

# SUR LES COURBES ALGÈBRIQUES ET LES VARIÉTÉS QUI S'EN DÉDUISENT

Par André WEIL.

Dans le développement de la géométrie sur les variétés algébriques, les variétés déduites des courbes algébriques ont toujours occupé une place privilégiée, due à la fois à l'importance de leurs propriétés particulières, et à la simplicité de leur mode de génération, qui fait de leur étude une introduction naturelle à toute théorie générale. Déjà dans les mémorables travaux de Riemann, la variété jacobienne d'une courbe algébrique joue un rôle essentiel, bien qu'encore implicite ; et la théorie des correspondances sur une courbe, abordée pour la première fois dans toute sa généralité par Hurwitz au moyen des méthodes de Riemann, et reprise ensuite par les géomètres italiens, et en particulier Castelnuovo et Severi par voie algébrico-géométrique, n'est pas autre chose, comme ces derniers l'ont bien mis en évidence, que l'étude de la variété des couples de points d'une courbe algébrique, c'est-à-dire du produit de la courbe par elle-même.

C'est principalement de ces variétés qu'il va être question dans le présent mémoire et dans ceux qui lui feront suite : je me propose d'en reprendre l'étude *ab oro*, par des méthodes apparentées à celles de l'école italienne, mais non sans tirer parti en même temps (autant qu'il est possible lorsqu'il s'agit de corps abstraits) des lumières que jettent sur ces questions la topologie et les méthodes transcendantes.

Ce n'est pas le lieu de revenir ici sur l'insuffisance, maintes fois signalée, des démonstrations des géomètres italiens : j'espère au contraire montrer par l'exemple qu'il est possible de donner à leurs méthodes toute la rigueur nécessaire sans leur rien faire perdre en puissance ni en fécondité. La plupart des résultats qui seront démontrés ici n'ont rien d'essentiellement nouveau dans le cas où le corps des constantes est celui des nombres complexes ; mais, comme on le verra, quelques-unes des applications les plus intéressantes de notre théorie portent sur le cas où la caractéristique du corps de base n'est pas nulle.

Nous aurions eu le droit, compte tenu de la différence de langage, d'adapter à notre usage les résultats des travaux de F. K. Schmidt, de H. Hasse, et d'autres auteurs, sur les corps de fonctions algébriques d'une variable, travaux qui contiennent entre autres la démonstration du théorème de Riemann-Roch dans toute sa généralité, c'est-à-dire pour un corps de base quelconque. Il a paru préférable de retrouver d'abord ces mêmes résultats directement, sans rien supposer connu des travaux en question ; c'est ce qui sera fait dans la première partie, par la considération du produit de la courbe par elle-même, dont justement l'étude détaillée formera le sujet principal de ce qui doit

---

Retranscription en Latex Denise Vella-Chemla, juillet 2022.

suivre : dans le § I, nous donnerons la démonstration, par cette voie, du théorème de Riemann-Roch et des résultats qui s'y rattachent ; le § II contient la théorie des différentielles sur une courbe algébrique. La deuxième partie est consacrée à la théorie élémentaire des correspondances sur une courbe, et aux applications de cette théorie, parmi lesquelles se trouvera entre autres la démonstration de l'hypothèse de Riemann et de la conjecture d'Artin, pour une courbe à corps de base fini. Dans le mémoire suivant se trouveront les résultats plus profonds de la théorie des correspondances qui dépendent de l'étude de la variété jacobienne et des représentations matricielles déduites des diviseurs d'ordre fini.



## PREMIÈRE PARTIE THÉORIE DES COURBES

### § I. Le théorème de Riemann-Roch.

1. Il sera constamment fait usage des définitions et des résultats de mon livre *Foundations of Algebraic Geometry*<sup>1</sup>, qui seront supposés connus du lecteur.

Nous renvoyons à F-VII<sub>1</sub>, pour la définition des Variétés, ou variétés abstraites : comme ce sera uniquement de variétés abstraites qu'il sera question, nous nous dispenserons de la majuscule employée dans F-VII et F-VIII pour les désigner. Par une *courbe*, nous entendons une variété (abstraite) de dimension 1.

Les conventions et définitions étant celles de F-I<sub>1</sub>, nous supposons donnés une fois pour toutes une *courbe complète*  $\Gamma$  sans point multiple (pour la définition des variétés complètes, cf. F-VII<sub>1</sub>) et un corps de définition  $k$  de  $\Gamma$  qui sera appelé le *corps de base*. Aux restrictions apportées dans F-I<sub>1</sub>, à l'emploi du mot "corps", nous ajoutons la suivante : *tout corps dont il sera question par la suite est supposé contenir le corps de base  $k$ .*

Soient  $K$  un corps, et  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$  : d'après F-VIII<sub>1</sub>, la relation  $z = \varphi(M)$  détermine une correspondance biunivoque entre les éléments du corps  $K(M)$  et les fonctions  $\varphi$  sur  $\Gamma$  qui ont  $K$  pour corps de définition ; et il résulte de F-VIII<sub>1</sub> que cette correspondance est un isomorphisme entre  $K(M)$  et le corps abstrait  $\Omega_K$  des fonctions sur  $\Gamma$  qui ont  $K$  pour corps de définition. De plus, cet isomorphisme applique le sous-corps  $K$  de  $K(M)$  sur l'ensemble des fonctions constantes appartenant à  $\Omega_K$ , comme il résulte du lemme suivant :

LEMME 1. — Soient  $K$  un corps,  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ ,  $z$  un élément de  $K(M)$ , et  $\varphi$  la fonction sur  $\Gamma$  définie par rapport à  $K$  par  $z = \varphi(M)$ . Alors, si  $\varphi$  est constante,  $z$  est un élément de  $K$  ; et, si  $\varphi$  n'est pas constante,  $z$  est une quantité variable sur  $K$ .

Considérons en effet le graphe de  $\varphi$ , c'est-à-dire (F-VIII<sub>1</sub>, pr. 2) le lieu de  $M \times (z)$  par rapport à  $K$  sur le produit  $\Gamma \times D$  de  $\Gamma$  et de la droite projective  $D$  ; et considérons la projection de ce graphe sur  $D$ , qui est le lieu de  $(z)$  par rapport à  $K$  sur  $D$ . Comme cette projection admet  $K$  pour corps de définition, elle ne peut se réduire

---

<sup>1</sup>A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, Am. Math. Soc. Colloq, vol. 29, New-York 1946. Nous renverrons à ce livre par la lettre F, saisis de l'indication du chapitre et du § ; par exemple F-IV<sub>2</sub>, signifiera Found. of Alg. Geom., chap. IV, § 3 ; F-IV<sub>2</sub> th. 6 signifiera le théorème 6 de F-IV<sub>2</sub>, F-IV<sub>2</sub>, th. 6, cor. 3 signifiera le corollaire 3 du théorème 6 de F-IV<sub>2</sub> ; F-IV<sub>4</sub> pr. 10 signifiera la proposition 10 de F-IV<sub>4</sub>, etc.

à un point que si  $z$  est dans  $K$  ; alors le graphe de  $\varphi$  est la variété  $\Gamma \times (z)$ , et  $\varphi$  est la constante  $z$ . Si au contraire la projection sur  $D$  du graphe de  $\varphi$  n'est pas un point, alors elle n'est autre que  $D$ , et  $\varphi$  n'est pas constante ; en ce cas,  $z$  est de dimension 1 sur  $K$ . On observera que notre démonstration n'a pas fait usage du fait que  $\Gamma$  est de dimension 1 ; notre lemme reste valable pour une variété de dimension quelconque.

Pour la commodité du langage, nous identifierons une fonction constante sur  $\Gamma$ , prenant en tout point la valeur  $c$ , avec la quantité  $c$  ; le corps abstrait des constantes sur  $\Gamma$  se trouve ainsi identifié avec le "domaine universel"  $\mathbf{K}$  (cf. F-1<sub>1</sub>)<sup>2</sup>. Avec cette convention, on voit que l'isomorphisme entre  $K(M)$  et  $\Omega_K$  dont la définition a été rappelée plus haut laisse invariants les éléments de  $K$ .

