Traduction d'un extrait de $\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}$ *and the Gromov norm*,
un article de Alain Connes et Caterina Consani, sections 2.1, 2.2 et 4.1
Denise Vella-Chemla, août 2025

2. Homologie d'un ensemble simplicial à coefficients dans un $\mathfrak{s}$-module

Notre but dans cette section est d'obtenir une bonne définition de l'homologie d'un ensemble simplicial pointé à coefficients dans un $\mathfrak{s}$-module et de montrer qu'une telle définition généralise la notion standard en topologie algébrique. On réalise cela grâce à la définition 2.10 et au théorème 2.12. Comme étape préliminaire, on doit préciser la définition des groupes d'homotopie π_n en restant au niveau combinatoire et en ignorant la structure de groupe. Classiquement (voir [**?**] Appendice A.2.3), l'espace de fonctions des applications entre deux ensembles simpliciaux pointés X et Y est défini comme l'ensemble simplicial pointé :

$$\mathrm{Map}_*(X,Y) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{S}_*}(X, \sin|Y|) \tag{1}$$

Cela revient à remplacer Y par l'ensemble simplicial *fibrant* $\sin|Y|$ et cela entraîne que les π_n, définis en utilisant de tels remplacements par un fibrant (voir aussi A.2.5.1), sont alors des groupes pour $n \geq 1$ (commutatifs pour $n > 1$). Ainsi, dans la définition des groupes d'homotopie d'un Γ-espace $M : \Gamma^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}_*$ (voir la définition 2.2.1.2)

$$\pi_q M := \varinjlim_k \pi_{k+q} M(S^k) \tag{2}$$

les termes intervenant dans la colimite sont des groupes, par conséquent, $\pi_q M$ est un groupe commutatif.

Pour nos applications pourtant, la simplification effectuée par la définition (1) cache des caractéristiques plus fines des Γ-espaces qui deviennent importantes pour les constructions arithmétiques. On travaillera donc directement dans la catégorie $\Gamma\mathcal{S}_*$ sans effectuer ce remplacement par le fibrant.

2.1. Homotopie pour des ensembles simpliciaux pointés

Pour définir la nouvelle homotopie $\pi_n^{\mathrm{new}}(X,\star)$ pour un ensemble simplicial pointé général $(X,\star)$, on se restreindra d'abord au cas de π_0^{new}, en suivant [6] Définition 1.9. On définit un endofoncteur Ω de $\mathcal{S}_*$ qui associe à un ensemble simplicial pointé $(X,*)$ l'ensemble simplicial pointé $\Omega(X,*)$ défini comme suit (avec k un entier positif)

$$\Omega(X,*)_k := \{x \in X_{k+1} \mid \partial_0(x) = *,\ \partial_{i_0} \dots \partial_{i_k} x = *,\ \ \forall i_j \in \{0,\dots,k+1\}\} \tag{3}$$

avec la structure simpliciale donnée par les faces

$$\partial_j : \Omega(X,*)_k \to \Omega(X,*)_{k-1}, \quad \partial_j(x) = \partial^X_{j+1}(x) \tag{4}$$

et les dégénérescences

$$s_j : \Omega(X,*)_k \to \Omega(X,*)_{k+1}, \quad s_j(x) = s^X_{j+1}(x). \tag{5}$$

Référence : https://arxiv.org/pdf/1905.03310.

La définition de l'homotopie $\pi_n^{\text{new}}(X,\star)$ se réduit alors à celle de π_0^{new} pour l'ensemble simplicial $\Omega^n(X)$ obtenu en itérant n fois l'endofoncteur Ω :

$$\pi_n^{\text{new}}(X,\star) := \pi_0^{\text{new}}(\Omega^n(X)). \tag{6}$$

On montre par induction[1] sur n que

$$\Omega^n(X,*)_k = \{x \in X_{n+k} \mid \partial_j(x) = *,\ \forall j < n,\ \partial_{i_0} \dots \partial_{i_k} x = *\,,\ \ \forall i_j \in \{0,\dots,k+n\}\} \tag{7}$$

alors que les faces et les dégénérescences s'obtiennent comme dans (4) et (5) mais en utilisant ∂^X_{j+n} et s^X_{j+n}.

