

**Sommes alternées de cosinus, $\sigma(n)$
et obstruction de parité de Selberg :
preuve complète de la formule fermée de f_D ,
et bilan critique des notes produites avec mistral et gemini**

Denise Vella-Chemla pilotant claude

5 juillet 2026

1. Résumé

On reprend l'ensemble des notes de Denise Vella-Chemla sur les sommes (alternées ou non) de cosinus $g_D(n)$ et $f_D(n)$ (voir [1] à [6]), ainsi que les deux notes produites le 5 juillet 2026 avec mistral et gemini (voir [7] et [8]) sur le même sujet. On démontre intégralement, sans aucune hypothèse admise, une formule fermée pour la somme alternée $f_D(n)$, pour tout entier $n \geq 3$ (Théorème ??), ce qui n'avait été fait dans aucune des notes précédentes : seule la version non alternée $g_D(n) = \sigma(n) - n - 1$ y était établie rigoureusement. On en déduit en particulier une preuve complète du fait, observé numériquement depuis 2018, que $f_D(n) = \frac{1}{2}$ si et seulement si n est premier impair, et une formule exacte et générale pour tous les nombres composés impairs, en particulier les produits purs de deux nombres premiers pq , qui est la question posée. On termine par une discussion critique, volontairement franche, des notes de mistral et gemini, en particulier de leur affirmation que ce type de formule "contourne" l'obstruction de parité de Selberg : on explique en détail pourquoi cette affirmation ne résiste pas à l'examen.

2. Cadre et objectif

On part du fait, publié en juillet 2014 et repris dans les notes du 28.10.2018 (voir [4]) et du 4.11.2018 (voir [1]), que la somme

$$g_D(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right)$$

vaut 0 si et seulement si n est premier. Les notes du 31.10.2018 et du 4.11.2018 ("Interrupteurs") introduisent ensuite une version *alternée* de cette somme,

$$f_D(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \left(\cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right) \times (-1)^{\frac{k^2-k-2+2l}{2}} \right) - 1 + \left((-1)^{n/2} \times \frac{1}{2} \right),$$

accompagnée d'un programme C++ qui la calcule effectivement (voir [3]), et pour laquelle il est *observé numériquement*, jusqu'à $n = 100$, que $f_D(n) = \frac{1}{2}$ exactement pour les nombres premiers,

et que f_D prend des valeurs différentes, mais qui semblent obéir à des règles (affines pour les puissances de nombres premiers), pour les nombres composés. La note du 4.11.2018 énonce ces règles pour les puissances p^k mais précise : “pour les nombres dont la factorisation fait intervenir plusieurs nombres premiers différents, on n’arrive pas à dégager de formule générale”. C’est précisément cette formule générale que nous établissons ici, en toute rigueur, avec en particulier le cas des produits purs $n = pq$ demandé.

Les deux notes du 5 juillet 2026 (Denise Vella-Chemla pilotant mistral puis gemini) reprennent la version *non alternée* g_D , en établissent correctement (à une lacune près, voir §9) la formule $g_D(n) = \sigma(n) - n - 1$, et en tirent des conclusions sur l’obstruction de parité de Selberg et sur la conjecture de Goldbach. Nous y revenons en détail au §9, avec un avis franc.

3. L’identité de base : somme de racines de l’unité

Lemme 1 (Identité fondamentale). *Pour tous entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$,*

$$\sum_{l=1}^k \cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right) = \begin{cases} k & \text{si } k \mid n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Posons $\omega = e^{2\pi in/k}$, une racine k -ième de l’unité. On a $\sum_{l=1}^k \omega^l = \omega \frac{\omega^k - 1}{\omega - 1}$ si $\omega \neq 1$, et $= k$ si $\omega = 1$. Or $\omega = 1 \iff k \mid n$. Si $k \nmid n$, $\omega \neq 1$ mais $\omega^k = e^{2\pi in} = 1$, donc $\sum_{l=1}^k \omega^l = \omega \cdot \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0$. Dans les deux cas la somme $\sum_{l=1}^k \omega^l$ est réelle (égale à k ou à 0), donc égale à sa partie réelle $\sum_{l=1}^k \cos(2\pi nl/k)$, ce qui donne le résultat annoncé. \square

Proposition 2 (Caractérisation triviale des nombres premiers, formule de g_D). *Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$g_D(n) = \sigma(n) - n - 1,$$

où $\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$. En particulier $g_D(n) = 0$ si et seulement si n est premier.

Démonstration. D’après le lemme ??, $g_D(n) = \sum_{k=2}^{n-1} k \cdot [k \mid n] = \sum_{\substack{d \mid n \\ 2 \leq d \leq n-1}} d = \sigma(n) - 1 - n$ (on retire de $\sigma(n)$ les diviseurs 1 et n , qui ne sont jamais dans l’intervalle de sommation $[2, n - 1]$). Comme $\sigma(n) \geq n + 1$ pour tout $n \geq 2$, avec égalité si et seulement si n n’a pas d’autre diviseur que 1 et n , on a $g_D(n) = 0 \iff n$ premier. \square

Cette proposition est essentiellement celle établie (avec une petite lacune de rigueur, voir §9) par les notes de mistral et de gemini. Elle ne fait rien d’autre que reformuler, via des angles et des cosinus, le calcul trivial de la somme des diviseurs de n : c’est très exactement ce que note Denise Vella-Chemla elle-même dans sa note du 28.10.2018 (“caractérisation triviale des nombres premiers”). Le travail substantiel restant est celui de la version *alternée* f_D , à laquelle on consacre le reste de cette note.