Dans ce qui suit, nous aurons à nous servir du lemme suivant, sur l'indépendance linéaire des fonctions sur  $\Gamma$  :

LEMME 2. — Soient  $\varphi_\lambda$  des fonctions sur  $\Gamma$ ,  $K$  un corps de définition commun pour ces fonctions, et  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ . Alors, pour que les  $\varphi_\lambda$  soient linéairement indépendantes sur le corps des constantes, il faut et il suffit qu'elles le soient sur le corps  $K$  ; et pour cela, il faut et il suffit que les quantités  $z_\lambda = \varphi_\lambda(M)$  soient linéairement indépendantes sur  $K$ .

Supposons en effet qu'on ait une relation  $\sum_\lambda c_\lambda \varphi_\lambda = 0$ , à coefficients constants  $c_\lambda$  non tous nuls ; soient  $K'$  un corps contenant  $K$  et les  $c_\lambda$ , et  $M'$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K'$ , donc a fortiori par rapport à  $K$ . Les quantités  $z'_\lambda = \varphi_\lambda(M')$  sont alors des éléments de  $K(M')$ , et l'on a  $\sum_\lambda c_\lambda z'_\lambda = 0$ . Comme, en vertu de F-IV<sub>2</sub>, th.

1.  $K'$  et  $K(M')$  sont linéairement disjoints sur  $K$  (cf. F-I<sub>2</sub>), cette dernière relation implique que les  $z'_\lambda$  ne sont pas linéairement indépendants sur  $K$ , donc qu'ils satisfont à une relation  $\sum_\lambda \bar{c}_\lambda z'_\lambda = 0$  à coefficients  $\bar{c}_\lambda$  dans  $K$  et non tous nuls. On a alors  $\sum_\lambda \bar{c}_\lambda \varphi_\lambda = 0$ . Quant à la dernière assertion de notre lemme, c'est une conséquence de l'isomorphisme entre  $K(M)$  et  $\Omega_\lambda$ . La démonstration ci-dessus, et le présent lemme, restent d'ailleurs valables si, au lieu de  $\Gamma$ , on considère une variété de dimension arbitraire.

2. L'équivalence des diviseurs sur  $\Gamma$ , qui sera notée  $\sim$ , devra toujours être entendue au sens de l'équivalence linéaire (cf. F-IX<sub>7</sub>). Autrement dit, dans le groupe additif des diviseurs sur  $\Gamma$ , on considère l'ensemble des diviseurs de la forme  $(\varphi)$ , où  $\varphi$  est une

---

<sup>2</sup>Pour abrégé, nous dirons parfois "corps des constantes" au lieu de "corps abstrait des constantes". On observera que, dans notre langage, le "corps de base" est le corps  $k$ , et le "corps (abstrait) des constantes" est le "domaine universel"  $K$  ; ces expressions sont donc à distinguer soigneusement l'une de l'autre.

fonction quelconque sur  $\Gamma$ , autre que la constante 0 ; ce dernier ensemble, en vertu de F-VIII<sub>2</sub>, th. 6. forme un sous-groupe du groupe de tous les diviseurs ; on écrira  $\mathbf{a} \sim 0$  si  $\mathbf{a}$  est un élément de ce sous-groupe, et  $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$  si  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  appartiennent à une même classe suivant ce sous-groupe, c'est-à-dire s'il existe une fonction  $\varphi$  sur  $\Gamma$ , telle que l'on ait  $(\varphi) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Le groupe quotient du groupe de tous les diviseurs par le groupe des diviseurs de la forme  $(\varphi)$  sera appelé le groupe additif des classes de diviseurs sur  $\Gamma$ , et par une *classe de diviseurs* sur  $\Gamma$ , on entendra un élément de ce groupe quotient.

Le résultat suivant n'est autre chose que l'application, au cas qui nous occupe ici, du principe général en vertu duquel l'équivalence linéaire implique l'équivalence numérique (cf. F-IX<sub>7</sub>).

PROPOSITION 1. — Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux diviseurs sur  $\Gamma$  : alors la relation  $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$  entraîne  $\deg(\mathbf{a}) = \deg(\mathbf{b})$ .

Soit en effet  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma$ , telle que  $(\varphi) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Si  $\varphi$  est constante, on a  $(\varphi) = 0$  d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 3. cor. 3. donc  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . Supposons  $\varphi$  non constante ; et soit  $\Lambda$  le graphe de  $\varphi$ . Alors  $\Lambda$  est une courbe sur  $\Gamma \times D$  qui a la projection  $D$  sur  $D$  ; dans ces conditions, il résulte des définitions (F-VIII<sub>2</sub>), de F-VIII<sub>2</sub> th. 1. et de F-VII<sub>6</sub>, th. 15, que l'on a  $\deg[(\varphi)_0] = \deg[(\varphi)_\infty] = [\Lambda : D]$ , donc  $\deg[(\varphi)] = 0$ , c'est-à-dire  $\deg(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$ .

PROPOSITION 2. — Soit  $\mathbf{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$  ; alors, pour qu'il existe sur  $\Gamma$  un diviseur positif  $\mathbf{b}$  équivalent à  $\mathbf{a}$ , il faut et il suffit qu'il existe une fonction  $\varphi$  sur  $\Gamma$ , autre que la constante 0, telle que  $(\varphi) \succ -\mathbf{a}$ . Si de plus  $\mathbf{a}$  est rationnel par rapport à un corps  $K$ , et équivalent à un diviseur positif sur  $\Gamma$ , il existe un diviseur positif  $\mathbf{b}$  sur  $\Gamma$ , rationnel par rapport à  $K$ , et équivalent à  $\mathbf{a}$  ; et, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une fonction  $\varphi$  sur  $\Gamma$ , autre que la constante 0, ayant  $K$  pour corps de définition, et telle que  $(\varphi) \succ -\mathbf{a}$ .

Si en effet  $\mathbf{b}$  est un diviseur positif, équivalent à  $\mathbf{a}$ , et que  $\varphi$  soit une fonction telle que  $(\varphi) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ , on a bien  $(\varphi) \succ -\mathbf{a}$  ; réciproquement, si  $\varphi$  est telle que  $(\varphi) \succ -\mathbf{a}$ , le diviseur  $\mathbf{b} = (\varphi) + \mathbf{a}$  est positif et équivalent à  $\mathbf{a}$ . Le reste de notre proposition est une conséquence immédiate de ce qui précède et de F-VIII<sub>2</sub>. th. 10.

Si  $\mathbf{a}$  est un diviseur quelconque sur  $\Gamma$ , nous désignerons une fois pour toutes par  $L(\mathbf{a})$  l'ensemble composé de la constante 0 et de toutes les fonctions  $\varphi$  sur  $\Gamma$  telles que  $(\varphi) \succ -\mathbf{a}$ . Il résulte de F-VIII<sub>2</sub>, th. 6. que toute combinaison linéaire d'éléments de  $L(\mathbf{a})$ , à coefficients constants, appartient à  $L(\mathbf{a})$  :  $L(\mathbf{a})$  est donc un module sur le corps des constantes : le rang (fini ou infini) de ce module sera désigné, une fois pour toutes, par  $l(\mathbf{a})$  : on va démontrer dans un instant que  $l(\mathbf{a})$  est toujours un entier

fini. Il résulte de F-VIII<sub>2</sub> th. 2, que  $L(0)$  est le corps des constantes, donc que l'on a  $l(0) = 1$ , et que, si  $\mathbf{a}$  est un diviseur positif autre que 0, le module  $L(-\mathbf{a})$  se réduit à la constante 0, de sorte qu'on a  $l(-\mathbf{a}) = 0$ . Pour que le corps des constantes soit contenu dans  $L(\mathbf{a})$ , il faut et il suffit qu'on ait  $\mathbf{a} \succ 0$  ; lorsqu'il en est ainsi, on a donc  $l(\mathbf{a}) \geq 1$ .