On décrit directement les premiers niveaux de $\Omega^n(X)$ comme suit

Lemme 2.1. : *Soit $(X,*)$ un ensemble simplicial pointé.*

(*i*) *Le 0-squelette $(\Omega^n(X))_0$ est l'ensemble des simplexes $x \in X_n$ avec tous les $\partial_j(x)$ égaux au point de base.*

(*ii*) *$(\Omega^n(X))_0$ coïncide avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S^n, X) \subset X_n$ où S^n s'obtient en faisant s'effondrer la frontière $\partial\Delta[n]$ du simplexe standard vers un unique point de base* [2].

(*iii*) *Le 1-squelette $(\Omega^n(X))_1$ est l'ensemble des $x \in X_{n+1}$ qui satisfont les conditions*

$$\partial_i\partial_j(x) = *\,,\ \ \forall i,j,\ \ \partial_j(x) = *\,,\ \ \forall j \in \{0,\dots,n-1\}.$$

(*iv*) *Les frontières $\partial_i : (\Omega^n(X))_1 \to (\Omega^n(X))_0$ pour $i = 0,1$ sont données par ∂_n et ∂_{n+1}.*

(*v*) *La relation R sur $(\Omega^n(X))_0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S^n,X) \subset X_n$ donnée par*

$$xRy \iff \exists z \in (\Omega^n(X))_1 \text{ tel que } \partial_0 z = x \text{ et } \partial_1 z = y$$

coïncide avec la relation d'homotopie entre les n-simplexes comme dans (3).

Preuve :

(*i*) découle de (7) pour $k = 0$.

(*ii*) Par le lemme de Yoneda, on vérifie que les morphismes $y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S^n,X)$ i.e. les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(\Delta[n],X)$ qui envoient $\partial\Delta[n]$ vers le point de base sont les mêmes que les éléments du 0-squelette $(\Omega^n(X))_0$.

(*iii*) découle de (7) pour $k = 1$.

(*iv*) découle de $\partial_j = \partial^X_{j+n}$ pour $j = 0,1$.

[1]Notons qu'un produit $\partial_{i_0} \dots \partial_{i_k}$ peut être réordonné en utilisant les règles simpliciales de telle façon que les indices respectent la contrainte $i_0 \geq i_1 \geq \dots \geq i_k$.

[2]Ceci n'est pas la définition utilisée dans [2], où S^n est défini comme le smash-produit n-replié $S^1 \wedge \dots \wedge S^1$ de $S^1 = \Delta[1]/\partial\Delta[1]$. Cette distinction dans la définition des groupes d'homotopie n'est pas pertinente dans le cas du fibrant puisque les réalisations géométriques sont homéomorphes, mais comme dans [6], notre choix est plus pratique pour calculer l'ensemble des applications en utilisant le lemme de Yoneda.

(*v*) Cela découle de la partie précédente du lemme puisque la relation (3) [3] se restreint à

$$R = \{(x,y) \in X_n \times X_n \mid \partial_j x = \partial_j y = * \forall j \,\&\, \exists z \mid \partial_j z = * \forall j < n,\ \partial_n z = x,\ \partial_{n+1} z = y\} \quad (8)$$