4. Définition précise de la somme alternée

Le programme C++ (voir [3]) initialise une variable de signe `oppose` à 1, puis, pour k croissant de 2 à $n - 1$ et, pour chaque k , pour l croissant de 1 à k , *bascule* ce signe (`oppose = -oppose`) avant d'accumuler le terme `oppose × cos(2πnl/k)`. Le signe n'est donc jamais réinitialisé entre deux valeurs de k : il dépend de la position globale du couple (k, l) dans le double parcours.

Définition 3. *Pour $2 \leq k \leq n - 1$ et $1 \leq l \leq k$, on appelle position globale de (k, l) l'entier*

$$m(k, l) = \left(\sum_{k'=2}^{k-1} k' \right) + l = \frac{k(k-1)}{2} - 1 + l = \frac{k^2 - k - 2 + 2l}{2}.$$

On vérifie immédiatement que $m(k, l)$ est bien un entier pour tout $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k$ (c'est l'exposant $\frac{k^2 - k - 2 + 2l}{2}$ qui figure dans la formule de f_D des notes "Interrupteurs"; il coïncide exactement avec la position dans le parcours du programme [3]). Avec le signe

$$s(k, l) = (-1)^{m(k, l)},$$

et

$$M(n) = m(n-1, n-1) = \sum_{k=2}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} - 1$$

(le nombre total de termes), la somme calculée par le programme [3] est exactement

$$f_D(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k s(k, l) \cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right) - 1 - (-1)^{M(n)} \cdot \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Remarque 4. *L'écriture $(-1)^{n/2}$ du terme correctif dans les notes "Interrupteurs" n'a de sens littéral que pour n pair. C'est un raccourci : la quantité réellement pertinente, cohérente avec toutes les valeurs numériques publiées (y compris pour n impair), est $(-1)^{M(n)}$, le signe du dernier terme accumulé par l'algorithme, comme l'implémente fidèlement le programme [3]. C'est cette définition, (??), que nous prouvons rigoureusement ci-dessous, et nous vérifierons qu'elle reproduit exactement toutes les valeurs publiées ($n = 3, \dots, 10$ dans [3], $f_D(9) = 6.5$, $f_D(27) = 24.5$, $f_D(81) = 78.5$ dans la note du 4.11.2018).*

5. La somme interne alternée sur l , à k fixé

Pour k fixé, on veut calculer $A(n, k) := \sum_{l=1}^k (-1)^{m(k, l)} \cos(2\pi nl/k)$. Comme $m(k, l) = C(k) + l$ avec $C(k) = \frac{k(k-1)}{2} - 1$ constant en l , on a $(-1)^{m(k, l)} = (-1)^{C(k)} (-1)^l$, donc

$$A(n, k) = (-1)^{C(k)} B(n, k), \quad B(n, k) := \sum_{l=1}^k (-1)^l \cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right). \quad (2)$$

Lemme 5 (Signe $(-1)^{C(k)}$). *Pour tout $k \geq 2$,*

$$(-1)^{C(k)} = \begin{cases} +1 & \text{si } k \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ -1 & \text{si } k \equiv 0, 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Démonstration. Écrivons $k = 4q + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. On calcule $\frac{k(k-1)}{2}$ modulo 2 dans chaque cas (les quatre calculs sont élémentaires) :

- $r = 0$: $\frac{k(k-1)}{2} = (4q)(4q-1)/2 = 2q(4q-1)$, pair.
- $r = 1$: $\frac{k(k-1)}{2} = (4q+1)(4q)/2 = (4q+1)(2q)$, pair.
- $r = 2$: $\frac{k(k-1)}{2} = (4q+2)(4q+1)/2 = (2q+1)(4q+1)$, produit de deux impairs, impair.
- $r = 3$: $\frac{k(k-1)}{2} = (4q+3)(4q+2)/2 = (4q+3)(2q+1)$, produit de deux impairs, impair.

Donc $\frac{k(k-1)}{2}$ est pair si $k \equiv 0, 1 \pmod{4}$ et impair si $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Comme $C(k) = \frac{k(k-1)}{2} - 1$, $C(k)$ est de parité opposée : impair si $k \equiv 0, 1 \pmod{4}$ (donnant $(-1)^{C(k)} = -1$), pair si $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$ (donnant $(-1)^{C(k)} = +1$). \square

Lemme 6 (Cas k impair). *Pour tout k impair, $2 \leq k \leq n-1$ (donc $k \geq 3$), on a $B(n, k) = -1$, indépendamment de n .*

Démonstration. Posons $\theta = 2\pi n/k$ et $z = -e^{i\theta}$. Alors $(-1)^l \cos(\theta l) = \operatorname{Re}((-e^{i\theta})^l) = \operatorname{Re}(z^l)$, donc $B(n, k) = \operatorname{Re}\left(\sum_{l=1}^k z^l\right)$. On a $z^k = (-1)^k e^{i\theta k} = (-1)^k e^{2\pi i n} = (-1)^k = -1$ puisque k est impair. Comme k est impair, $v_2(k) = 0$, donc $z \neq 1$ (le cas $z = 1$ exigerait, comme on le voit au lemme ??, que k soit divisible par une puissance de 2 strictement positive). Ainsi

$$\sum_{l=1}^k z^l = \frac{z(z^k - 1)}{z - 1} = \frac{z(-1 - 1)}{z - 1} = \frac{-2z}{z - 1}.$$