3. Si les diviseurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont équivalents, c'est-à-dire s'il existe une fonction  $\theta$  telle que  $(\theta) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ , alors (d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 6) la relation  $\psi = \theta\varphi$  définit une correspondance linéaire et biunivoque entre les éléments  $\varphi$  de  $L(\mathbf{a})$  et les éléments  $\psi$  de  $L(\mathbf{b})$  : il s'ensuit qu'on a alors  $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{b})$ .

PROPOSITION 3. — Soit  $\mathbf{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$ , rationnel par rapport à un corps  $K$ . Alors l'ensemble de toutes les fonctions de  $L(\mathbf{a})$  qui ont  $K$  pour corps de définition est un module de rang  $l(\mathbf{a})$  sur le corps  $K$  ; et toute base de ce module est aussi une base du module  $L(\mathbf{a})$  sur le corps des constantes.

C'est là une conséquence immédiate du lemme 2 (n° 1), et de F-VIII<sub>2</sub>, th. 10.

PROPOSITION 4. — Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux diviseurs sur  $\Gamma$ , tels que l'on ait  $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ . Alors on a  $L(\mathbf{a}) \supset L(\mathbf{b})$ ,  $l(\mathbf{a}) \geq l(\mathbf{b})$ , et

$$l(\mathbf{a}) - \deg(\mathbf{a}) \leq l(\mathbf{b}) - \deg(\mathbf{b}).$$

De plus,  $\mathbf{a}$  étant un diviseur quelconque, on a

$$l(\mathbf{a}) \leq \max[\deg(\mathbf{a}) + 1, 0] ;$$

et par suite  $l(\mathbf{a})$  est toujours un entier fini.

La relation  $L(\mathbf{a}) \supset L(\mathbf{b})$  résulte des définitions, et entraîne  $l(\mathbf{a}) \geq l(\mathbf{b})$ . Posons  $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  et  $m = \deg(\mathbf{m})$  ; nous avons à démontrer que, si  $\mathbf{m} \succ 0$ , on a  $l(\mathbf{a}) \leq l(\mathbf{b}) + m$  ; c'est ce que nous ferons par récurrence sur  $m$ . Si  $m = 1$ ,  $\mathbf{m}$  se réduit à un point  $M$  ; nous avons donc à démontrer d'abord que l'on a  $l(\mathbf{b} + M) \leq l(\mathbf{b}) + 1$ . Il en est bien ainsi si  $L(\mathbf{b} + M) = L(\mathbf{b})$  : supposons donc qu'il existe dans  $L(\mathbf{b} + M)$  une fonction  $\varphi_0$  qui n'appartienne pas à  $L(\mathbf{b})$ . Soit  $b$  le coefficient de  $M$  dans le diviseur  $\mathbf{b}$  : posons  $\mathbf{c} = \mathbf{b} - b.M$ , de sorte que  $M$  ne figure pas dans l'expression réduite du diviseur  $\mathbf{c}$ , ou, comme nous dirons, n'est pas un *composant* de  $\mathbf{c}$ . Alors  $L(\mathbf{b})$  est l'ensemble des fonctions  $\varphi$  telles qu'on ait à la fois  $(\varphi) \succ -\mathbf{c}$ , et  $v_M(\varphi) \geq -b$ , et  $L(\mathbf{b} + M)$  est l'ensemble des fonctions  $\varphi$  telles qu'on ait à la fois  $(\varphi) \succ -\mathbf{c}$  et  $v_M(\varphi) \geq -b - 1$ . On a donc

$$v_M(\varphi_0) = -b - 1 ;$$

et  $L(\mathfrak{b})$  est l'ensemble des fonctions  $\varphi$  de  $L(\mathfrak{b} + M)$  telles que  $v_M(\varphi) \geq -b$ . Soit  $\varphi$  une fonction quelconque de  $L(\mathfrak{b} + M)$  : d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 6, on a alors  $v_M(\varphi/\varphi_0) \geq 0$ , c'est-à-dire que (d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 3) la fonction  $\varphi/\varphi_0$  est finie en  $M$  ; si donc  $c$  est la valeur en  $M$  de cette dernière fonction, la fonction  $\varphi/\varphi_0 - c = (\varphi - c\varphi_0)/\varphi_0$  prend en  $M$  la valeur 0, de sorte que l'on a (F-VIII<sub>2</sub>, th. 3)

$$v_M[(\varphi - c\varphi_0)/\varphi_0] \geq 1.$$

donc, d'après F-VIII<sub>2</sub> th. 6,  $v_M(\varphi - c\varphi_0) \geq -b$ . Comme d'ailleurs  $\varphi$  et  $\varphi_0$ , donc aussi  $\varphi - c\varphi_0$  sont dans  $L(\mathfrak{b} + M)$ , il résulte de là que  $\varphi - c\varphi_0$  est dans  $L(\mathfrak{b})$ . Ceci démontre qu'en adjoignant la fonction  $\varphi_0$  à une base du module  $L(\mathfrak{b})$ , on obtient une base du module  $L(\mathfrak{b} + M)$ , de sorte qu'on a, dans le cas que nous considérons  $L(\mathfrak{b} + M) = l(\mathfrak{b}) + 1$ . Revenons maintenant au cas où  $\mathfrak{m}$  est un diviseur positif de degré quelconque, et montrons, par récurrence sur le degré  $m$  de  $\mathfrak{m}$ , qu'on a alors  $l(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}) \leq l(\mathfrak{b}) + m$ . Soit en effet  $M$  l'un des composants de  $\mathfrak{m}$  : on a alors

$$\mathfrak{m} - M \succ 0, \quad \deg(\mathfrak{m} - M) = m - 1.$$

donc, par l'hypothèse de récurrence,  $l(\mathfrak{b} + \mathfrak{m} - M) \leq l(\mathfrak{b}) + m - 1$ . D'autre part, d'après ce qu'on vient de démontrer, on a

$$l(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}) \leq l(\mathfrak{b} + \mathfrak{m} - M) + 1 ;$$

on a donc bien  $l(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}) \leq l(\mathfrak{b}) + m$ . Ceci démontre la première partie de la proposition. Soit maintenant  $\mathfrak{a}$  un diviseur quelconque ; si l'on a  $l(\mathfrak{a}) > 0$ ,  $\mathfrak{a}$  est, d'après la prop. 2, équivalent à un diviseur positif  $\mathfrak{a}'$ , et l'on a alors  $l(\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{a}')$ ,  $\deg(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}')$ , et  $\mathfrak{a}' \succ 0$  : si donc nous appliquons aux diviseurs  $\mathfrak{a}'$  et 0 la première partie de notre proposition, nous obtenons  $l(\mathfrak{a}') - \deg(\mathfrak{a}') \leq l(0) = 1$ . Ceci achève la démonstration.

PROPOSITION 5. — Il existe un entier  $G$  tel que l'on ait

$$l(\mathfrak{a}) \geq \deg(\mathfrak{a}) - G$$

quel que soit le diviseur  $\mathfrak{a}$  sur  $\Gamma$ .

Soient  $\varphi$  une fonction non constante sur  $\Gamma$ ,  $K$  un corps de définition pour  $\varphi$ , et  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$  : posons  $x = \varphi(M)$ ,  $\mathfrak{d} = (\varphi)_\infty$ , et  $d = [K(M) : K(x)]$ . Le graphe  $\Lambda$  de  $\varphi$  est alors une courbe sur  $\Gamma \times D$ , ayant  $D$  pour projection sur  $D$ , et telle que  $[\Lambda : D] = d$  ; en vertu de F-VIII<sub>2</sub>. th. 1. et de F-VII<sub>6</sub>, th. 15, on a donc  $\deg(\mathfrak{d}) = d$ . Comme  $d$  est le degré de  $K(M)$  sur  $K(x)$ , il y a, dans  $K(M)$ ,  $d$  quantités  $z_1, \dots, z_d$ , linéairement indépendantes sur le corps  $K(x)$  ; il n'y a alors entre les  $z_\rho$  aucune relation de la forme

