

Jouer avec les valeurs propres de l'opérateur de Dirac

Michael Creutz

*Département de physique, Laboratoire nationale de Brookhaven
Upton, NY 11973, États-Unis*

Résumé : On parle souvent de la physique des basses énergies en théorie de réseau de jauge en fonction des petites valeurs propres de l'opérateur de Dirac du réseau. Je m'intéresse aux pièges qui découlent de cette pratique dans l'interprétation de ces spectres de valeurs propres.

1 Introduction

Dans la communauté des réseaux de jauge, il est devenu assez populaire récemment d'étudier la distribution des valeurs propres de l'opérateur de Dirac en présence de champs de jauge sous-jacents engendrés dans les simulations. Il y a plusieurs motivations à cela. D'abord, dans la théorie classique, Banks et Casher¹ ont relié la densité des petites valeurs propres de l'opérateur de Dirac à la brisure spontanée de la symétrie chirale. Ensuite, les discrétisations du réseau de l'opérateur de Dirac basées sur la relation de Ginsparg-Wilson² ont les valeurs propres correspondantes qui sont sur des cercles dans le plan complexe. La validité des diverses approximations d'un tel opérateur peut être attestée qualitativement en regardant les valeurs propres. Troisièmement, utiliser la méthode du chevauchement de régions pour construire un opérateur de Dirac avec la bonne symétrie chirale présente des difficultés si l'opérateur de Wilson des fermions a de petites valeurs propres. Cela peut influencer la sélection des paramètres de la simulation, tels que l'action de jauge⁴. Finalement, puisque les petites valeurs propres entravent les méthodes de gradient conjugué, séparer ces valeurs propres explicitement peut potentiellement être utile pour développer des algorithmes de simulation dynamique.⁵

Malgré cet intérêt pour les distributions des valeurs propres, il y a quelques dangers inhérents à l'interprétation de ces observations. Les résultats physiques proviennent de l'intégrale de chemin à la fois sur les champs bosoniques et fermioniques. Calculer ces intégrales une par une est bien, mais essayer d'interpréter les résultats intermédiaires est dangereux de façon inhérente. Alors que les valeurs propres de l'opérateur de Dirac dépendent du champ de jauge donné, il est important de se rappeler que dans une simulation dynamique, la distribution du champ de jauge elle-même dépend des valeurs propres. Ce comportement circulaire donne un système hautement non linéaire, et de tels systèmes sont de façon notoire difficiles à interpréter.

Étant données ces gaies circonstances, je présenterai certain de ces problèmes en fonction d'un ensemble amusant de puzzles provenant des interprétations naïves des valeurs

Référence : <https://arxiv.org/pdf/hep-lat/0511052><https://arxiv.org/pdf/hep-lat/0511052>.

Traduction : Denise Vella-Chemla, août 2025.

propres de l'opérateur de Dirac sur le réseau. La discussion sera un mélange de pensées provoquantes et d'idées qui ajoutent de la confusion. Elle ne sera pas nécessairement particulièrement profonde ou nouvelle.

2 Le modèle

Pour commencer, j'ai besoin d'établir le contexte de la discussion. Je considère une intégrale de chemin générique pour une théorie de jauge

$$Z = \int (dA)(d\psi)(d\bar{\psi}) e^{-S_G(A) + \bar{\psi}D(A)\psi}. \quad (1)$$

Ici A et ψ représentent des champs de jauge et de quarks, respectivement, $S_G(A)$ est la partie purement jauge de l'action et $D(A)$ représente l'opérateur en usage pour les quarks. Comme l'action est quadratique dans les champs de fermions, une intégration formelle donne

$$Z = \int (dA) |D(A)| e^{-S_G(A)}. \quad (2)$$

En travaillant sur un réseau fini, le réseau $D(A)$ est une matrice de dimension finie, et pour un champ de jauge donné, je peux considérer formellement ses valeurs et ses vecteurs propres

$$D(A)\psi_i = \lambda_i\psi_i. \quad (3)$$

Le déterminant apparaissant dans l'éq. (2) est le produit de ces valeurs propres ; donc, l'intégrale de chemin prend la forme

$$Z = \int (dA) e^{-S_G(A)} \prod_i \lambda_i. \quad (4)$$

Faire la moyenne sur les champs de jauge définit la densité des valeurs propres

$$\rho(x + iy) = \frac{1}{NZ} \int (dA) |D(A)| e^{-S_G(A)} \sum_i \delta(x - \text{Re}\lambda_i(A))\delta(y - \text{Im}\lambda_i(A)). \quad (5)$$

Ici, N est la dimension de l'opérateur de Dirac, qui inclut le volume, la jauge, le spin et les indices de saveur.