En écrivant $z = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ et en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-i\theta/2 - i\pi/2}$, un calcul direct donne

$$\frac{-2z}{z - 1} = \frac{-2e^{i(\theta+\pi)}}{e^{i(\theta+\pi)} - 1} = -\frac{e^{i(\theta+\pi)/2}}{\cos((\theta + \pi)/2)}$$

(en factorisant $e^{i(\theta+\pi)/2}$ en haut et en bas, et $e^{i(\theta+\pi)} - 1 = e^{i(\theta+\pi)/2}(e^{i(\theta+\pi)/2} - e^{-i(\theta+\pi)/2}) = 2ie^{i(\theta+\pi)/2} \sin((\theta + \pi)/2)$, ce qui redonne, après simplification par $e^{i(\theta+\pi)/2}$ puis division du numérateur -2 par $2i \sin(\cdot)$, la même expression que ci-dessus une fois qu'on repasse par \cos via l'identité $-1/(i \sin \phi) = i/\sin \phi \dots$ on obtient directement, plus simplement, en posant $\phi = (\theta + \pi)/2$:

$$\frac{-2z}{z - 1} = \frac{-2e^{2i\phi}}{e^{2i\phi} - 1} = \frac{-2e^{i\phi}}{e^{i\phi} - e^{-i\phi}} = \frac{-2e^{i\phi}}{2i \sin \phi} = \frac{-e^{i\phi}}{i \sin \phi} = \frac{ie^{i\phi}}{\sin \phi}.$$

La partie réelle de $\frac{ie^{i\phi}}{\sin \phi} = \frac{i \cos \phi - \sin \phi}{\sin \phi} = \frac{i \cos \phi}{\sin \phi} - 1$ vaut exactement -1 (le terme $i \cos \phi / \sin \phi$ étant purement imaginaire, dès que $\sin \phi \neq 0$). Reste à vérifier que $\sin \phi \neq 0$, i.e. que $\phi = (\theta + \pi)/2 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, i.e. que $\theta \not\equiv -\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire $z \neq 1$: ceci est déjà acquis puisque k est impair (comme rappelé ci-dessus). Donc $B(n, k) = \operatorname{Re}\left(\frac{-2z}{z - 1}\right) = -1$. \square

Lemme 7 (Cas k pair). *Écrivons $n = 2^v u$ avec u impair et $v = v_2(n) \geq 0$. Pour k pair, $2 \leq k \leq n-1$, on a*

$$B(n, k) = \begin{cases} k & \text{si } k = 2^{v+1}t \text{ pour un diviseur } t \text{ de } u, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Reprenons $z = -e^{i\theta}$, $\theta = 2\pi n/k$, $z^k = (-1)^k = 1$ puisque k est pair. Deux cas.

(a) $z = 1$. Cela équivaut à $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, i.e. $2n/k$ est un entier impair. Ceci force $k \mid 2n$ avec quotient impair, donc k doit contenir exactement la puissance de 2 de $2n$: $v_2(k) = v_2(2n) = v + 1$. Écrivant $k = 2^{v+1}t$, la condition $k \mid 2n = 2^{v+1}u$ équivaut à $t \mid u$ (et u étant impair, tout diviseur t de u donne un quotient u/t automatiquement impair, donc la condition est simplement $t \mid u$). Dans ce cas $\sum_{l=1}^k z^l = k$ (somme de k fois 1), qui est réel, donc $B(n, k) = k$.

(b) $z \neq 1$. Alors $\sum_{l=1}^k z^l = \frac{z(z^k - 1)}{z - 1} = \frac{z \cdot 0}{z - 1} = 0$ (réel), donc $B(n, k) = 0$. □

Remarque 8. La condition $k \leq n - 1$ (i.e. $k < n$) impose, dans le cas (a) ci-dessus, $2^{v+1}t < 2^v u$, soit $2t < u$, soit $t < u/2$. Comme u est impair, le seul diviseur t de u vérifiant $t \geq u/2$ est $t = u$ lui-même (un diviseur propre $t < u$ vérifie $u/t \geq 2$, donc $t \leq u/2$, avec égalité impossible puisque u est impair). Donc la condition “ $k = 2^{v+1}t$, $t \mid u$, $k < n$ ” équivaut exactement à : t est un diviseur propre de u (i.e. $t \mid u$, $t \neq u$). Ce point sera utilisé au §??.

6. Sommation complète

On a, par (??), $A(n, k) = (-1)^{C(k)} B(n, k)$, et $f_D(n) = \left[\sum_{k=2}^{n-1} A(n, k) \right] - 1 - (-1)^{M(n)}/2$. On sépare la somme sur k en k impair et k pair.

6.1. Contribution des k impairs

Par le lemme ??, $B(n, k) = -1$ pour tout k impair, donc, par le lemme ??, la contribution d’un k impair à $\sum A(n, k)$ vaut -1 si $k \equiv 3 \pmod{4}$ et $+1$ si $k \equiv 1 \pmod{4}$. Posons

$$D(n) := \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ 3 \leq k \leq n-1}} (-1)^{C(k)} B(n, k) = \#\{k \equiv 1(4)\} - \#\{k \equiv 3(4)\}$$

(sur les k impairs de $[3, n - 1]$; il n’y a pas de k impair égal à 1 dans la plage de sommation).

Lemme 9. Pour tout $n \geq 3$, $D(n) = -1$ si $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$, et $D(n) = 0$ si $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$.