$$\sum_{\rho} P_{\rho}(x).z_{\rho} = 0$$

où les  $P_\rho(X)$  soient des polynômes non tous nuls dans  $K[X]$  : si donc  $n$  est un entier quelconque, les  $(n+1)d$  quantités  $x^\mu z_\rho$ , pour  $0 \leq \mu \leq n, 1 \leq \rho \leq d$ , sont linéairement indépendantes sur le corps  $K$ . Si donc nous désignons par  $\psi_\rho$ , pour  $1 \leq \rho \leq d$ , la fonction sur  $\Gamma$ , définie par rapport à  $K$  par la relation  $z_\rho = \psi_\rho(M)$ , il résulte du lemme 2 que les  $(n+1)d$  fonctions  $\varphi^\mu \psi_\rho$  pour  $0 \leq \mu \leq n, 1 \leq \rho \leq d$ , sont linéairement indépendantes sur le corps des constantes. Choisissons maintenant (ce qui est évidemment possible) un diviseur  $\mathbf{m}$ , tel que l'on ait, pour  $1 \leq \rho \leq d, \mathbf{m} \succ (\psi_\rho)_\infty$  ; on aura alors  $(\psi_\rho) \succ -\mathbf{m}$  pour  $1 \leq \rho \leq d$ , et par suite, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 6,  $(\varphi^\mu \psi_\rho) \succ -n\mathfrak{d} - \mathbf{m}$  pour  $0 \leq \mu \leq n, 1 \leq \rho \leq d$ . Il s'ensuit qu'on a, quel que soit  $n$ ,  $l(n\mathfrak{d} + \mathbf{m}) \geq (n+1)d$ .

Cela posé, soit  $\mathbf{a}$  un diviseur quelconque sur  $\Gamma$  ; soit  $\mathbf{a}'$  un diviseur positif tel que  $\mathbf{a} \prec \mathbf{a}'$  ; on peut mettre  $\mathbf{a}'$  sous la forme

$$\mathbf{a}' = \sum_{\alpha} A_{\alpha} + \sum_{\beta} A'_{\beta},$$

où les  $A_{\alpha}$ , sont tels que  $\varphi(A_{\alpha}) \neq \infty$ , et les  $A'_{\beta}$  tels que  $\varphi(A'_{\beta}) = \infty$ . Posons  $\mathbf{a}_0 = \sum_{\alpha} A_{\alpha}$ , et  $\mathbf{a}_1 = \sum_{\beta} A'_{\beta}$  ; il y a alors un entier  $n_1$  tel que l'on ait  $\mathbf{a}_1 \prec n_1\mathfrak{d}$ . Posons  $a_{\alpha} = \varphi(A_{\alpha})$  ; on a  $(\varphi - a_{\alpha}) \succ -\mathfrak{d}$  ; comme de plus  $\varphi - a_{\alpha}$  prend la valeur 0 en  $A_{\alpha}$ ,  $A_{\alpha}$  est un composant de  $(\varphi - a_{\alpha})_0$ , de sorte qu'on a  $(\varphi - a_{\alpha}) \succ A_{\alpha} - \mathfrak{d}$  ; si donc les  $A_{\alpha}$  sont en nombre  $n_0$ , et qu'on pose  $\theta = \prod_{\alpha=1}^{n_0} (\varphi - a_{\alpha})$ , on aura  $(\theta) \succ \mathbf{a}_0 - n_0\mathfrak{d}$ . Il suit de là qu'on a  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \prec (n_0 + n_1)\mathfrak{d} + (\theta)$ , donc a fortiori, en posant de plus  $n = n_0 + n_1, \mathbf{a} \prec n\mathfrak{d} + \mathbf{m} + (\theta)$ , où  $\mathbf{m}$  est le diviseur positif défini plus haut. Posons  $\mathbf{b} = n\mathfrak{d} + \mathbf{m} + (\theta)$  ; nous avons donc, d'après la prop. 4,  $l(\mathbf{a}) - \deg(\mathbf{a}) \geq l(\mathbf{b}) - \deg(\mathbf{b})$ . D'autre part, puisque  $\mathbf{b} \sim n\mathfrak{d} + \mathbf{m}$ , on a  $l(\mathbf{b}) = l(n\mathfrak{d} + \mathbf{m})$ , donc  $l(\mathbf{b}) \geq (n+1)d$  d'après ce qui a été démontré plus haut, et

$$\deg(\mathbf{b}) = \deg(n\mathfrak{d} + \mathbf{m}) = nd + \deg(\mathbf{m}).$$

Il suit de là qu'on a  $l(\mathbf{a}) - \deg(\mathbf{a}) \geq d - \deg(\mathbf{m})$ .

4. D'après la prop. 5, les valeurs prises par l'entier

$$\deg(\mathbf{a}) - l(\mathbf{a}) + 1,$$

quand on prend pour  $\mathbf{a}$  tous les diviseurs sur  $\Gamma$ , ont une borne supérieure qui est un entier fini ; cet entier sera appelé le *genre* de la courbe  $\Gamma$ , et sera désormais désigné par  $g$ . Comme on a en particulier  $\deg(0) - l(0) + 1 = 0$ , on a  $g \geq 0$ .

Soit  $\mathbf{a}$  un diviseur quelconque sur  $\Gamma$  : nous désignerons par  $r(\mathbf{a})$  l'entier  $r(\mathbf{a}) = \deg(\mathbf{a}) - l(\mathbf{a}) + 1 - g$ . On a donc, quel que soit  $\mathbf{a}$  :

$$l(\mathbf{a}) = \deg(\mathbf{a}) - g + 1 + r(\mathbf{a}), \quad r(\mathbf{a}) \geq 0.$$



L'entier  $r(\mathbf{a})$  a alors les propriétés suivantes, qui résultent immédiatement de sa définition et des propriétés établies ci-dessus pour  $l(\mathbf{a})$ . Si  $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ , on a  $r(\mathbf{a}) = r(\mathbf{b})$ . Si  $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ , on a  $r(\mathbf{a}) \leq r(\mathbf{b})$  et

$$r(\mathbf{a}) + \deg(\mathbf{a}) \geq r(\mathbf{b}) + \deg(\mathbf{b}).$$

On a  $r(0) = g$ , donc  $r(\mathbf{a}) \leq g$  pour tout diviseur positif  $\mathbf{a}$ . Enfin, par définition de  $g$ , il existe au moins un diviseur  $\mathbf{a}$  tel que  $r(\mathbf{a}) = 0$ .

**PROPOSITION 6.** — Il existe un entier  $N$  tel que l'on ait  $r(\mathbf{a}) = 0$  pour tout diviseur  $\mathbf{a}$  sur  $\Gamma$ , de degré au moins égal à  $N$ .

Soit  $\mathbf{a}_0$ , un diviseur tel que  $r(\mathbf{a}_0) = 0$  ; soit  $\mathbf{a}$  un diviseur tel que  $\deg(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) \geq g$  ; on a  $l(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) \geq \deg(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) - g + 1 \geq 1$ , donc, d'après la prop. 2, il existe un diviseur positif  $\mathbf{b}$  tel que  $\mathbf{b} \sim \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$ . On a alors  $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}$ , et par suite  $r(\mathbf{a}) = r(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b})$ . Mais, puisque  $\mathbf{a}_0 + \mathbf{b} \succ \mathbf{a}_0$ , on a  $r(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}) \leq r(\mathbf{a}_0) = 0$ . L'entier  $N = \deg(\mathbf{a}_0) + g$  possède donc bien la propriété énoncée dans notre proposition.

**PROPOSITION 7.** — Soit  $\mathbf{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$ , rationnel par rapport à un corps  $K$  ; soit  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ . Alors, pour que l'on ait  $r(\mathbf{a}) > 0$ , il faut et il suffit qu'on ait  $L(\mathbf{a} + M) = L(\mathbf{a})$ .