□

Remarque 2.2 : le sens géométrique de l'endofoncteur Ω peut être compris comme cela nous a été expliqué par B. Dundas : d'abord, comme dans [2] A.2.7, on a un modèle combinatoire PX qui simule l'espace des chemins d'un ensemble simplicial X en précomposant le foncteur X avec l'endofoncteur $[0] \coprod \bullet : \Delta \longrightarrow \Delta$. Cela décale simplement les indices, i.e. on a $(PX)_k = X_{k+1}$ et les indices des faces et des dégénérescences sont décalés de 1. Le lien avec les chemins ordinaires est donné en précomposant avec le morphisme des ensembles simpliciaux $\gamma : \Delta[1] \times \Delta[q] \to \Delta[q+1]$, associé comme $\gamma := N(p)$ par le foncteur nerf N à

$$p : [1] \times [q] \to [q+1], \quad p(0,j) := 0 \ \forall j, \quad p(1,j) := j+1 \ \forall j$$

Requérir que les deux extrémités du chemin associé à $x \in X_{k+1} = \mathrm{Hom}_\Delta(\Delta[q+1], x)$ soient égales au point de base $*$ (quand X est pointé) donne exactement les conditions de (3) définissant $\Omega(X)$.

Quand X est fibrant, on obtient de cette manière un modèle pour son espace de boucle.

Pour un ensemble simplicial pointé *fibrant* X, la relation (8) est une relation d'*équivalence* et le quotient par cette relation définit $\pi_0(\Omega^n(X))$ dont on sait que c'est un groupe, pour $n \geq 1$ (voir [5, 6], ou le théorème 7.2 du Chapitre III de [).
3]
Notons également que quand X est fibrant, la relation d'équivalence ci-dessus sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S^n, X) \subset X_n$ coïncide avec celle définie par les deux applications frontières du 1-squelette de l'ensemble simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{S}_*}(S^n, X)$ (voir [6] Lemme 1B.3).

D'un autre côté, les ensembles simpliciaux X que nous considérons ici ne sont *pas nécessairement fibrants* et la relation R n'est en général pas transitive (ni symétrique). La solution facile pour outrepasser ce problème est de définir $\pi_n^{\mathrm{comb}}(X)$ comme le quotient par la relation d'équivalence engendrée par la relation R en accord avec la définition 1.1. Cela fournit une première notion d'homotopie qui suffit pour le but du présent article. On a par construction

$$\pi_n^{\mathrm{comb}}(X, \star) := \pi_0^{\mathrm{comb}}(\Omega^n(X)). \quad (9)$$

Énonçons des propriétés simples de cette notion combinatoire.

Proposition 2.3. :

(*i*) Soit X un ensemble simplicial pointé et $k > 0$ un nombre entier. Alors pour tout n

$$\pi_n^{\mathrm{comb}}(X \wedge k_+) = \pi_n^{\mathrm{comb}}(X) \wedge k_+.$$

[3] $R = \{(x,y) \in X_n \times X_n \mid \partial_j x = \partial_j y \forall j \& \mid \partial_j z = s_{n-1}\partial_j x \forall j < n, \partial_n z = x, \partial_{n+1} z = y\}$ (3).

(*ii*) Soient X, Y des ensembles simpliciaux pointés, on a pour tout n

$$\pi_n^{\mathrm{comb}}(X \times Y) = \pi_n^{\mathrm{comb}}(X) \times \pi_n^{\mathrm{comb}}(Y).$$

Preuve :

(*i*) Un élément $x \in (X \wedge k_+)_n$, $x \neq *$ est de la forme $x = (a, j)$ avec $a \in X_n$ et $0 < j \leq k$. Deux éléments $x = (a, j)$ et $x' = (a', j')$ vérifient $(x, x') \in R$ comme dans (8) si et seulement si $j = j'$ et $(a, a') \in R_X$ puisque les frontières préservent l'indice j.

(*ii*) Cela en découle, puisque $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$ et puisque les frontières agissent composante par composante. □

2.2. La notion plus précise $\pi_n^{(2)}(X)$ et le topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$

Pour des applications ultérieures aux diviseurs d'Arakelov, la définition 1.1 est trop grossière et on souhaiterait

- garder toute l'information à propos de la relation R et
- continuer à penser à π_0^{new} comme à un ensemble.