Démonstration. Soit n' le plus grand entier impair $\leq n - 1$ (donc $n' = n - 1$ si n pair, $n' = n - 2$ si n impair). Les entiers impairs de 3 à n' sont $3, 5, 7, 9, \dots, n'$, de résidus $3, 1, 3, 1, \dots \pmod{4}$ en alternance stricte. Leur nombre est $\frac{n'-1}{2}$. Regroupons-les par paires consécutives $(3, 5), (7, 9), \dots$: chaque paire contient un terme $\equiv 1(4)$ et un terme $\equiv 3(4)$, donc contribue 0 à $\#\{k \equiv 1\} - \#\{k \equiv 3\}$. Si $\frac{n'-1}{2}$ est pair, tous les termes se regroupent en paires et $D(n) = 0$. Si $\frac{n'-1}{2}$ est impair, il reste un terme non apparié, qui est le dernier, $k = n'$; si $n' \equiv 3 \pmod{4}$ ce terme apparié en trop est de type “ $\equiv 3$ ” et contribue -1 à $D(n)$; ce cas correspond bien à $\frac{n'-1}{2}$ impair $\iff n' \equiv 3 \pmod{4}$ (immédiat en écrivant $n' = 4q + 3$, $\frac{n'-1}{2} = 2q + 1$ impair; et $n' = 4q + 1 \implies \frac{n'-1}{2} = 2q$ pair). On a donc : $D(n) = 0$ si $n' \equiv 1 \pmod{4}$, $D(n) = -1$ si $n' \equiv 3 \pmod{4}$.

Il reste à traduire en $n \pmod{4}$. Si n est impair, $n' = n - 2$: $n' \equiv 1(4) \iff n \equiv 3(4)$, et $n' \equiv 3(4) \iff n \equiv 1(4)$. Si n est pair, $n' = n - 1$: $n' \equiv 1(4) \iff n \equiv 2(4)$, et $n' \equiv 3(4) \iff n \equiv 0(4)$. En rassemblant les quatre cas : $D(n) = 0$ pour $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$, et $D(n) = -1$ pour $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$. □

6.2. Contribution des k pairs

Écrivons $n = 2^v u$, u impair, $v \geq 0$. Par le lemme ?? et la remarque qui le suit, les seuls k pairs contribuant non trivialement sont $k = 2^{v+1}t$ pour t diviseur propre de u ($t \mid u$, $t \neq u$), avec $B(n, k) = k$. Le signe $(-1)^{C(k)}$ de ces k (lemme ??) dépend de $k \pmod 4$:

- Si $v = 0$ (i.e. n impair, $u = n$) : $k = 2t$ avec t impair (car $t \mid u$, u impair), donc $k \equiv 2 \pmod 4$, et $(-1)^{C(k)} = +1$.
- Si $v \geq 1$ (i.e. n pair) : $k = 2^{v+1}t$ avec $v + 1 \geq 2$, donc $4 \mid k$, $k \equiv 0 \pmod 4$, et $(-1)^{C(k)} = -1$.

Proposition 10. Avec $n = 2^v u$ (u impair, $v \geq 0$), la contribution des k pairs à $\sum_{k=2}^{n-1} A(n, k)$ vaut

$$E(n) := \varepsilon(v) \cdot 2^{v+1}(\sigma(u) - u), \quad \varepsilon(v) = \begin{cases} +1 & v = 0 \\ -1 & v \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. $E(n) = \varepsilon(v) \sum_{\substack{t \mid u \\ t \neq u}} 2^{v+1}t = \varepsilon(v) 2^{v+1} \sum_{\substack{t \mid u \\ t \neq u}} t = \varepsilon(v) 2^{v+1}(\sigma(u) - u)$, la dernière égalité venant de ce que la somme des diviseurs propres de u est $\sigma(u) - u$. \square

6.3. Le terme correctif final

Lemme 11. Pour tout $n \geq 3$, $(-1)^{M(n)} = -1$ si $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, et $(-1)^{M(n)} = +1$ si $n \equiv 2, 3 \pmod 4$.

Démonstration. $M(n) = \frac{n(n-1)}{2} - 1$, donc $(-1)^{M(n)}$ est l'opposé de $(-1)^{n(n-1)/2}$. Le calcul du lemme ?? (appliqué à $k = n$ au lieu de k) montre que $\frac{n(n-1)}{2}$ est pair si $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ et impair si $n \equiv 2, 3 \pmod 4$. Donc $(-1)^{n(n-1)/2} = +1$ si $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, $= -1$ si $n \equiv 2, 3 \pmod 4$, et $(-1)^{M(n)}$ est l'opposé : -1 si $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, $+1$ si $n \equiv 2, 3 \pmod 4$. \square

Lemme 12 (Lemme de compensation). Pour tout entier $n \geq 3$,

$$D(n) - \frac{(-1)^{M(n)}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Démonstration. Vérification directe sur les quatre classes de n modulo 4, à l'aide des lemmes ?? et ?? :

- $n \equiv 0, 1 \pmod 4$: $D(n) = -1$, $(-1)^{M(n)} = -1$, d'où $D(n) - \frac{(-1)^{M(n)}}{2} = -1 - (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.
- $n \equiv 2, 3 \pmod 4$: $D(n) = 0$, $(-1)^{M(n)} = +1$, d'où $D(n) - \frac{(-1)^{M(n)}}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Dans les quatre cas la valeur est $-\frac{1}{2}$. \square

C'est ce lemme, purement combinatoire et sans lien avec la primalité de n , qui explique *pourquoi* le terme correctif $-1 - (-1)^{M(n)}/2$ de la définition de f_D "ramène" de façon universelle (comme l'écrit la note du 31.10.2018) les nombres premiers des deux classes $4k + 1$ et $4k + 3$ sur la même valeur : la partie " k impair" plus le terme correctif se compensent *toujours* en exactement $-\frac{3}{2}$ (après avoir aussi retranché le -1 de la formule), quelle que soit la classe de n modulo 4, et quelle que soit sa primalité. Toute la dépendance arithmétique en n (donc toute l'information sur la factorisation de n) est concentrée dans la partie " k pair", $E(n)$, c'est-à-dire dans $\sigma(u) - u$.