En effet, si  $L(\mathbf{a} + M) = L(\mathbf{a})$ , on a  $l(\mathbf{a} + M) = l(\mathbf{a})$ , donc

$$r(\mathbf{a} + M) = r(\mathbf{a}) - 1,$$

donc  $r(\mathbf{a}) \geq 1$ . Supposons d'autre part qu'on ait  $L(\mathbf{a} + M) \neq L(\mathbf{a})$  ; comme  $L(\mathbf{a} + M)$  possède, d'après la prop. 3, une base formée de fonctions ayant  $K(M)$  pour corps de définition, il existe donc une telle fonction  $\varphi$  dans  $L(\mathbf{a} + M)$  qui ne soit pas dans  $L(\mathbf{a})$ . Soit  $N$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K(M)$  ; alors la quantité  $z = \varphi(N)$  est dans  $K(M, N)$ . D'après la prop. 6, on peut choisir un entier  $n$  tel que l'on ait  $r(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = 0$  pour tout diviseur  $\mathbf{m}$  de degré au moins égal à  $n$  ; soient  $M_1, \dots, M_n$ ,  $n$  points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $\overline{K}(N)$ . Alors, pour  $1 \leq \nu \leq n$ , il y a un isomorphisme  $\sigma_\nu$ , de  $\overline{K}(M, N)$  sur  $\overline{K}(M_\nu, N)$ , laissant invariants tous les éléments de  $\overline{K}(N)$ , et transformant  $M$  en  $M_\nu$  ; soit  $z_\nu$  le transformé de  $z$  par cet isomorphisme, et soit  $\varphi_\nu$  la fonction sur  $\Gamma$ , définie par rapport à  $K(M_\nu)$  par  $z_\nu = \varphi_\nu(N)$ . Soient  $\Lambda$  le graphe de  $\varphi$ , et  $\Lambda_\nu$  celui de  $\varphi_\nu$  ; ce sont respectivement les lieux de  $N \times (z)$  par rapport à  $K(M)$ , et de  $N \times (z_\nu)$  par rapport à  $K(M_\nu)$ , sur  $\Gamma \times D$ . Il résulte alors de F-IV<sub>2</sub>, th. 3. que  $\Lambda_\nu$  est le transformé de  $\Lambda$  par  $\sigma_\nu$  ; il suit de là, de F-IV<sub>4</sub>, th. 8. cor. 3, de F-VI<sub>2</sub>, th. 3, et de la définition des diviseurs  $(\varphi)$  et  $(\varphi_\nu)$ , que  $(\varphi_\nu)$  est le transformé de  $(\varphi)$  par  $\sigma_\nu$ . Comme  $\sigma_\nu$  transforme  $\mathbf{a}$  en lui-même, et  $M$  en  $M_\nu$ , on a donc  $(\varphi_\nu) \succ -\mathbf{a} - M_\nu$  ; et, puisqu'on n'a pas  $(\varphi) \succ -\mathbf{a}$ , on n'a pas

$(\varphi_\nu) \succ -\mathbf{a}$ . Par conséquent, l'on a, pour  $1 \leq \nu \leq n$ ,  $v_{M_\nu}(\varphi_\nu) = -1$  ; et, puisque les  $M_\nu$  sont distincts les uns des autres et distincts des composants de  $\mathbf{a}$ , on a  $v_{M_\nu}(\varphi_\mu) \geq 0$  pour  $\mu \neq \nu$ . Soient d'autre part  $\theta_\lambda$ , pour  $1 \leq \lambda \leq l(\mathbf{a})$ , des fonctions formant une base du module  $L(\mathbf{a})$  ; on a  $v_{M_\nu}(\theta_\lambda) \geq 0$  quels que soient  $\nu$  et  $\lambda$ . Il suit de là que les  $n+l(\mathbf{a})$  fonctions  $\varphi_\nu, \theta_\lambda$  sont dans  $L(\mathbf{a} + \sum_\nu M_\nu)$ , et qu'elles sont linéairement indépendantes. Supposons en effet qu'on ait une relation à coefficients constants  $\sum_\nu c_\nu \varphi_\nu + \sum_\lambda d_\lambda \theta_\lambda = 0$  ; si l'on avait  $c_\nu \neq 0$ , on aurait  $\varphi_\nu = -1/c_\nu \cdot \left( \sum_{\mu \neq \nu} c_\mu \varphi_\mu + \sum_\lambda d_\lambda \theta_\lambda \right)$ , donc, d'après ce qui précède et d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 6.  $v_{M_\nu}(\varphi_\nu) \geq 0$  ; comme il n'en est pas ainsi, on a donc  $c_\nu = 0$  quel que soit  $\nu$ , donc  $\sum_\lambda d_\lambda \theta_\lambda = 0$ , donc  $d_\lambda = 0$  quel que soit  $\lambda$  puisque les  $\theta_\lambda$  sont linéairement indépendants par définition. On a donc  $l\left(\mathbf{a} + \sum_\nu M_\nu\right) \geq n+l(\mathbf{a})$ . Comme d'autre part on a  $\deg\left(\mathbf{a} + \sum_\nu M_\nu\right) = n + \deg(\mathbf{a})$ , il s'ensuit qu'on a

$$r\left(\mathbf{a} + \sum_\nu M_\nu\right) \geq r(\mathbf{a}).$$

Comme le premier membre de cette dernière inégalité est nul en raison de la manière dont  $\mathbf{a}$  a été choisi l'entier  $n$ , on a donc bien  $r(\mathbf{a}) = 0$ .

**PROPOSITION 8.** — Soit  $\mathbf{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$ , rationnel par rapport à un corps  $K$  ; soient  $M_1, \dots, M_n$  des points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ , en nombre quelconque ; et soit  $\mathbf{m} = \sum_{\nu=1}^n M_\nu$ . Alors on a  $r(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = r(\mathbf{a}) - n$  et  $l(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = l(\mathbf{a})$  si  $n \leq r(\mathbf{a})$  ; et l'on a  $r(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = 0$  et  $l(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = l(\mathbf{a}) + n - r(\mathbf{a})$  si  $n \geq r(\mathbf{a})$ .

Soit d'abord  $n = 1$ . Alors, si  $r(\mathbf{a}) = 0$ , on a  $r(\mathbf{a} + \mathbf{m}) \leq r(\mathbf{a}) = 0$ , donc  $r(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = 0$ , donc  $l(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = l(\mathbf{a}) + 1$  ; si d'autre part  $r(\mathbf{a}) > 0$ , on a, d'après la prop. 7.  $l(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = l(\mathbf{a})$ , donc

$$r(\mathbf{a} + \mathbf{m}) = r(\mathbf{a}) - 1.$$

La démonstration pour  $n$  quelconque suit immédiatement de là par récurrence sur  $n$ .

**PROPOSITION 9.** — Soit  $\mathbf{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$ , rationnel par rapport à un corps  $K$ , et tel que  $l(\mathbf{a}) > 0$ . Alors, si  $M$  est un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ , on a  $l(\mathbf{a} - M) = l(\mathbf{a}) - 1$ .

En effet, d'après la prop. 4, on a, soit  $l(\mathbf{a} - M) = l(\mathbf{a})$ , soit  $l(\mathbf{a} - M) = l(\mathbf{a}) - 1$  ; et l'on a  $L(\mathbf{a} - M) \subset L(\mathbf{a})$ . Il nous suffit donc de montrer que, dans les conditions ci-dessus, on n'a pas  $L(\mathbf{a} - M) = L(\mathbf{a})$ . Puisque  $l(\mathbf{a}) > 0$ , il existe, d'après la prop. 3, au moins une fonction  $\varphi$  dans  $L(\mathbf{a})$ , autre que la constante 0, ayant  $K$

pour corps de définition. Alors le diviseur  $(\varphi) + \mathfrak{a}$  est rationnel par rapport à  $K$ . de sorte que tous ses composants sont algébriques sur  $K$  ;  $M$  ne peut donc être un de ces composants, de sorte qu'on n'a pas  $(\varphi) + \mathfrak{a} \succ M$  ; donc  $\varphi$  n'est pas dans  $L(\mathfrak{a} - M)$ .