L'idée de "topos" de Grothendieck [1] vient à point nommé en fournissant la réponse adéquate. On considère le topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ des foncteurs contravariants vers la catégorie des ensembles à partir de la petite catégorie obtenue en restreignant les objets de Δ à $[0]$ et $[1]$ et en conservant les mêmes morphismes que dans la définition suivante :

Définition 2.4. :

(*i*) Soit $X :\longrightarrow \mathfrak{Sets}$ un ensemble simplicial. On définit $\pi_0^{(2)}(X)$ comme l'objet de $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ qui est la restriction du foncteur X à la sous-catégorie complète de Δ avec les objets $[0], [1]$ et les mêmes morphismes que Δ.

(*ii*) Soit X un ensemble simplicial pointé, alors on définit

$$\pi_n^{(2)}(X) := \pi_0^{(2)}(\Omega^n(X)).$$

Il s'avère que le topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ peut aussi être décrit comme le dual de la petite catégorie avec un seul objet dont les morphismes forment le monoïde $\mathcal{M}$ à trois éléments $1, m_0, m_1$ et la table de multiplication spécifiée par la règle $m_j x = m_j$ pour tout $j \in \{0, 1\}$.

Proposition 2.5. : Le topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ est le même que le dual du monoïde $\mathcal{M}$.

Preuve : par définition, un objet F du topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ est une paire d'ensembles $F(0), F(1)$, avec deux applications $\partial_j : F(1) \to F(0)$, $j \in \{0, 1\}$ et une application $s : F(0) \to F(1)$ telle que $\partial_j \circ s = \mathrm{Id}$. Cela implique que $s : F(0) \to F(1)$ est une injection et on peut par conséquent voir $F(0)$ comme un sous-ensemble de $F(1)$ et considérer les deux auto-applications $T_j = s \circ \partial_j : F(1) \to F(1)$. Elles vérifient la règle

$$T_i \circ T_j = T_j\,, \quad \forall i, j \in \{0, 1\}$$

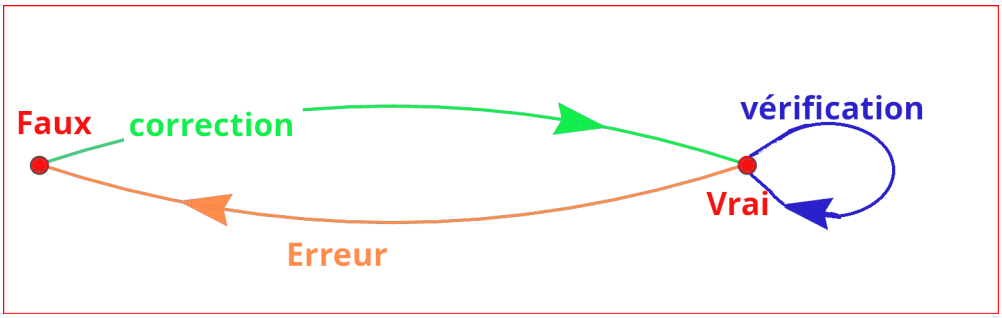

Figure 1: Classifieur de sous-objets pour $\mathfrak{Sets}^{(2)}$.

puisque $s \circ (\partial_i \circ s) \circ \partial_j = s \circ (\mathrm{Id}) \circ \partial_j = s \circ \partial_j$. Par conséquent, on obtient un objet dans le dual $\widehat{\mathcal{M}}$ du monoïde défini par l'opposé des règles ci-dessus. Inversement, étant donné un objet X de $\widehat{\mathcal{M}}$, i.e. un ensemble X muni d'une action à droite de $\mathcal{M}$, on définit un objet de $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ en posant $F(1) := X$, $F(0) := \mathrm{Domaine}(T_j)$ qui ne dépend pas du choix de $j \in \{0,1\}$. On pose $s : F(0) \to F(1)$ comme étant l'inclusion comme un sous-ensemble, et $\partial_j : F(1) \to F(0)$ est donné par T_j. On vérifie que $\partial_j \circ s = \mathrm{Id}$. On obtient de cette manière deux foncteurs $\mathfrak{Sets}^{(2)} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}$ et $\widehat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathfrak{Sets}^{(2)}$ qui sont l'inverse l'un de l'autre. □

Remarque 2.6. : Le topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ est lié de façon étroite au topos des carquois mais il n'est pas le topos des carquois.