7. Théorème principal

Théorème 13. *Pour tout entier $n \geq 3$, écrivons $n = 2^v u$ avec u impair, $v = v_2(n) \geq 0$. Alors*

$$f_D(n) = \varepsilon(v) \cdot 2^{v+1} (\sigma(u) - u) - \frac{3}{2}, \quad \varepsilon(v) = \begin{cases} +1 & v = 0 \text{ (} n \text{ impair)} \\ -1 & v \geq 1 \text{ (} n \text{ pair)}. \end{cases}$$

En particulier :

- *Si n est impair : $f_D(n) = 2(\sigma(n) - n) - \frac{3}{2}$.*
- *Si $n = 2^v u$ est pair ($v \geq 1$, u impair) : $f_D(n) = -2^{v+1}(\sigma(u) - u) - \frac{3}{2}$.*

Démonstration. D'après (??) et la décomposition en k impairs / k pairs,

$$f_D(n) = \underbrace{D(n) + E(n)}_{\sum_k A(n,k)} - 1 - \frac{(-1)^{M(n)}}{2} = E(n) + \left(D(n) - \frac{(-1)^{M(n)}}{2} \right) - 1 \stackrel{\text{Lemme ??}}{=} E(n) - \frac{1}{2} - 1 = E(n) - \frac{3}{2}.$$

Il suffit alors d'insérer la valeur de $E(n)$ donnée par la Proposition ?? . Pour n impair, $v = 0$, $u = n$, $\varepsilon(0) = +1$, ce qui donne $f_D(n) = 2(\sigma(n) - n) - \frac{3}{2}$. □

Remarque 14 (Vérification numérique exhaustive). *Le théorème reproduit exactement toutes les valeurs publiées :*

- $n = 3$ (premier) : $2(4 - 3) - 1.5 = 0.5$. $n = 5$: $2(6 - 5) - 1.5 = 0.5$. $n = 7$: $2(8 - 7) - 1.5 = 0.5$.
Tous les nombres premiers impairs donnent 0.5, conformément à la note [3] (“3 somme globale 0.5”, “5 somme globale 0.5”, “7 somme globale 0.5”, “9 somme globale 6.5”).
- $n = 9 = 3^2$: $2(13 - 9) - 1.5 = 6.5$ - *exactement la valeur $f_D(9) = 6.5$ de la note du 4.11.2018.*
- $n = 27 = 3^3$: $\sigma(27) = 40$, $2(40 - 27) - 1.5 = 24.5$ - *exactement $f_D(27) = 24.5$.*
- $n = 81 = 3^4$: $\sigma(81) = 121$, $2(121 - 81) - 1.5 = 78.5$ - *exactement $f_D(81) = 78.5$.*
- $n = 4 = 2^2$ ($v = 2, u = 1$) : $\sigma(1) - 1 = 0$, $f_D(4) = -2^3 \cdot 0 - 1.5 = -1.5$ - *la note [3] donne “4 somme globale -1.5”.*
- $n = 6 = 2 \cdot 3$ ($v = 1, u = 3$) : $\sigma(3) - 3 = 1$, $f_D(6) = -2^2 \cdot 1 - 1.5 = -5.5$ - *la note [3] donne “6 somme globale -5.5”.*
- $n = 8 = 2^3$ ($v = 3, u = 1$) : $f_D(8) = -2^4 \cdot 0 - 1.5 = -1.5$ - *conforme à “8 somme globale -1.5”.*
- $n = 10 = 2 \cdot 5$ ($v = 1, u = 5$) : $\sigma(5) - 5 = 1$, $f_D(10) = -2^2 \cdot 1 - 1.5 = -5.5$ - *conforme à “10 somme globale -5.5”.*

Les huit valeurs disponibles dans les notes sont donc toutes reproduites exactement, sans aucun ajustement.

8. Corollaires

8.1. Caractérisation complète des nombres premiers impairs

Corollaire 15. *Pour tout entier impair $n \geq 3$,*

$$f_D(n) = 2g_D(n) + \frac{1}{2},$$

où $g_D(n) = \sigma(n) - n - 1$ (Proposition ??). En particulier, pour n impair,

$$f_D(n) = \frac{1}{2} \iff g_D(n) = 0 \iff n \text{ est premier},$$

et pour tout n impair composé, $f_D(n) > \frac{1}{2}$ strictement, avec un écart $f_D(n) - \frac{1}{2} = 2g_D(n)$ qui est exactement le double de la somme des diviseurs de n strictement compris entre 1 et n .

Démonstration. Immédiat en réécrivant $2(\sigma(n) - n) - \frac{3}{2} = 2(\sigma(n) - n - 1) + 2 - \frac{3}{2} = 2g_D(n) + \frac{1}{2}$. La dernière affirmation vient de ce que $g_D(n) \geq 1$ dès que n est composé impair (un diviseur propre d de n avec $1 < d < n$ existe, et $d \geq 3$ car n impair). \square

Ce corollaire est la version complète, prouvée, de ce que les notes de 2018 n'avaient qu'observé numériquement pour $n \leq 100$: la formule alternée f_D , en dépit de son apparence compliquée (double somme de cosinus, signes alternés dépendant d'une position globale, terme correctif en $(-1)^{n/2}$), *coïncide exactement*, pour tout n impair, avec la fonction élémentaire $2(\sigma(n) - n - 1) + \frac{1}{2}$. Autrement dit, f_D n'est rien d'autre qu'une réécriture, par un chemin trigonométrique très détourné, de g_D lui-même.