Dans les situations où le déterminant des fermions n'est pas positif, ρ peut être négatif ou complexe. Pourtant, je continue de faire référence à lui comme à une densité. Je supposerai que ρ est réel ; les situations dans lesquelles cela n'est pas vrai, comme avec un potentiel chimique fini,⁶ sont hors du champ du présent exposé.

Au potentiel chimique zéro, toutes les actions utilisées en pratique satisfont une hermiticité "γ₅"

$$\gamma_5 D \gamma_5 = D^\dagger. \quad (6)$$

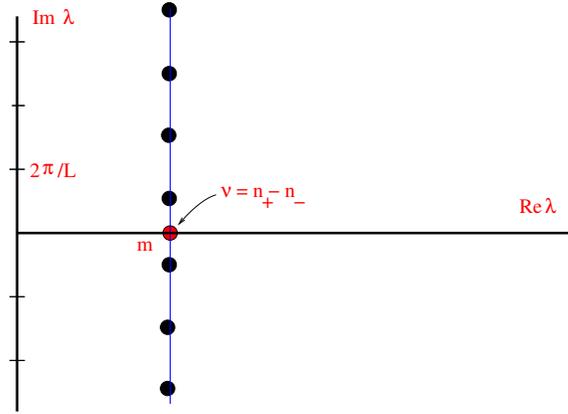


Figure 1: Dans le dessin continu naïf, toutes les valeurs propres de l'opérateur de Dirac sont le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire. Dans un volume fini, ces valeurs propres deviennent discrètes. Les valeurs propres réelles se séparent selon différentes chiralités et définissent un invariant topologique.

Avec cette condition, toutes les valeurs propres non réelles adviennent par paires de complexes conjugués, ce qui implique que pour la densité, on a

$$\rho(z) = \rho(z^*). \quad (7)$$

Cette propriété sera partagée par tous les opérateurs considérés dans la discussion ci-dessous.

L'objet de la recherche consiste à trouver des énoncés généraux liant le comportement de la densité des valeurs propres à des propriétés physiques de la théorie. Je répète la mise en garde que l'on a faite plus tôt ; ρ dépend de la distribution du champ de jauge A qui en retour est pondéré par ρ qui dépend de la distribution de A ...

2.1 Le continuum

Bien sûr, la théorie du continu est seulement définie réellement comme la limite de la théorie du réseau. Pourtant, il est parfois utile de rappeler l'image standard, où l'opérateur de Dirac

$$D = \gamma_\mu(\partial_\mu + igA_\mu) + m$$

est la somme d'une partie anti-hermitienne et de la masse du quark m . Toutes les valeurs propres ont la même partie réelle m

$$\rho(x + iy) = \delta(x - m)\tilde{\rho}(y).$$

Les valeurs propres appartenant à une droite parallèle à l'axe imaginaire, avec la condition d'hermiticité de l'éq. (6), cela implique qu'elles apparaissent comme paires de

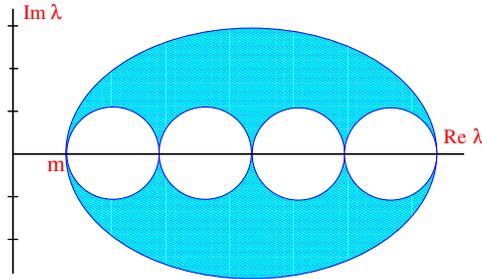


Figure 2: des fermions de Wilson libres montrent un spectre de valeurs propres avec une partie réelle dépendant du moment. Cela enlève les doublons en leur donnant une grande masse effective.

complexes conjugués.