Par définition, un carquois est un graphe orienté dans lequel des boucles et des arêtes multiples sont permises entre deux sommets, i.e. c'est un multidigraphe. Il est décrit de façon précise par deux ensembles (V, E) qui représentent les sommets et les arêtes du graphe et deux applications $d_j : E \to V$, $j \in \{0,1\}$, qui donnent la source et la cible d'une arête. Ces deux applications ne remplissent aucune condition particulière. On obtient un objet de $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ en posant $F(0) := V$ et $F(1) := V \coprod E$, l'union disjointe de V et E. On définit alors $s : F(0) \to F(1)$ comme étant l'inclusion alors que les deux applications $\partial_j : F(1) \to F(0)$, $j \in \{0,1\}$ sont données par $\partial_j = (\mathrm{Id}, d_j) : V \coprod E \to V$. On a $\partial_j \circ s = \mathrm{Id}$ par construction, et F est un objet de $\mathfrak{Sets}^{(2)}$. Inversement, étant donné un objet F de $\mathfrak{Sets}^{(2)}$, on obtient un carquois en posant

$$V = F(0), \quad E = F(1) \setminus s(F(0)), \quad d_j = \partial_j | E.$$

Pourtant, cette seconde construction n'est pas fonctionnelle. En fait, le topos des carquois a deux points donnés par le foncteur vers l'ensemble des sommets et le foncteur vers l'ensemble des arêtes. De façon similaire, ces deux foncteurs donnent les deux points du topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ mais dans ce dernier cas, le foncteur vers l'ensemble des arêtes ne peut jamais prendre la valeur $\varnothing$ quand le foncteur vers l'ensemble des sommets prend une valeur non vide. Cela montre que le topos des carquois n'est pas identique au topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$.

Lemme 2.7. : Le classifieur de sous-objets Ω du topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ est l'objet à deux sommets `Faux`, `Vrai` et cinq arêtes qui, en plus des deux états dégénérés forment le graphe de la figure 1.

Preuve : C'est un fait général (voir [4], § I.4) que pour un topos qui est le dual d'un monoïde $\mathcal{M}$ (vu comme une catégorie avec un objet unique), i.e. le topos des ensembles avec une action à droite de $\mathcal{M}$, le classifieur de sous-objets est donné par l'ensemble $\mathcal{J}$ des idéaux à droite de $\mathcal{M}$ sur lesquels l'action à droite de $\mathcal{M}$ est définie par

$$J.m := \{n \in \mathcal{M} \mid mn \in J\}\,,\ \ \forall J \in \mathcal{J},\ m \in \mathcal{M}.$$

En prenant le monoïde $\mathcal{M}$ ci-dessus à trois éléments $1, m_0, m_1$ et la table de multiplication spécifiée par la règle $m_j x = m_j$ pour tout $j \in \{0,1\}$, on trouve que $\mathcal{J}$ contient cinq éléments

$$\mathcal{J} = \{\varnothing, \{m_0\}, \{m_1\}, \{m_0, m_1\}, \mathcal{M}\}$$

et que l'action à droite T_j de $m_j \in \mathcal{M}$ fixe $\varnothing$ et $\mathcal{M}$ (qui sont par conséquent des arêtes dégénérées, i.e. des sommets) alors que $T_j\{m_j\} = \mathcal{M}$ et $T_i\{m_j\} = \varnothing$ pour $i \neq j$. Ainsi, l'ensemble V des sommets contient deux éléments $\varnothing$ et $\mathcal{M}$ et les arêtes non dégénérées sont les trois sommets montrés sur la Figure 1.