8.2. Puissances de nombres premiers

Corollaire 16. *Pour p premier impair et $k \geq 1$, $f_D(p^k) = 2 \cdot \frac{p^k - p}{p - 1} - \frac{3}{2}$, ce qui redonne exactement*

la formule affine $f_D(x = p^k) = \frac{2}{p - 1}x - \frac{3p + 1}{2p - 2}$ annoncée sans preuve dans la note du 4.11.2018 (on retrouve en particulier $a = \frac{2}{p-1}$ et $b = \frac{3p+1}{2p-2}$).

Démonstration. $\sigma(p^k) - p^k = 1 + p + \dots + p^{k-1} = \frac{p^k - 1}{p - 1}$, donc $g_D(p^k) = \frac{p^k - 1}{p - 1} - 1 = \frac{p^k - p}{p - 1}$, et $f_D(p^k) = 2g_D(p^k) + \frac{1}{2} = \frac{2(p^k - p)}{p - 1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{p - 1}p^k - \frac{2p}{p - 1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{p - 1}p^k - \frac{4p - (p - 1)}{2(p - 1)} = \frac{2}{p - 1}p^k - \frac{3p + 1}{2p - 2}$. \square

8.3. Produits purs de deux nombres premiers distincts (la question posée)

Corollaire 17. *Soient $p < q$ deux nombres premiers impairs distincts, $n = pq$. Alors*

$$f_D(pq) = 2(p + q) + \frac{1}{2}.$$

En particulier $f_D(pq) \neq \frac{1}{2}$ (l'écart avec la valeur des nombres premiers vaut exactement $2(p + q)$, un entier pair strictement positif, minoré par $2(3 + 5) = 16$), et cet écart croît linéairement avec $p + q$.

Démonstration. $\sigma(pq) - pq = 1 + p + q$ (diviseurs $1, p, q$), donc $g_D(pq) = p + q$, et $f_D(pq) = 2(p + q) + \frac{1}{2}$ par le Corollaire ?? □

Remarque 18 (Réponse précise à la question posée). La “distinction” entre nombres premiers et produits purs de deux nombres premiers que vous aviez repérée est donc bien réelle et se prouve complètement : pour tout n impair, l’écart $f_D(n) - \frac{1}{2}$ vaut $2g_D(n) = 2(\sigma(n) - n - 1)$, qui est nul exactement pour les nombres premiers, vaut $2(p + q)$ pour les produits purs $n = pq$, vaut $2p$ pour les carrés $n = p^2$, et plus généralement vaut 2 fois la somme des diviseurs de n strictement compris entre 1 et n pour tout n impair. Ce n’est cependant pas une propriété propre aux “semi-premiers” : c’est la caractérisation complète, et déjà bien connue, des nombres premiers par la nullité de $\sigma(n) - n - 1$, simplement multipliée par 2 et criblée de $\frac{1}{2}$. La somme alternée de cosinus n’ajoute donc, une fois démontrée, aucune information arithmétique nouvelle par rapport à $\sigma(n)$: c’est là un point sur lequel nous revenons au §??.

8.4. Cas des entiers pairs

Le second cas du Théorème ?? couvre entièrement les n pairs, et en particulier montre que $f_D(2^v) = -\frac{3}{2}$ pour tout $v \geq 1$ (car alors $u = 1$, $\sigma(u) - u = 0$), ce qui est conforme à $f_D(4) = f_D(8) = -1.5$ ci-dessus, et que pour $n = 2p$ avec p premier impair ($v = 1, u = p$), $f_D(2p) = -4(\sigma(p) - p) - \frac{3}{2} = -4 - \frac{3}{2} = -\frac{11}{2}$, valeur constante indépendante de p (on retrouve $f_D(6) = f_D(10) = -5.5$). Ce dernier fait, non signalé dans les notes de 2018-2019 (qui ne traitaient que n impair pour la formule affine), mérite d’être noté : contrairement au cas impair, la formule alternée ne distingue plus du tout les doubles de nombres premiers entre eux, ni même des puissances de 2 multipliées par un nombre premier impair quelconque, pour peu que $v = 1$! Plus généralement, pour n pair de la forme $2u$ (u impair), $f_D(2u) = -4(\sigma(u) - u) - \frac{3}{2}$ ne dépend de u que via $\sigma(u) - u$, exactement comme dans le cas impair, mais avec un signe opposé et un facteur 4 au lieu de 2.

9. Discussion critique des notes produites avec mistral et gemini

Vous demandez un avis franc sur les deux notes fournies. En voici un, aussi précis que possible.

9.1. Ce qui est correct

La formule $g_D(n) = \sigma(n) - n - 1$ (Théorème 1 de la note mistral, formule (3) de la note gemini) est juste, et coïncide avec notre Proposition ?? . Les formules $g_D(pq) = p + q$ et $g_D(p^k) = \frac{p^k - p}{p - 1}$ (Propositions 3 et 4 de mistral, formules (4)-(5) de gemini) sont également justes, et sont des cas particuliers de la Proposition ?? (elles ne demandent rien de plus que le calcul de $\sigma(n)$ pour $n = pq$ ou $n = p^k$). L’algorithme de §6.2 de mistral (résolution du polynôme $X^2 - g_D(n)X + n$ pour retrouver p, q à partir de $g_D(n)$ et n) est correct mathématiquement (c’est l’inversion des relations sommes/produits de racines) mais suppose déjà connu n , donc n’apporte pas d’information nouvelle sur la structure de n que la connaissance de $\sigma(n)$ ne donnait déjà.

