q=0.94759612
tranche=10000-99999
N=90,000 S=1454 Q=0.96571491
tranche=10000-99999
N=100,000 S=800 Q=0.97514998
tranche=100000-999999
=====
TRANCHE N Q_min N_min Q_moy Q_max N_max S_min S=1
8-99 47 0.41176471 68 0.90911621 1.53846154 26 1 10
100-999 450 0.67543860 152 1.02787470 1.38434004 298 3 0
1000-9999 4500 0.72346567 1412 1.01477683 1.27911799 1108 14 0
10000-99999 45000 0.86882333 26054 0.97909497 1.15902031 13756 88 0
100000-999999 1 0.97514998 100000 0.97514998 0.97514998 100000 800 0
===== INTERPRETATION BRUTE DES DONNEES =====
S_min = minimum observé de S(N) dans la tranche.
S=1 = nombre de N de la tranche ayant exactement un m qui passe à travers le crible.
Q_min/Q_max = extrêmes expérimentaux de S(N)/T(N).
Q_moy = moyenne arithmétique des Q(N) de la tranche.
Temps total = 400.30 s

```

9. Ce qu'il faudra examiner

Je propose en particulier de regarder :

1. le minimum de $Q(N)$;
2. le maximum de $Q(N)$;
3. les valeurs de $Q(N)$ lorsque N possède beaucoup de petits facteurs premiers ;
4. les valeurs de $Q(N)$ lorsque N en possède peu ;
5. la taille de $E(N)/T(N)$ lorsque N augmente.

Le point important n'est pas seulement de constater que $S(N)$ est positif. Nous savons déjà calculatoirement beaucoup de choses sur Goldbach. Nous cherchons ici une structure quantitative de

l'écart entre le double crible fini et son terme local.

10. Étape mathématique visée

Si une régularité robuste apparaît, l'objectif suivant sera de chercher à démontrer une formule de la forme

$$S(N) = \frac{N}{2}L(N) + E(N)$$

avec une borne théorique suffisamment forte sur $E(N)$.

Une telle borne, si elle impliquait $S(N) > 0$ pour tout entier pair N dans le cadre considéré, fournirait alors une véritable voie vers une preuve de Goldbach.