5. Jusqu'ici, nous n'avons pas eu à faire usage de la variété  $\Gamma \times \Gamma$ , produit de la courbe  $\Gamma$  par elle-même ; cette variété va au contraire jouer un rôle essentiel dans ce qui suit ; d'après F-VII<sub>3</sub>, th. 6, cor., et F-IV<sub>6</sub>, th. 13, c'est une variété complète et sans point multiple. Une fois pour toutes, on désignera par  $\Delta$  la *diagonale* du produit  $\Gamma \times \Gamma$ . Si  $M$  est un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $k$ ,  $\Delta$  est, comme on sait (F-VI<sub>1</sub>, et F-VII<sub>4</sub>), le lieu de  $M \times M$  par rapport à  $k$  sur  $\Gamma \times \Gamma$  ;  $M \times M$  et  $M$  sont alors des points génériques correspondants de  $\Delta$  et de  $\Gamma$ , par rapport à  $k$ , dans une correspondance hirationnelle, partout birégulière, entre ces courbes, correspondance dans laquelle, à tout point de  $\Delta$ , correspond sa projection sur l'un ou l'autre facteur du produit  $\Gamma \times \Gamma$ . A tout cycle  $X$  sur  $\Delta$  correspond donc, dans cette même correspondance, un cycle  $\mathfrak{a}$  sur  $\Gamma$  qui peut s'écrire  $\mathfrak{a} = pr_1X = pr_2X$ , où  $pr_1$  et  $pr_2$  désignent comme d'habitude les projections algébriques, sur le premier et le second facteur de  $\Gamma \times \Gamma$  respectivement, de cycles dans  $\Gamma \times \Gamma$ . Réciproquement, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 17. cor. 3, si  $\mathfrak{a}$  est un diviseur sur  $\Gamma$ , les expressions  $\Delta.(\Gamma \times \mathfrak{a})$  et  $\Delta.(\mathfrak{a} \times \Gamma)$  définissent un même cycle  $X$  sur  $\Delta$ , à savoir celui qui satisfait à la relation  $\mathfrak{a} = pr_1X = pr_2X$ . En particulier, si  $P$  est un point quelconque de  $\Gamma$ , on a

$$\Delta.(\Gamma \times P) = \Delta.(P \times \Gamma) = P \times P.$$

Enfin, la correspondance birationnelle ci-dessus entre  $\Delta$  et  $\Gamma$  détermine une correspondance biunivoque entre fonctions  $\psi$  sur  $\Delta$  et fonctions  $\varphi$  sur  $\Gamma$ , telle que, si  $\psi$  et  $\varphi$  se correspondent ainsi, on a, quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$ ,  $\psi(P \times P) = \varphi(P)$  ; on a alors aussi

$$(\varphi) = pr_1[(\psi)] = pr_2[(\psi)],$$

et  $(\psi) = \Delta.[\Gamma \times (\varphi)] = \Delta.[(\varphi) \times \Gamma]$  (cf. aussi F-VIII<sub>2</sub> th. 4, cor. 1-2, et F-VIII<sub>2</sub>, th. 7).

Comme  $\Delta$  est définie sur le corps  $k$ , il existe sur  $\Gamma \times \Gamma$ , d'après F-VIII<sub>3</sub>, th. 9, des fonctions  $\omega$  ayant  $k$  pour corps de définition et telles que  $v_\Delta(\omega) = 1$ . Soit  $\omega$  une fonction quelconque sur  $\Gamma \times \Gamma$  telle que  $v_\Delta(\omega) = 1$  ; alors  $\Delta$  n'est pas une composante de  $(\omega) - \Delta$ , et par conséquent le cycle  $X = \Delta.[(\omega) - \Delta]$  est défini ; comme c'est un cycle sur  $\Delta$ , on a  $pr_1X = pr_2X$  ; dans ces conditions, le diviseur  $\mathfrak{k} = pr_1X = pr_2X$  s'appellera le *diviseur canonique* sur  $\Gamma$ , défini au moyen de la fonction  $\omega$ . L'étude détaillée des diviseurs canoniques sera faite au § II : pour le moment, nous n'avons besoin que du résultat partiel suivant :

PROPOSITION 10. — Tous les diviseurs canoniques sur  $\Gamma$  sont équivalents les uns aux autres.

Soient  $\omega_1, \omega_2$  deux fonctions sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telles que l'on ait

$$v_{\Delta}(\omega_1) = v_{\Delta}(\omega_2) = 1.$$

Soit, pour  $i = 1, 2$ ,  $X = \Delta.[(\omega_i) - \Delta]$ , et  $\mathfrak{k}_i = pr_i(X_i)$ . Posons

$$\varphi = \omega_2/\omega_1;$$

on a  $(\varphi) = (\omega_2) - (\omega_1)$ , d'où  $X_2 - X_1 = \Delta.(\varphi)$ , et  $\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1 = pr_1[\Delta.(\varphi)]$  ; comme d'ailleurs on a  $v_{\Delta}(\varphi) = 0$ ,  $\varphi$  induit sur  $\Delta$  une fonction qui n'est pas la constante 0. Notre conclusion suit de là, par exemple en vertu de F-VIII<sub>2</sub>, th. 7.

PROPOSITION 11. — Soit  $\mathfrak{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$ , tel que

$$l(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{a}) = 0;$$

et soit  $\mathfrak{k}$  un diviseur canonique sur  $\Gamma$ . Alors on a  $r(\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) = 0$  ; et il existe une fonction  $\varphi$  sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que l'on ait

$$(\varphi) = -\Delta - \Gamma \times \mathfrak{a} - (\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) \times \Gamma + Z$$

$Z$  étant un diviseur positif sur  $\Gamma \times \Gamma$  dont toutes les composantes sont sans point commun avec  $\Delta$  ; si de plus  $K$  est un corps par rapport auquel  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{k}$  soient rationnels, il existe une telle fonction  $\varphi$ , ayant  $K$  pour corps de définition.

Soit  $K$  tel qu'il est dit plus haut et soient  $M$  et  $N$  deux points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ . Puisqu'on a  $l(\mathfrak{a}) = 0$ , le module  $L(\mathfrak{a})$  se réduit à la constante 0 ; puisque  $r(\mathfrak{a}) = 0$ , on a, d'après la prop. 7,  $L(\mathfrak{a} + M) \neq L(\mathfrak{a})$  ; d'après la propr. 3, il existe donc dans  $L(\mathfrak{a} + M)$  une fonction  $\theta$ , autre que la constante 0, ayant  $K(M)$  pour corps de définition : alors  $(\theta)$  est de la forme

$$(\theta) = -M - \mathfrak{a} + \mathfrak{m},$$

où  $\mathfrak{m}$  est un diviseur positif, rationnel par rapport à  $K(M)$ . Soit  $\psi$  la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , définie par rapport à  $K$  par la relation

$$\theta(N) = \psi(M \times N);$$

d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 1, cor. 3, on a

$$(\psi).(M \times \Gamma) = M \times (\theta) = M \times (-M - \mathfrak{a} + \mathfrak{m}).$$

D'après F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (iii), il existe sur  $\Gamma \times \Gamma$  un diviseur positif  $Z$  et un seul, rationnel par rapport à  $K$ , sans composante de la forme  $A \times \Gamma$ , tel que l'on ait  $Z.(M \times \Gamma) = M \times \mathfrak{m}$ . On a alors

$$[(\psi) + \Delta + \Gamma \times \mathfrak{a} - Z).(M \times \Gamma) = 0 ;$$

d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (ii), il suit de là que le premier facteur du premier membre de cette relation est de la forme  $\mathfrak{b} \times \Gamma$ , où  $\mathfrak{b}$  est un diviseur sur  $\Gamma$  ; on a donc  $(\psi) = -\Delta - \Gamma \times \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \times \Gamma + Z$ . Soit  $B$  un point de  $\Gamma$ , et soit  $b$  son coefficient (nul ou non) dans  $\mathfrak{b}$  ; soit  $\tau$  une fonction sur  $\Gamma$ , telle que  $v_B(\tau) = 1$  ; soit  $\omega$  la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que l'on ait  $\omega(P \times Q) = \tau(P)$  quels que soient  $P$  et  $Q$  sur  $\Gamma$  (F-VIII<sub>1</sub>, pr. 7) ; on a alors, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th 1. cor. 4.  $(\omega) = (\tau) \times \Gamma$ . Si donc nous posons  $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} - b.(\tau)$ , et  $\psi_1 = \omega^b.\psi$ , on aura  $(\psi_1) = b.(\tau) \times \Gamma + (\psi) = -\Delta - \Gamma \times \mathfrak{a} - \mathfrak{b}_1 \times \Gamma + Z$ . Comme  $B$  n'est pas un composant de  $\mathfrak{b}_1$ ,  $B \times \Gamma$  n'est alors pas une composante de  $(\psi_1)$ , de sorte que  $\psi_1$  induit sur  $B \times \Gamma$  une fonction qui n'est pas la constante 0 (F-VIII<sub>2</sub>, th. 3) : il s'ensuit (d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 4. cor. 2. ou bien encore d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 7) que le cycle

$$pr_2[(\psi_1).(B \times \Gamma)]$$

est un diviseur équivalent à 0 sur  $\Gamma$ . Mais on a

$$(\psi_1).(B \times \Gamma) = -(B \times B) - (B \times \mathfrak{a}) + Z.(B \times \Gamma).$$