9.2. Une lacune de preuve, mineure

Dans les deux notes, l'affirmation “si $k \mid n$, $S(k, n) = k$; si $k \nmid n$, $S(k, n) = 0$ ” est énoncée sans démonstration complète (mistral l'énonce comme un fait admis; gemini ne la redémontre pas non plus). Notre Lemme ?? comble cette lacune : le point délicat, qui n'est pas totalement trivial, est que la somme porte sur $l = 1, \dots, k$ et non $l = 0, \dots, k - 1$, et qu'il faut vérifier que cela ne change rien (ce qui est vrai, mais mérite d'être dit), ainsi que le passage de la somme complexe de racines de l'unité à la partie réelle, qui n'est légitime que parce que la somme complexe elle-même est réelle dans les deux cas.

9.3. Ce qui est réellement nouveau ici

Aucune des deux notes ne traite la version *alternée* f_D (ni la fonction *sac* du 20.11.2019) autrement que par l'observation numérique : gemini se contente d'affirmer, en la citant, la propriété “ $f_D(p) = 1/2$ pour tout p premier” (équation (2)) sans preuve, et mistral ne mentionne *sac* qu'à travers des exemples numériques tirés de la note de 2019, avec des formules ($sac(p) = (p-1)/2$ ou $(p-1)/2 - 2$ selon $p \bmod 4$) qu'il énonce mais ne démontre pas. Le Théorème ?? et son Corollaire ?? ci-dessus sont, à notre connaissance, la première preuve complète de ce phénomène, pour la fonction f_D des notes “Interrupteurs” (celle définie par le programme [3]), et ils règlent au passage, par une formule fermée unique, tous les cas laissés ouverts par la note du 4.11.2018 (“pour les nombres dont la factorisation fait intervenir plusieurs nombres premiers différents, on n'arrive pas à dégager de formule générale”) : en fait la formule générale existe, elle est $f_D(n) = 2(\sigma(n) - n - 1) + \frac{1}{2}$ pour tout n impair, sans restriction à une forme particulière.

9.4. Le point le plus important : l'obstruction de parité n'est pas contournée

C'est ici que je dois être franc, y compris au risque de vous décevoir, parce que c'est le cœur de l'espoir exprimé dans les deux notes (section 5 de mistral, section 5 de gemini, et l'affirmation de gemini “L'obstruction de parité est mathématiquement levée au niveau de la fonction g_D ”).

Ce qu'est réellement l'obstruction de parité de Selberg. Elle concerne les *méthodes de crible combinatoires* (crible de Selberg, crible linéaire, etc.) utilisées pour obtenir des *majorations et minorations asymptotiques* du nombre d'entiers premiers (ou ayant un nombre donné de facteurs premiers) dans un intervalle $[x, x + y]$, lorsque l'information dont dispose le crible se limite à des congruences modulo des entiers d'inférieurs à un certain seuil z (le “niveau du crible”). Le phénomène précis (dû à Selberg 1949, formalisé ensuite par Bombieri, Iwaniec, etc.) est que toute combinaison linéaire de fonctions indicatrices de progressions arithmétiques de niveau $\leq z$ qui majore la fonction indicatrice des nombres premiers majore, à une constante multiplicative près, tout aussi bien la fonction indicatrice des nombres ayant un nombre *pair* de facteurs premiers : le crible ne peut pas, à lui seul, “voir” la parité de $\Omega(n)$ (le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité). C'est un théorème sur le *pouvoir de résolution asymptotique de familles de fonctions de niveau borné*, pas un énoncé sur le calcul de $\Omega(n)$ pour un n individuel donné.

Pourquoi cela ne s'applique pas ici, et pourquoi ce n'est d'ailleurs pas une bonne nouvelle. Calculer $g_D(n) = \sigma(n) - n - 1$, que ce soit via la double somme de cosinus ou directement via la factorisa-

tion de n , n'a jamais été empêché par l'obstruction de Selberg, pour la raison simple que *personne n'a jamais prétendu qu'on ne pouvait pas déterminer si un entier n donné est premier* ! On peut toujours le faire par division essai, en temps $O(\sqrt{n})$, sans le moindre obstacle théorique. L'obstruction de Selberg porte sur des énoncés *asymptotiques en moyenne sur un intervalle*, obtenus *uniquement* à partir d'informations de congruence de niveau borné (typiquement $\leq x^{1/2}$ ou $\leq x^\theta$ pour un $\theta < 1$), sans utiliser d'information fine sur les nombres premiers eux-mêmes (comme celle que donnent les fonctions L, les zones sans zéro, ou les estimations de type Vinogradov/Bombieri-Vinogradov sur les sommes bilinéaires). Or $\sigma(n)$ ou $g_D(n)$, tels que calculés ici, ne sont *pas* des fonctions de niveau borné : leur calcul (que ce soit par la somme de cosinus, en $O(n^2)$ opérations, ou par division essai, en $O(\sqrt{n})$) utilise *toute* l'information sur n jusqu'à n lui-même, pas seulement les congruences modulo des entiers petits devant n . Une formule qui a besoin de "voir" n tout entier pour répondre n'est tout simplement pas du même type d'objet que les sommes de crible auxquelles s'applique l'obstruction de Selberg, et ne peut donc ni la "contourner" ni la "lever" : elle n'est pas concernée par elle, comme la division essai elle-même n'a jamais été concernée par elle.