En se restreignant au sous-espace des valeurs propres réelles, γ_5 commute avec D et par conséquent, ces vecteurs propres peuvent être séparés selon leur chiralité.

La différence entre le nombre de valeurs propres positives et négatives de γ_5 dans ce sous-espace définit un indice relié à la structure topologique du champ de jauge.⁷ La structure de base est schématisée dans la fig. 1.

L'argument de Banks et Casher lie un $\tilde{\rho}(0)$ ne s'évanouissant pas au condensat chiral qui apparaît quand la masse tend vers zéro. J'en dirai plus sur cela dans le contexte du réseau.

Notons que le dessin naïf suggère une symétrie entre les masses négatives et positives. À cause des anomalies, ceci est faux. Avec un nombre impair de saveurs, la théorie obtenue en échangeant les signes de toutes les masses des fermions est physiquement non équivalente à la théorie initiale.

2.2 Fermions de Wilson

Le réseau révèle que la situation véritable est considérablement plus embrouillée du fait de l'anomalie chirale. Avec les infinis ultraviolets, toutes les symétries naïves de l'action du réseau sont des symétries réelles. Les fermions naïfs ne peuvent pas avoir d'anomalies, qui sont supprimées par les états extraordinaires appelés doublons. Les fermions de Wilson⁸ évitent ce problème en donnant une grande partie réelle aux valeurs propres correspondant à de tels doublons. Pour les fermions de Wilson libres, la structure des valeurs propres montre une forme simple telle que celle fournie par la Fig. 2.

Lorsque le champ de jauge est lancé, cette forme disparaît. Une complication additionnelle est que l'opérateur D n'est alors plus normal, i.e. $[D, D^\dagger] \neq 0$ et les vecteurs

propres ne sont plus nécessairement orthogonaux.

Les valeurs propres complexes vont toujours par paires, bien que, comme le champ de jauge varie, les paires complexes de valeurs propres puissent être en collision et se séparer le long de l'axe réel. En général, les valeurs propres réelles formeront une distribution continue.

Comme dans le continu, un indice peut être défini à partir du spectre de l'opérateur de Wilson-Dirac. À nouveau, l'hermiticité γ_5 permet de trier les valeurs propres par chiralité. Pour supprimer la contribution des valeurs propres des doublons, sélectionnons un point à l'intérieur du cercle ouvert le plus à gauche de la Fig. 2. Définissons alors l'indice du champ de jauge comme étant la chiralité de réseau de toutes les valeurs propres sous ce point. Pour un champ de jauge lisse, cela est en accord avec le nombre topologique d'enroulements obtenu à partir de leur interpolation dans le continu. Cela correspond également au nombre d'enroulement sous l'opérateur de chevauchement.

2.3 Le chevauchement

Les fermions de Wilson ont un comportement assez compliqué selon des transformations chirales. Le formalisme du chevauchement (*overlap*)³ simplifie cela en projetant d'abord la matrice de Wilson D_W sur un opérateur unitaire

$$V = (D_W D_W^\dagger)^{-1/2} D_W. \quad (8)$$

On doit comprendre cela comme le fait d'aller dans une base qui diagonalise $D_W D_W^\dagger$, puis d'effectuer l'inversion, puis de revenir dans la base initiale. En fonction de cette quantité unitaire, la matrice de chevauchement est

$$D = 1 + V. \quad (9)$$

Le processus de projection est schématisé dans la Fig. 2.3. La masse utilisée dans l'opérateur de Wilson de départ est prise comme une valeur négative qu'on sélectionne de telle façon que les états de moment faible soient projetés sur les valeurs propres basses, alors que les états des doublons sont envoyés vers $\lambda \sim 2$.