On a donc

$$-B - \mathfrak{a} + pr_2[Z.(B \times \Gamma)] \sim 0, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{a} \sim pr_2[Z.(B \times \Gamma)] - B.$$

Dans cette dernière relation, le second membre ne peut être un diviseur positif, en raison de l'hypothèse  $l(\mathfrak{a}) = 0$  et d'après la prop. 2 ; par conséquent,  $B \times B$  ne peut être un composant du cycle  $Z.(B \times \Gamma)$  : comme  $Z$  est un diviseur positif, ceci implique que le point  $B \times B$  ne peut être contenu dans aucune composante de  $Z$ . Comme  $B$  a été pris quelconque sur  $\Gamma$ , nous avons donc montré qu'aucune composante de  $Z$  ne peut avoir de point commun avec  $\Delta$ . En particulier,  $\Delta$  ne peut être une composante de  $Z$  ; on a donc  $v_\Delta(\psi) = -1$ , donc  $v_\Delta(1/\psi) = 1$  ; si donc on pose

$$X = \Delta.[(1/\psi) - \Delta],$$

le cycle  $\mathfrak{k} = pr_1 X$  est un diviseur canonique sur  $\Gamma$ , équivalent à  $\mathfrak{k}$  d'après la prop. 10. Mais on a  $X = \Delta.[\Gamma \times \mathfrak{a} + b \times \Gamma - Z]$  : on a d'ailleurs  $Z.\Delta = 0$  ; par suite  $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ . Soit  $\zeta$  une fonction sur  $\Gamma$ , telle que l'on ait  $(\zeta) = \mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{k}$  ; soit  $\eta$  la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que l'on ait (F-VIII<sub>1</sub>, pr. 7)  $\eta(P \times Q) = \zeta(P)$  quels que soient  $P$  et  $Q$  sur  $\Gamma$  ; on a donc (F-VIII<sub>2</sub>, th. 1, cor. 4)  $(\eta) = (\zeta) \times \Gamma$ . Si donc nous posons  $\varphi_1 = n\psi$ , on a

$$(\varphi_1) = -\Delta - \Gamma \times \mathfrak{a} - (\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) \times \Gamma + Z.$$

Comme alors le diviseur  $(\varphi_1)$  est rationnel par rapport à  $K$ , il existe, d'après F-VIII<sub>3</sub>, th 10, cor. 1. une fonction  $\varphi$  sur  $\Gamma \times \Gamma$ , ayant  $K$  pour corps de définition, et telle que  $(\varphi) = (\varphi_1)$  ; alors  $\varphi$  a toutes les propriétés requises par notre proposition. Il nous reste à montrer qu'on a  $r(\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) = 0$ . En effet,  $M$  et  $N$  étant comme plus haut des

points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$  ; considérons la fonction  $\lambda$  sur  $\Gamma$ , définie par rapport à  $K(N)$  par la relation

$$\lambda(M) = \varphi(M \times N).$$

On a, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 1, cor. 3.  $(\varphi).(\Gamma \times N) = (\lambda) \times N$ , d'où, en utilisant l'expression obtenue plus haut pour  $(\varphi)$ ,

$$(\lambda) = -N - (\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{z}.$$

où  $\mathfrak{z}$  est le diviseur positif défini par  $Z.(\Gamma \times N) = \mathfrak{z} \times N$ . Comme  $N \times N$  n'est contenu dans aucune composante de  $Z$ ,  $N$  n'est pas un composant de  $\mathfrak{z}$  : comme  $\mathfrak{k} - \mathfrak{a}$  est rationnel par rapport à  $K$ , et  $N$  générique sur  $\Gamma$  par rapport à  $K$ ,  $N$  n'est pas un composant de  $\mathfrak{k} - \mathfrak{a}$  ; on a donc  $v_N(\lambda) = -1$ . Par conséquent,  $\lambda$  appartient à  $L(\mathfrak{k} - \mathfrak{a} + N)$ , et non à  $L(\mathfrak{k} - \mathfrak{a})$  ; d'après la prop. 7, ceci démontre bien qu'on a  $r(\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) = 0$ .

PROPOSITION 12. — Soient  $\mathfrak{k}$  un diviseur canonique sur  $\Gamma$ , et  $\mathfrak{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$ , tel que l'on ait  $l(\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) = 0$ . Alors on a  $r(\mathfrak{a}) = 0$ .

Soit  $K$  un corps par rapport auquel  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{k}$  soient rationnels. Posons  $\rho = r(\mathfrak{k} - \mathfrak{a})$  ; soient  $M_1, \dots, M_\rho$ , des points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$  ; et posons  $\mathfrak{m} = \sum_{\nu=1}^{\rho} M_\nu$ . D'après la prop. 8, on a alors  $r(\mathfrak{k} - \mathfrak{a} + \mathfrak{m}) = l(\mathfrak{k} - \mathfrak{a} + \mathfrak{m}) = 0$ , et par conséquent, d'après la prop. 11, on a  $r(\mathfrak{a} - \mathfrak{m}) = 0$  ; puisque  $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{a} - \mathfrak{m}$ , on a donc a fortiori  $r(\mathfrak{a}) = 0$ .

6. Afin d'avoir en main tous les éléments nécessaires à la démonstration du théorème de Riemann-Roch, il nous reste encore à faire voir que, si  $\mathfrak{k}$  est un diviseur canonique, on a  $r(\mathfrak{k}) > 0$ . En tenant compte de la prop. 7, et de l'interprétation des diviseurs canoniques qui sera donnée au § II, la relation  $r(\mathfrak{k}) > 0$  équivaut à l'assertion qu'il n'existe pas sur  $\Gamma$  de différentielle ayant un pôle simple et un seul en un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $k$ . C'est là bien entendu un cas particulier du théorème des résidus (démontré pour la première fois par H. Hasse dans le cas d'un corps de base quelconque). Nous démontrerons le même résultat par voie directe, en nous appuyant sur la prop. 11.

PROPOSITION 13. — Si  $\mathfrak{k}$  est un diviseur canonique sur  $\Gamma$ , on a  $r(\mathfrak{k}) > 0$ .

Comme  $r(\mathfrak{k})$  ne dépend que de la classe de  $\mathfrak{k}$ , et que tous les diviseurs canoniques, d'après la prop. 10, appartiennent à une même classe, nous pouvons supposer, de

plus, que  $\mathfrak{k}$  est rationnel par rapport à  $k$ . Soient  $A_1, \dots, A_g$ , et  $P$   $g + 1$  points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $k$  ; posons

$$\mathfrak{a} = \sum_{\nu=1}^g A_\nu - P, \quad \text{et} \quad K = k(A_1, \dots, A_g, P).$$