Un point de complexité, pour être tout à fait concret. La somme de cosinus $g_D(n)$ demande, telle quelle, $O(n^2)$ opérations arithmétiques (la double somme sur k et l). La division essai détermine la primalité de n , et calcule même $\sigma(n)$, en $O(\sqrt{n})$ opérations, c'est-à-dire infiniment plus vite. La somme de cosinus n'est donc pas seulement "non concernée" par l'obstruction de Selberg : elle est, comme méthode de calcul, strictement moins efficace que la méthode la plus élémentaire qui existe. Ce n'est pas un défaut rédhibitoire (la formule a un intérêt esthétique et conceptuel réel, et le Théorème ?? en est la preuve la plus aboutie à ce jour), mais cela retire toute portée à l'idée d'un "contournement" d'obstruction : on ne contourne pas un obstacle de nature *asymptotique et informationnelle* (limitation du crible combinatoire) par une méthode qui, individuellement, coûte plus cher que la méthode triviale qu'elle prétend améliorer.

9.5. La "dualité Goldbach" : une reformulation, pas un levier

La remarque 5 de mistral ("pour tout N pair, si $N = p + q$ avec p, q premiers, alors il existe un semi-premier $n = pq$ tel que $g_D(n) = N$ ") et la perspective analogue de gemini ("injecter cette propriété de séparation dans l'analyse des paires de Goldbach") méritent d'être examinées de près, car c'est la partie la plus séduisante des deux notes, mais aussi, malheureusement, la plus fragile. L'énoncé de mistral est, tel qu'écrit, une *tautologie* : si l'on suppose déjà connue une décomposition $N = p + q$ avec p, q premiers, alors bien sûr $n = pq$ est un semi-premier et $g_D(pq) = p + q = N$ par la Proposition 3 (déjà établie). Cela ne donne *aucune méthode nouvelle* pour trouver p et q à partir de N seul, ni pour *prouver leur existence* : c'est exactement la difficulté de Goldbach, entièrement intacte. Pour transformer cette remarque en une véritable piste, il faudrait un argument qui parte de N (sans supposer connue une décomposition) et construise, ou prouve l'existence, d'un $n \leq N^2/4$ (disons) tel que $g_D(n) = N$ et n soit un semi-premier et ses deux facteurs somment à N et soient chacun premiers : c'est un problème au moins aussi difficile que Goldbach lui-même (il faudrait, entre autres, savoir reconnaître, parmi tous les $n \leq N^2/4$ avec $g_D(n) = N$, lesquels sont des semi-premiers de facteurs premiers, ce qui revient à re-factoriser potentiellement $O(N^2)$ entiers). Il n'y a donc pas, dans cette "dualité", de nouveau point d'appui : c'est une reformulation exacte, mais circulaire, de l'énoncé de Goldbach lui-même.

9.6. Bilan sur les deux notes

Les calculs de $\sigma(n)$ via cosinus sont corrects et bien illustrés par les deux notes, et le Théorème ?? ci-dessus en est le prolongement naturel et complet à la version alternée f_D , que ni mistral ni gemini n’avaient réussi à démontrer (ils se contentent de la citer). En revanche, l’idée centrale des deux notes - que cette reformulation “lève” ou “contourne” l’obstruction de parité de Selberg et ouvre une voie vers Goldbach - ne me semble pas soutenable, pour les raisons précises exposées ci-dessus : l’obstruction de Selberg est un énoncé sur les cribles combinatoires de niveau borné appliqués à des *intervalles* d’entiers, tandis que g_D et f_D sont des reformulations coûteuses (moins efficaces que la division essai) de la factorisation d’un entier *individuel*. Les deux objets ne se rencontrent tout simplement pas.

10. Bilan honnête

Ce que ce document établit, avec des preuves complètes :

- une formule fermée exacte pour $f_D(n)$, pour tout $n \geq 3$ (Théorème ??);
- la preuve complète, pour n impair, que $f_D(n) = \frac{1}{2} \iff n$ premier, avec un écart $2(\sigma(n) - n - 1)$ parfaitement explicite pour tout composé, en particulier $2(p + q)$ pour les produits purs pq (ce qui répond précisément à votre question initiale);
- la preuve des formules affines pour les puissances de nombres premiers, conjecturées sans preuve dans la note du 4.11.2018;
- une formule nouvelle, non présente dans vos notes antérieures, pour tout n pair.

Ce que ce document ne prétend pas, et met en garde contre :

- f_D (comme g_D) est *équivalente en contenu arithmétique* à $\sigma(n)$: elle n’apporte aucune information sur n que $\sigma(n)$ ne donnait déjà, et coûte bien plus cher à calculer;
- il n’y a, dans ce travail ni dans les notes de mistral et gemini, *aucun* lien de fond avec l’obstruction de parité de Selberg (qui concerne les cribles asymptotiques, pas le calcul individuel de $\sigma(n)$), ni de piste opérationnelle nouvelle vers la conjecture de Goldbach.

Références

[1] [alternecos.pdf](#).

[3] [gardeprogcpp.pdf](#).

[5] [premiers-image-un-demi.pdf](#).

[7] [somme-alternee-de-cos-mistral-dvc.pdf](#).

[2] [alternesommecos.pdf](#).

[4] [interrupteurs-dvc.pdf](#).

[6] [trifle.pdf](#).

[8] [somme-alternee-de-cos-gemini-dvc.pdf](#).