La raison du renommage des sommets $\varnothing$ en "`Faux`" et $\mathcal{M}$ en "`Vrai`' et du choix des étiquettes des arêtes vient de la construction de l'application de classification associée à un sous-objet G' d'un objet G dans $\mathfrak{Sets}^{(2)}$. On trouve que l'application classifiante f s'obtient comme suit comme une application de G dans Ω :

1. $\epsilon \in G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ `Vrai`
2. $\epsilon \notin G'$ et $\partial_j \epsilon \notin G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ `Faux`
3. $\epsilon \notin G',\ \partial_0 \epsilon \notin G'$ et $\partial_1 \epsilon \in G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ `Réparation`
4. $\epsilon \notin G',\ \partial_0 \epsilon \in G'$ et $\partial_1 \epsilon \notin G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ `Erreur`
5. $\epsilon \notin G',\ \partial_0 \epsilon \in G'$ et $\partial_1 \epsilon \in G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ `Vérification` .

La terminologie "`Faux`" et "`Vrai`" est le standard pour les deux extrêmes dans les classifieurs de sous-objets, les notations pour les arêtes sont suggestives mais plus arbitraires. □

Cette détermination du classifieur de sous-objet montre que le topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ est deux-valué et non booléen (voir [4], VI).

---

4. Égalité pour les surfaces de Riemann de genre $g > 1$

On montre que pour une variété compacte orientée 2-dimensionnelle Σ de genre $g > 1$, la norme normalisée (37) sur l'homologie singulière est en accord avec la norme de Gromov. Puisque ces deux normes sont équivalentes et puisque la norme de Gromov s'évanouit excepté sur $H_2(\Sigma, \mathbb{R})$n il suffit de prouver l'égalité pour la classe fondamentale $[\Sigma] \in H_2(\Sigma, \mathbb{R})$. La difficulté est de construire des cycles singuliers c dans la classe d'homologie $[\Sigma]$ qui non seulement ont une ℓ^1-norme $\|c\|_1$ proche de la valeur attendue $4(g-1)$ mais qui de plus sont *normalisés*, i.e. tels que toutes leurs frontières s'évanouissent $\partial_j(c) = 0$. On accomplit cela en trois étapes. Dans la section 4.1, on

traite la situation relative du bloc de construction K et on construit un cycle normalisé relatif à sa frontière ∂K. [...].

4.1. Normalisation de Moore pour le bloc de construction

Une variété compacte orientée 2-dimensionnelle Σ de genre $g > 1$ s'obtient en collant ensemble g copies d'un bloc de construction K que l'on va maintenant décrire.

Ce bloc de construction est le quotient du polygone convexe $\mathrm{Conv}(0,1,2,3,4,5)$ de la Figure 2 par la relation d'équivalence R engendrée par

$$\Delta(\{1,2\})(x) \sim_R \Delta(\{4,3\})(x), \quad \Delta(\{2,3\})(x) \sim_R \Delta(\{5,4\})(x)\,, \quad \forall x \in \Delta^1$$

où étant donnés $n+1$ points $(P_0,\ldots,P_n)$ dans le plan affine réel $E = \mathbb{R}^2$, on dénote

$$\Delta(\{P_0,\ldots,P_n\}) \in \mathrm{Top}(\Delta^n, E), \quad (\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \mapsto \sum \lambda_j P_j.$$

Par transitivité, on trouve que les cinq sommets $(1,2,3,4,5)$ sont équivalents modulo R, puisque $1 \sim_R 4 \sim_R 3 \sim_R 2 \sim_R 5$. Ainsi, on a par constrution une application continue

$$\gamma : \mathrm{Conv}(0,1,2,3,4,5) \to K. \tag{10}$$

Le bloc de construction K est ainsi constitué de 4 triangles avec un sommet commun 0 et pour lequel les côtés externes s'identifient selon les règles suivantes

$$\Delta(\{1,2\}) \sim \Delta(\{4,3\}),\ \Delta(\{2,1\}) \sim \Delta(\{3,4\}),\ \Delta(\{2,3\}) \sim \Delta(\{5,4\}),\ \Delta(\{3,2\}) \sim \Delta(\{4,5\}). \tag{11}$$

On voit géométriquement la figure 3 comme un sous-ensemble du 2-tore (avant les identifications des arêtes) et dans les Figures **??** et après qu'on ait procédé à ces identifications. Ces figures gardent la trace des triangulations naturelles.