L'opérateur de chevauchement a quelques belles propriétés. D'abord, il satisfait la relation de Ginsparg-Wilson,² qu'on écrit succinctement comme l'unitaire de V couplé avec son hermiticité γ_5

$$\gamma_5 V \gamma_5 V = 1. \quad (10)$$

Comme il est construit à partir d'un opérateur unitaire, la normalité de D est garantie. Mais, plus important encore, il exhibe une version réseau d'une symétrie chirale exacte.⁹

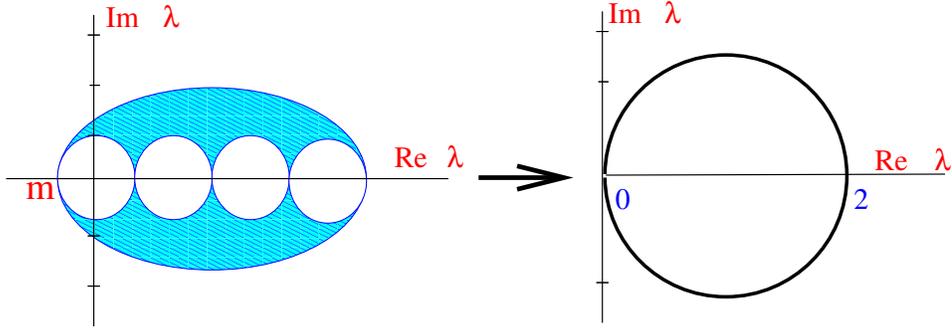


Fig. 3 : L'opérateur de chevauchement est constitué en projetant l'opérateur de Wilson-Dirac sur un opérateur unitaire.

L'action fermionique $\bar{\psi}D\psi$ est invariante selon la transformation

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\theta\gamma_5}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}e^{i\theta\gamma_5}\end{aligned}\quad (11)$$

où

$$\hat{\gamma}_5 = V\gamma_5. \quad (12)$$

Comme avec γ_5 , cette quantité est hermitienne et son carré est 1. Par conséquent, ses valeurs propres sont ± 1 . La trace définit un indice

$$\nu = \frac{1}{2}\text{Tr}\hat{\gamma}_5 \quad (13)$$

qui joue exactement le rôle de l'indice dans le continuum.

Il est important de noter que l'opérateur de chevauchement n'est pas unique. Sa forme précise dépend de l'opérateur particulier initial choisi pour se projeter sur la forme unitaire. En utilisant l'opérateur de Wilson-Dirac dans ce but, le résultat dépend encore de la masse utilisée en entrée. Du fait de ses origines historiques dans le formalisme du mur du domaine, cette quantité est parfois appelée la "hauteur du mur du domaine".

Comme le chevauchement n'est pas unique, il peut rester une ambiguïté pour déterminer le nombre d'enroulements d'une configuration de jauge donnée. Des problèmes surgissent quand $D_W D_W^\dagger$ n'est pas inversible, et pour un champ de jauge donné, cela peut arriver pour des valeurs spécifiques du point de projection. Ce problème peut être évité pour les champs de jauge "lisses". En effet, une "condition d'admissibilité",^{10,11} requérant que toutes les valeurs des plaquettes restent suffisamment proches de l'identité, supprime l'ambiguïté. Malheureusement, cette condition est incompatible avec la positivité de la réflexion.¹² À cause de ces problèmes, on ne sait pas si la sensibilité topologique est en

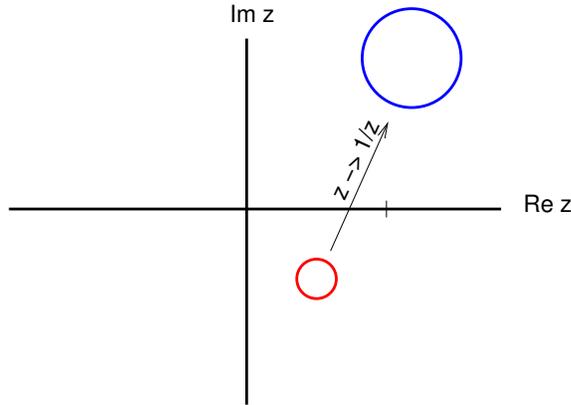


Figure 3: L'inversion d'un cercle complexe engendre un autre cercle.

fait une observable physique bien définie. D'un autre côté, comme la façon de mesurer cette sensibilité est maintenant claire dans une expérience de diffusion, il semble y avoir peu de raison de s'intéresser au fait que ça soit une observable ou pas.

3 Un condensat chiral de Cheshire

Maintenant que j'ai revu le paradigme de base, il est temps de s'amuser un peu. Je calculerai le condensat chiral dans le formalisme de chevauchement. Je dois vous prévenir du fait que pour vous amuser, je commence d'une façon intentionnellement très décevante.

