

Trois petits extraits de “Algebra can be fun” (“L’algèbre, ça peut être marrant”) de Yacov I. Perelman ¹, Denise Vella-Chemla, février 2026

Amusement 1 :

Résolvez-le d’un seul coup d’œil

Problème : Regardez brièvement l’équation $x^{x^3} = 3$ et trouvez immédiatement x .

Solution : Quiconque est familier des symboles algébriques trouvera que $x = \sqrt[3]{3}$.

Il doit en être ainsi parce que

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3.$$

Par conséquent,

$$x^{x^3} = x^3 = 3$$

qui est ce que nous recherchions.

Pour ce qui ne peuvent pas résoudre le problème “en un coup d’œil”, lisez plutôt ceci.

Posons

$$x^3 = y$$

Alors

$$x = \sqrt[3]{y}$$

et l’équation devient

$$(\sqrt[3]{y})^y = 3$$

où, en élevant au cube ²

$$y^y = 3^3.$$

Il est clair que $y = 3$ et, par conséquent,

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

Amusement 2 : N’importe quel nombre, avec 3 deux.

Terminons ce livre par une énigme algébrique amusante qui a séduit les participants d’un congrès de physiciens à Odessa. Le problème consiste à représenter un nombre quelconque (entier positif) à l’aide de trois chiffres deux et de symboles mathématiques.

Solution

1. Mir Eds, 1979.

2. Remarque : on peut mettre toute une “échelle” de puissances de x , comme ceci $x^{x^{x^{\dots^{x^3}}}}$, ça marche aussi !

Prenons un cas particulier. Supposons qu'on nous donne le nombre 3. Alors le problème est résolu ; en effet :

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Il est facile de voir que cette équation est vraie en effet,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}},$$

$$\log_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3}, \quad -\log_2 2^{-3} = 3.$$

Si on remplace 3 par 5, on procède de la même manière :

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

On verra qu'on a utilisé le fait que l'indice 2 est éliminé par la racine carrée.

La solution générale ressemble à ça. Si le nombre à calculer est N , alors

$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{2}}}}}_{N \text{ fois}},$$

le nombre de signes racine carrée à utiliser étant égal à N^3 .

Amusement 3 : Les logarithmes en musique.

Les musiciens n'apprécient pas souvent les mathématiques ; la plupart respectent cette science mais préfèrent s'en tenir à l'écart. Pourtant, même ceux qui ne vérifient pas "l'harmonie au moyen de l'algèbre" (comme Salieri de Pouchkine) sont bien plus souvent en contact avec les mathématiques qu'ils ne le soupçonnent ; qui plus est, avec des notions aussi redoutables que les logarithmes.

Je me permets ici une courte citation d'un article du regretté physicien, le professeur A. Eichenwald. Il est paru dans le *Calendrier astronomique russe de 1919* et s'intitulait "Sur les grandes et les petites distances".

Un ami de lycée aimait jouer du piano mais détestait les mathématiques. Il parlait avec un certain mépris du fait que la musique et les mathématiques n'avaient absolument rien en commun. "Il est

3. Note de la traductrice : je me rappelle quant à moi avoir été éberluée en 2011 par le fait qu'on pouvait retrouver les entiers $1, 2, 3, \dots, d$, en jouant avec les coefficients de n'importe quel polynôme de degré d . Voir ici <https://denisevellachemla.eu/d201111.pdf>.

vrai que Pythagore a découvert certaines relations entre les vibrations sonores, mais c'est précisément la gamme pythagoricienne qui s'est avérée inadaptée à notre musique.”.

Imaginez la surprise de mon ami lorsque je lui ai montré qu'en parcourant les touches d'un piano moderne, il jouait en réalité sur des logarithmes. En effet, les intervalles de la gamme chromatique tempérée ne sont pas équidistants, ni en termes de nombre de vibrations, ni en termes de longueur d'onde des sons correspondants ; ils sont les logarithmes de ces quantités. La seule différence est que la base des logarithmes est 2 au lieu de 10, le logarithme en base 10 étant celui qu'on utilise en général.

Supposons que la note *do* de l'octave la plus grave (que nous appellerons l'octave zéro) ait une fréquence de n vibrations par seconde. Alors la note *do* de la première octave aura une fréquence de $2n$ vibrations, celle de la m -ième octave, $n \times 2^m$ vibrations, et ainsi de suite. Notons toutes les notes de la gamme chromatique d'un piano par les nombres p , en supposant que la note fondamentale *do* de chaque octave soit la note zéro. Ainsi, par exemple, le sol est la septième note, le *la* la neuvième, et ainsi de suite. La douzième note est à nouveau le *do*, mais une octave plus haut.

Dans une gamme chromatique tempérée, chaque note possède $\sqrt[12]{2}$ vibrations de plus que la note précédente. Cela signifie que le nombre de vibrations de chaque note peut être exprimé par la formule suivante⁴ :

$$N_{pm} = n \times 2^m \left(\sqrt[12]{2} \right)^p.$$

En prenant les logarithmes, on obtient

$$\log N_{pm} = \log n + m \log 2 + p \frac{\log 2}{12}$$

ou

$$\log N_{pm} = \log n + \left(m + \frac{p}{12} \right) \log 2.$$

Maintenant, en prenant le nombre de vibrations du *do* le plus grave comme étant égal à un ($n = 1$) et en convertissant tous les logarithmes en base 2 (ou simplement en prenant $\log 2 = 1$), nous avons

$$\log N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

On constate ainsi que les numéros des touches d'un piano représentent les logarithmes des nombres de vibrations des sons correspondants (multipliés par 12). On peut même dire que le numéro de l'octave est la *caractéristique*, et le numéro du son dans l'octave donnée (divisé par 12) est la *mantisse* de ce logarithme.

Prenons un exemple. Pour le *sol* de la troisième octave, c'est-à-dire pour le nombre $3 + \frac{7}{12} (\approx 3.583)$, le nombre 3 est la *caractéristique* du logarithme du nombre de vibrations du son, et $\frac{7}{12} (\approx 0.583)$ est la *mantisse* de ce logarithme en base 2 ; par conséquent, le nombre de vibrations est $2^{3.583}$ ou 11.98 fois supérieur au nombre de vibrations du ton *do* de la première octave.

4. Note de la traductrice : J'avais fait cet exercice de programmation en python, pour trouver l'application qui permet de passer des entiers successifs aux notes de la gamme et inversement, voir ici <https://denisevellachemla.eu/trefle-musical.pdf> et le programme ici <https://denisevellachemla.eu/gammereprise.pdf>.