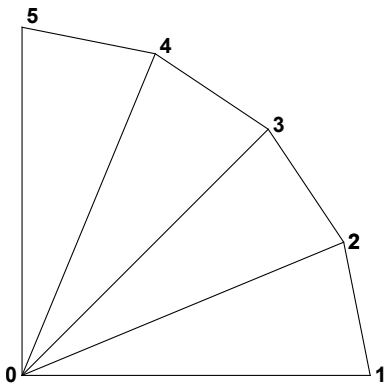

Figure 2: Polygone de base dans $E = \mathbb{R}^2$.

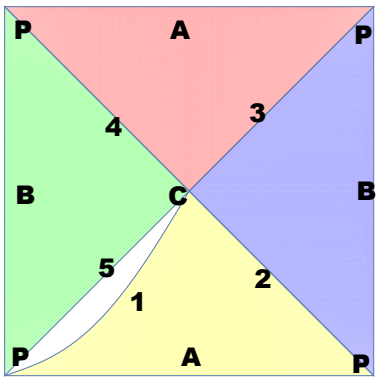

Figure 3: Polygone de base à l'intérieur du domaine fondamental pour $\mathbb{Z}^2$ agissant sur $\mathbb{R}^2$.

Par construction, on a $\Delta(\{P_0,\ldots,P_n\}) \in \mathrm{Top}(\Delta^n, \mathrm{Conv}(P_j))$ où $\mathrm{Conv}(P_j)$ est la fermeture convexe des points P_j. La composition

$$\Delta'(\{P_0,\ldots,P_n\}) := \gamma \circ \Delta(\{P_0,\ldots,P_n\}) \in \mathrm{Top}(\Delta^n, K) \tag{12}$$

définit des simplexes singuliers, i.e. les éléments de sin K. De (11), on obtient les égalités

$$\Delta'(\{1,2\}) = \Delta'(\{4,3\}),\ \Delta'(\{2,1\}) = \Delta'(\{3,4\}),\ \Delta'(\{2,3\}) = \Delta'(\{5,4\}),\ \Delta'(\{3,2\}) = \Delta'(\{4,5\}) \tag{13}$$

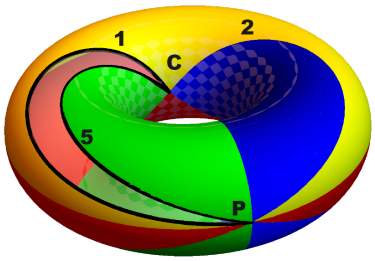

FIGURE 4 : Bloc de construction triangulé K.

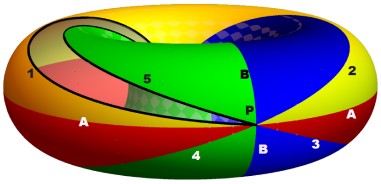

FIGURE 5 : Voisinage du point P.