3.1 Il est ici

Je commence avec la théorie du chevauchement standard sans masse. Je souhaite calculer la quantité $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. De façon remarquable, on peut faire ce calcul de manière exacte. Je commence avec

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \text{Tr} D^{-1} \rangle = \left\langle \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \right\rangle = \left\langle \sum \text{Re} \frac{1}{\lambda_i} \right\rangle \quad (14)$$

où j'ai utilisé l'appariement complexe des valeurs propres pour éliminer les parties imaginaires. À la fin, la moyenne doit être calculée sur les configurations de jauge adéquatement pondérées.

Maintenant, la caractéristique cruciale de l'opérateur de chevauchement est que ses valeurs propres sont toutes sur un cercle du plan complexe. Une propriété intéressante d'un cercle complexe et que les inverses de tous ses points engendrent un autre cercle, comme

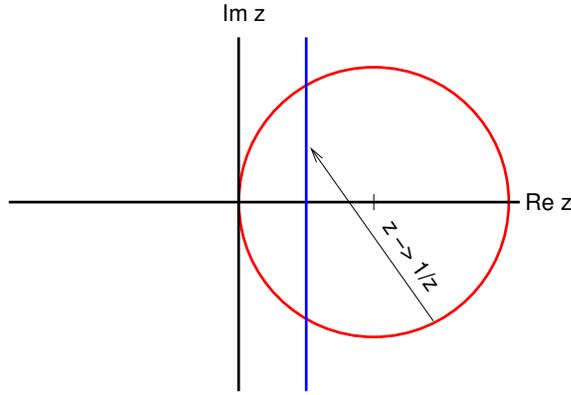


Figure 4: L'inversion de l'opérateur de chevauchement engendre une droite de partie réelle 1/2.

montré sur la Fig. 3.

Ce processus est, pourtant, assez singulier pour l'opérateur de chevauchement lui-même puisque le cercle correspondant contient l'origine. Dans ce cas, l'inverse du cercle est de rayon infini, i.e. il dégénère en une droite. Pour le cercle de l'opérateur de chevauchement, avec son centre en $z = 1$ et son rayon 1, l'inverse du cercle est une droite de partie réelle 1/2 et parallèle à l'axe imaginaire. C'est ce qui est montré sur la Fig. 4.

Ce placement des valeurs propres permet un calcul immédiat du condensat

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \sum \text{Re} \frac{1}{\lambda_i} = \sum \frac{1}{2} = \frac{N}{2}. \quad (15)$$

Ici, N est la dimension de la matrice, et inclut le facteur de volume attendu.

Ainsi le condensat, supposé être un signal pour la brisure de symétrie chirale spontanée, ne s'évanouit pas ! Mais quelque chose est équivoque, je n'ai utilisé aucune dynamique. Le résultat est aussi indépendant de la configuration de jauge.

3.2 Il s'en est allé

Donc sophistiquons un peu. Sur le réseau, la symétrie chirale est plus compliquée que dans le continuum, faisant intervenir à la fois γ_5 et $\hat{\gamma}_5$ d'une façon assez imbriquée. En particulier, l'opérateur $\bar{\psi}\psi$ ne se transforme pas de façon simple selon aucune rotation chirale. Une combinaison potentiellement plus jolie est $\bar{\psi}(1 - D/2)\psi$. Si je considère la rotation de l'Eq. (11) avec $\theta = \pi/2$, cette quantité devient son opposée. Mais il est aussi facile de calculer ce qui est attendu de cela aussi bien. Le second terme fait intervenir

$$\langle \bar{\psi}D\psi \rangle = \text{Tr}D^{-1}D = \text{Tr}I = N. \quad (16)$$

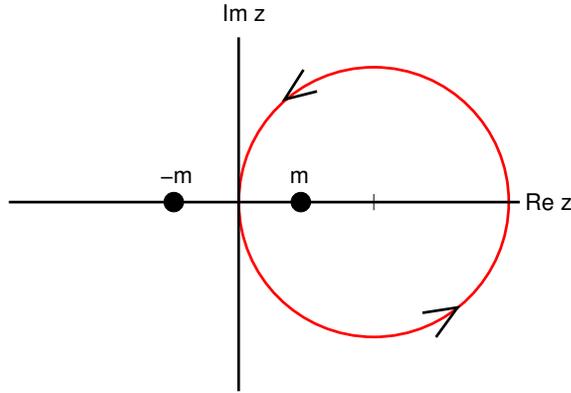


Figure 5: Comme la masse change de signe, un pôle va de l'intérieur à l'extérieur du cercle de chevauchement. Cela engendre un saut dans le condensat.

En mettant les deux morceaux ensemble

$$\langle \bar{\psi}(1 - D/2)\psi \rangle = N/2 - N/2 = 0. \quad (17)$$

Donc, j'ai perdu le condensat chirale dont j'avais si facilement montré qu'il ne s'évanouissait pas il y a un instant. Comment s'est-il évaporé ?

3.3 Il est de retour

Le problème provient d'un traitement des limites sans faire suffisamment attention. Dans un volume fini, $\langle \bar{\psi}(1 - D/2)\psi \rangle$ doit s'évanouir juste à partir de la symétrie chirale exacte du réseau. Cet évanouissement a lieu pour toutes les configurations de jauge. Pour procéder, introduisons une petite masse et faisons tendre le volume à l'infini d'abord, et puis alors, faisons tendre la masse vers zéro. Dans ce but, considérons la quantité

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \sum_i \frac{1}{\lambda_i + m}. \quad (18)$$

Le signal de la brisure de symétrie chirale est un saut vers cette quantité quand la masse passe à travers zéro.

Lorsque le volume tend vers l'infini, remplaçons la somme ci-dessus par une intégrale de contour autour du cercle de chevauchement en utilisant $z = 1 + e^{i\theta}$. Au facteur de volume trivial près, je devrais évaluer

$$i \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho(\theta)}{1 + e^{i\theta} + m}. \quad (19)$$

Lorsque la masse passe à travers zéro, le pôle en $z = -m$ passe de l'extérieur à l'intérieur du cercle, comme montré dans la Fig. 5. Alors qu'il passe à travers le cercle, le résidu du pôle est $\rho(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \rho(\theta)$.

Donc en général, les sauts s'effectuent par valeurs de $2\pi\rho(0)$. Ceci est la version de chevauchement de la relation de Banks-Casher¹ ; un saut non trivial dans le condensat est corrélé à un $\rho(0)$ qui ne s'évanouit pas.

Notons que les modes zéros exacts reliés à la topologie sont supprimés par la masse et ne contribuent pas à ce saut. Pour une saveur, pourtant, les modes zéros donnent effectivement naissance à une contribution ne s'évanouissant pas mais lisse dans le condensat¹³. On en dira plus sur ce point ultérieurement.

4 Un autre puzzle

Pour deux saveurs des quarks de lumière, on s'attend à une brisure de symétrie spontanée. C'est l'explication de la masse lumineuse du pion, qui est une approximation du boson de Goldstone. Dans le schéma ci-dessus, la théorie des deux saveurs devrait avoir un $\rho(0)$ qui ne s'évanouit pas.

Maintenant considérons la théorie à une seule saveur. Dans ce cas, il devrait ne pas y avoir de symétrie chirale. La célèbre anomalie $U(1)$ brise la symétrie naïve. On s'attend à ce qu'aucune des particules physiques soit sans masse quand la masse du quark s'évanouit. De plus, des arguments de lagrangien chirale simple^{14,15} pour les théories à saveurs multiples indiquent qu'on s'attend à ce qu'il n'y ait aucune singularité quand seulement l'un des quarks passe à travers la masse nulle. De la discussion ci-dessus, on est amené à la conclusion que pour la théorie à une seule saveur, $\rho(0)$ doit s'évanouir.

Mais considérons maintenant l'intégrale de chemin originale après que les fermions aient été intégrés à l'extérieur^a. En changeant le nombre de saveurs, N_f se manifeste dans la puissance du déterminant

$$\int dA |D|^{N_f} e^{-S_g(A)}. \quad (20)$$

Naïvement, cela suggère que lorsqu'on augmente le nombre de saveurs, la densité des valeurs propres basses devrait décroître. Mais je viens juste de dire qu'avec deux saveurs, $\rho(0) \neq 0$ alors qu'avec une seule saveur, $\rho(0) = 0$. Comment peut-il se faire que le fait d'augmenter le nombre de saveurs augmente effectivement la densité des petites valeurs propres ?