À chaque paire (i,j) d'indices entiers > 0, on associe la chaîne simpliciale $c(0,i,j)$

$$c(0,i,j) := \Delta'(\{0,i,j\}) + \Delta'(\{i,j,0\}) + 2\Delta'(\{j,0,i\}) - \Delta'(\{j,i,0\}) - \Delta'(\{0,j,i\}) - 2\Delta'(\{i,0,j\}) \tag{14}$$

Les frontières de $c(0,i,j)$ sont décrites comme suit :

Lemme 4.1. : Les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\partial_0(c(0,i,j)) &= 2\Delta'(\{0,i\}) - 2\Delta'(\{0,j\}) - \Delta'(\{i,0\}) + \Delta'(\{j,0\}) + \Delta'(\{i,j\}) - \Delta'(\{j,i\}) \\
\partial_1(c(0,i,j)) &= -\Delta'(\{0,i\}) + \Delta'(\{0,j\}) + \Delta'(\{i,0\}) - \Delta'(\{j,0\}) + 2\Delta'(\{j,i\}) - 2\Delta'(\{i,j\}) \\
\partial_2(c(0,i,j)) &= \Delta'(\{0,i\}) - \Delta'(\{0,j\}) + 2\Delta'(\{j,0\}) - 2\Delta'(\{i,0\}) + \Delta'(\{i,j\}) - \Delta'(\{j,i\})
\end{aligned}$$

Preuve : Le résultat découle de la linéarité des ∂_j et des égalités

$$\partial_0\Delta'(\{a,b,c\}) = \Delta'(\{b,c\}),\ \partial_1\Delta'(\{a,b,c\}) = \Delta'(\{a,c\}),\ \partial_2\Delta'(\{a,b,c\}) = \Delta'(\{a,b\}) \qquad \square$$

On combine maintenant les chaînes simpliciales ci-dessus et on utilise les règles (13) pour obtenir une chaîne qui est normalisée relativement à la frontière ∂K de K.

Lemme 4.2. : Soit $c_{(1,5)} := \sum_{1\le i\le 4} c(0,i,i+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_0 c_{(1,5)} &= 2\Delta'(\{0,1\}) - 2\Delta'(\{0,5\}) - \Delta'(\{1,0\}) + \Delta'(\{5,0\}) \\
\partial_1 c_{(1,5)} &= -\Delta'(\{0,1\}) + \Delta'(\{0,5\}) + \Delta'(\{1,0\}) - \Delta'(\{5,0\}) \\
\partial_2 c_{(1,5)} &= \Delta'(\{0,1\}) - \Delta'(\{0,5\}) - 2\Delta'(\{1,0\}) + 2\Delta'(\{5,0\})
\end{aligned}$$

Preuve : Les annulations découlent des égalités

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le 4} (\Delta'(\{0,i\}) - \Delta'(\{0,i+1\})) &= \Delta'(\{0,1\}) - \Delta'(\{0,5\}) \\
\sum_{1\le i\le 4} (\Delta'(\{i,0\}) - \Delta'(\{i+1,0\})) &= \Delta'(\{1,0\}) - \Delta'(\{5,0\})
\end{aligned}$$

et à partir de la suivante, qui utilise les règles (13)

$$\sum_{1\le i\le 4} (\Delta(\{i,i+1\}) - \Delta(\{i+1,i\})) = 0$$

puisque (13) montre que les termes suivants s'évanouissent tous

$$\Delta(\{1,2\}) - \Delta(\{4,3\}),\ \Delta(\{2,3\}) - \Delta(\{5,4\}),\ \Delta(\{3,4\}) - \Delta(\{2,1\}),\ \Delta(\{4,5\}) - \Delta(\{3,2\})$$

On obtient ainsi les formules souhaitées. □.

Références

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J-L. Verdier, eds. (1972), SGA_4, LNM 269-270-305, Berlin; New York: Springer-Verlag.

[2] Dundas, Bjorn Ian; Goodwillie, Thomas G.; McCarthy, Randy *The local structure of algebraic K-theory.* Algebra and Applications, 18. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.

[3] Goerss, Paul G.; Jardine, John F. *Simplicial homotopy theory.* Progress in Mathematics, 174. Birkhauser Verlag, Basel, 1999.

[4] S. MacLane, I Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory.* Corrected reprint of the 1992 edition. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.

[5] P. May *Simplicial objects in algebraic topology.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 11 D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London 1967.

[6] J. Moore *Notes on algebraic homotopy theory.*