^aNote de la traductrice : to integrate out : sortir de l'intégration ??

Ceci est un exemple clair de la façon dont la nature non-linéaire du problème peut produire des résultats contre-intuitifs. La densité des valeurs propres dépend de la distribution du champ de jauge, mais la distribution du champ de jauge dépend de la densité des valeurs propres. Ce ne sont pas seulement les valeurs propres basses qui sont importantes dans ce problème. Le champ fermionique tend vers un champ de jauge lisse, et ce processus fait intervenir toutes les échelles de valeurs. Un champ de jauge plus lisse peut donner en retour davantage de valeurs propres basses. Ainsi, les valeurs propres élevées influencent les valeurs propres basses, et cet effet peut outrepasser de manière évidente la suppression naïve de davantage de puissances du déterminant.

5 Instantons éthérés

À travers le théorème de l'indice, la structure topologique du champ de jauge se manifeste dans les modes zéros de l'opérateur de Dirac sans masse. Insérons à nouveau une petite masse et considérons l'intégrale de chemin avec les fermions intégrés à l'extérieur

$$Z = \int dA e^{-S_g} \prod_i (\lambda_i + m). \quad (21)$$

Si je fais tendre la masse vers zéro, toute configuration qui contient un mode propre nul aura un poids nul dans l'intégrale de chemin. Cela suggère que pour la théorie sans masse, je peux ignorer tous les effets instantons puisque ces configurations ne contribuent pas à l'intégrale de chemin.

Qu'est-ce qui est faux dans cet argument ? Le problème n'est pas de se demander si les modes zéros contribuent ou pas à l'intégrale de chemin, mais s'ils peuvent contribuer à des fonctions de corrélation physiques. Pour voir comment ça se passe, ajoutons quelques sources à l'intégrale de chemin

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int dA d\psi d\bar{\psi} e^{-S_g + \bar{\psi}(D+m)\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi}. \quad (22)$$

La différentiation (au sens de Grassmann) par rapport à η et $\bar{\eta}$ donne les fonctions de corrélation fermioniques. Maintenant intégrons les fermions dehors selon

$$Z = \int dA e^{-S_g - \bar{\eta}(D+m)^{-1}\eta} \prod_i (\lambda_i + m). \quad (23)$$

Si je considère une source qui chevauche l'un des vecteurs propres de mode zéro, i.e.

$$(\psi_0, \eta) \neq 0, \quad (24)$$

la contribution de la source introduit un facteur $1/m$. Cela annule le m du déterminant, laissant une contribution finie lorsque m tend vers zéro.

Avec des saveurs multiples, le déterminant aura un facteur de masse à partir de chacune d'elles. Quand on fait tendre plusieurs masses vers zéro ensemble, on aura besoin d'un facteur similaire à partir des sources pour chacune d'elles. Ce produit de termes sources est la fameux "sommet de 't Hooft"¹⁶. Alors qu'il est correct de sortir les instantons de Z , ils perdurent dans les fonctions de corrélation.

Alors que ces problèmes sont bien compris théoriquement, ils peuvent amener de nouvelles difficultés lorsqu'on en effectue des simulations numériques. La procédure numérique habituelle engendre des configurations de jauge pondérées comme dans la fonction de partition. Pour une masse de quark petite, les configurations topologiques non triviales seront supprimées. Mais dans ces configurations, de grandes corrélations peuvent apparaître dues aux effets instantons. Cette combinaison de petits poids et de grandes corrélations peut donner naissance à de grandes erreurs statistiques, compliquant ainsi les extrapolations à partir des petites masses. Le problème deviendra particulièrement sévère pour des quantités dominées par des effets anomaux, comme la masse η' . Une stratégie possible pour éviter cet effet est de générer des configurations avec un poids modifié, peut-être selon les droites d'algorithmes multicanoniques.¹⁷

Notons que lorsque seulement une masse de quark tend vers zéro, le sommet de 't Hooft est une forme quadratique des sources de fermions. Cela donnera une contribution finie mais lisse au condensat $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. En effet, cela représente un décalage additif non perturbatif à la masse du quark. La valeur du décalage dépend généralement de détails concernant l'échelle et le régulateur. Même avec la condition de Ginsparg-Wilson, l'opérateur de Dirac du réseau n'est pas unique, et il n'y a pas de preuve que deux formes différentes doivent donner la même limite continue pour des masses de quarks s'évanouissant. À cause de cela, le concept de quark unique sans masse n'est pas un concept physique,¹⁸ ceci invalidant une solution populaire proposée comme solution du problème difficile CP. Cette ambiguïté a été notée pour des quarks lourds dans un contexte plus perturbatif¹⁹ et on y fait souvent référence par le terme "problème du renormalon". Ce problème est intimement lié aux problèmes mentionnés précédemment de définition de la sensibilité topologique.

6 Résumé

En résumé, penser aux valeurs propres de l'opérateur de Dirac dans un champ de jauge peut donner quelques éclairages, par exemple l'image élégante de Banks-Casher de brisure de la symétrie chirale. Pourtant, il faut être précautionneux car le problème est hautement non linéaire. Cela se manifeste dans l'exemple contre-intuitif selon lequel l'ajout de saveur augmente plutôt que supprime les valeurs propres de valeurs faibles.

Les problèmes impliquant la suppression du mode nul représentent une facette d'un ensemble de problèmes non résolus liés entre eux. Y a-t-il des ambiguïtés non perturbatives

dans les quantités telles que la sensibilité topologique ? Est-ce que les champs de jauge rugueux sont importants, i.e. les champs de jauge sur lesquels le nombre d'enroulements est ambigu ? Comment ces problèmes sont-ils reliés à la masse du quark ? J'espère que les idées présentées ici stimuleront la réflexion le long de ces chemins.

Remerciements

Ce manuscrit a été écrit sous le contrat n DE-AC02-98CH10886 du département américain de l'Énergie des États-Unis.

Références

1. T. Banks and A. Casher, Nucl. Phys. B **169** (1980) 103.
2. P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev. D **25** (1982) 2649.
3. H. Neuberger, Phys. Lett. B **417** (1998) 141 [arXiv:hep-lat/9707022].
4. Y. Aoki *et al.*, Phys. Rev. D **69** (2004) 074504 [arXiv:hep-lat/0211023].
5. A. Duncan, E. Eichten and H. Thacker, Phys. Rev. D **59** (1999) 014505 [arXiv:hep-lat/9806020].
6. J. C. Osborn, K. Splittorff and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 202001 [arXiv:hep-th/0501210].
7. S. R. Coleman, in *C77-07-23.7 HUTP-78/A004 Lecture delivered at 1977 Int. School of Subnuclear Physics, Erice, Italy, Jul 23-Aug 10, 1977*.
8. K. G. Wilson, in *New Phenomena In Subnuclear Physics. Part A. Proceedings of the First Half of the 1975 International School of Subnuclear Physics*, Erice, Sicily, July 11 - August 1, 1975, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1977, p. 69.
9. M. Luscher, Phys. Lett. B **428** (1998) 342 [arXiv:hep-lat/9802011].
10. M. Luscher, Commun. Math. Phys. **85** (1982) 39.
11. P. Hernandez, K. Jansen and M. Luscher, Nucl. Phys. B **552** (1999) 363 [arXiv:hep-lat/9808010].
12. M. Creutz, Phys. Rev. D **70** (2004) 091501 [arXiv:hep-lat/0409017].
13. P. H. Damgaard, Nucl. Phys. B **556** (1999) 327 [arXiv:hep-th/9903096].
14. P. Di Vecchia and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **171** (1980) 253.
15. M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **92**, 201601 (2004) [arXiv:hep-lat/0312018].
16. G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8.
17. B. A. Berg and T. Neuhaus, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 9 [arXiv:hep-lat/9202004].
18. M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 162003.
19. I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev and A. I. Vainshtein, Phys. Rev. D **50** (1994) 2234 [arXiv:hep-ph/9402360].