On a  $\deg(-P) = -1$  et  $l(-P) = 0$ , donc  $r(-P) = g$ , et par suite, d'après la prop. 8 appliquée au diviseur  $-P$  et aux points  $A_\nu$ ,  $l(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{a}) = 0$ . D'après la prop. 11, il existe donc sur  $\Gamma \times \Gamma$  une fonction  $\varphi$ , ayant  $K$  pour corps de définition, telle que l'on ait  $(\varphi) = -\Delta - \Gamma \times \mathfrak{a} - (\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) \times \Gamma + Z$ ,  $Z$  étant un diviseur positif rationnel par rapport à  $K$ , dont les composantes sont sans point commun avec  $\Delta$ . D'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 1,  $\varphi$  a une valeur  $\varphi(M \times N)$  déterminée et finie en tout point  $M \times N$  de  $\Gamma \times \Gamma$  qui n'est contenu dans aucune composante du diviseur  $(\varphi)_\infty$ , donc a fortiori en tout point  $M \times N$  tel que  $M$  et  $N$  soient distincts l'un de l'autre et distincts de tous les composants des diviseurs  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{k}$ . Soient  $M$  et  $N$  de tels points : alors  $M \times \Gamma$  et  $\Gamma \times N$  ne sont pas des composantes de  $(\varphi)$ , et par suite  $\varphi$  induit, sur l'une et l'autre de ces courbes, des fonctions autres que la constante 0 ; de plus, d'après les remarques qui suivent dans F-VIII<sub>1</sub> la définition d'une fonction induite, ces fonctions prennent toutes deux au point  $M \times N$  la valeur  $\varphi(M \times N)$ . Autrement dit, si  $R$  est un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K(M, N)$ , et qu'on désigne d'une manière générale par  $\theta_M$  et par  $\eta_N$  les fonctions sur  $\Gamma$  respectivement définies par rapport à  $K(M, N)$ , par  $\theta_M(R) = \varphi(M \times R)$  et par  $\eta_N(R) = \varphi(R \times N)$ , on a, quand  $M$  et  $N$  sont tels qu'il a été dit,  $\theta_M(N) = \eta_N(M) = \varphi(M \times N)$ . D'autre part, il résulte de F-VIII<sub>2</sub>, th. 4, cor. 1, ou bien de F-VIII<sub>2</sub>, th. 7, que les diviseurs des fonctions  $\theta_M, \eta_N$  qu'on vient de définir sont donnés par  $(\theta_M) = -M - \mathfrak{a} + Z(M)$ ,  $(\eta_N) = -N - (\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) + Z'(N)$ , où  $Z(M)$  et  $Z(N)$  sont les diviseurs sur  $\Gamma$ , respectivement définis par  $Z.(M \times \Gamma) = M \times Z(M)$  et par  $Z.(\Gamma) = Z'(N) \times N$ .

Soient maintenant  $r$  et  $s$  des entiers quelconques ; soient  $M_1, \dots, M_r, N_1, \dots, N_s$ , des points de  $\Gamma$ , distincts les uns des autres et distincts des composants de  $\mathfrak{a}$  et de  $\mathfrak{k}$  ; soient  $\theta_i = \theta_{M_i}$  pour  $1 \leq i \leq r$ , et  $\eta_j = \eta_{N_j}$  pour  $1 \leq j \leq s$ , les fonctions sur  $\Gamma$ , respectivement définies au moyen de  $\varphi$  et des points  $M_i$  et  $N_j$  comme il a été dit ci-dessus ; on aura donc, quels que soient  $i$  et  $j$ ,

$$\theta_i(N_j) = \eta_j(M_i) = \varphi(M_i \times N_j).$$

De plus, d'après ce qu'on a vu, aucune des fonctions  $\theta_i$  et  $\eta_j$  n'est la constante 0, et l'on a, pour  $1 \leq i \leq r$ ,  $(\theta_i) = -M_i - \mathfrak{a} + Z(M_i)$ , donc  $(\theta_i) \succ -M_i - \mathfrak{a}$ . D'ailleurs, comme on a  $l(\mathfrak{a}) = 0$ , on n'a pas  $(\theta_i) \succ -\mathfrak{a}$  ; on a donc  $v_{M_i}(\theta_i) = -1$  ; l'on a d'ailleurs  $v_{M_i}(\theta_j) \geq 0$  pour  $i \neq j$ . Il suit de là que les  $\theta_i$  sont linéairement indépendants ; car, si l'on avait une relation  $\sum_i c_i \theta_i = 0$ , à coefficients constants  $c_i$  avec par exemple  $c_i \neq 0$ , on aurait

$$\theta_i = -1/c_i \cdot \sum_{j \neq i} c_j \theta_j, \quad \text{d'où} \quad v_{M_i}(\theta_i) \leq 0.$$

ce qui n'est pas le cas. Comme les  $\theta_i$  sont tous dans  $L(\mathbf{a} + \sum_i M_i)$ , et qu'on a

$$r\left(\mathbf{a} + \sum_i M_i\right) \leq r(\mathbf{a}) = 0,$$

donc  $l\left(\mathbf{a} + \sum_i M_i\right) = \deg\left(\mathbf{a} + \sum_i M_i\right) - g + 1 = r,$ ,

il suit de là que les  $\theta_i$  forment une base du module  $L(\mathbf{a} + \sum_i M_i)$ .

Posons  $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \sum_i M_i - \sum_j N_j$ , alors  $L(\mathbf{m})$  est contenu dans  $L(\mathbf{a} + \sum_i M_i)$ . Par conséquent, pour qu'une fonction sur  $\Gamma$  soit dans  $L(\mathbf{m})$ , il faut et il suffit que ce soit une combinaison linéaire des  $\theta_i$ , à coefficients constants, qui prenne la valeur 0 en chacun des points  $N_j$ . L'entier  $l(\mathbf{m})$  est donc égal au nombre de solutions linéairement indépendantes du système d'équations linéaires à  $r$  inconnues

$$\sum_i c_i \cdot \theta_i(N_j) = 0 \quad (1 \leq j \leq s);$$

on a donc  $l(\mathbf{m}) = r - s + \rho$ ,  $\rho$  étant le nombre de solutions linéairement indépendantes du système transposé

$$\sum_j t_j \cdot \theta_i(N_j) = 0 \quad (1 \leq i \leq r),$$

qui peut aussi s'écrire  $\sum_j t_j \cdot \eta_j(M_i) = 0$  ( $1 \leq i \leq r$ ). Comme d'ailleurs on a  $\deg(\mathbf{m}) = g - 1 + r - s$ , il s'ensuit qu'on a  $r(\mathbf{m}) = \rho$ . On conclut de là, en particulier, que, si le système

$$\sum_j t_j \cdot \eta_j(M_i) = 0 \quad (1 \leq i \leq r)$$

possède au moins une solution  $(t_1, \dots, t_s)$  non nulle, on a  $r(\mathbf{m}) > 0$ . Nous allons maintenant faire voir qu'il en est bien ainsi pour un certain choix des points  $M_i, N_j$ , pour lequel on a en même temps  $\mathbf{m} \sim \mathfrak{k}$ ; il suivra de là qu'on a  $r(\mathfrak{k}) = r(\mathbf{m}) > 0$ , ce qui démontrera notre proposition.

Pour cela, nous prendrons  $s = 2$ , et nous prendrons pour  $N_1$  et  $N_2$  deux points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ . Les fonctions  $\eta_j = \eta_{N_j}$  pour  $j = 1, 2$ , étant définies comme plus haut, soit  $t$  une quantité variable sur le corps  $K(N_1, N_2)$ , et posons  $\eta = \eta_1 - t\eta_2$ . On a, d'après ce qui a été démontré plus haut,

$$(\eta_j) = -N_j - (\mathfrak{k} - \mathbf{a}) + Z'(N_j), \quad \text{d'où } (\eta) \succ -N_1 - N_2 - (\mathfrak{k} - \mathbf{a}).$$



Par conséquent, le diviseur  $(\eta) + N_1 + N_2 + (\mathfrak{k} - \mathfrak{a})$  est un diviseur positif, qui peut donc être mis sous la forme  $\sum_i M_i$ , où les  $M_i$  sont des points de  $\Gamma$ , distincts ou non.

On a alors

$$\mathfrak{a} + \sum_i M_i - N_1 - N_2 = (\eta) + \mathfrak{k} \sim \mathfrak{k}.$$

Si donc nous montrons que les  $M_i$  sont distincts les uns des autres, distincts de  $N_1$  et  $N_2$ , et distincts des composants de  $\mathfrak{a}$  et de  $\mathfrak{k}$ , notre démonstration sera achevée. Pour cela, posons  $\omega = \eta_1/\eta_2$  ; on a

$$\eta = (\omega - t)\eta_2, \quad \text{donc} \quad (\eta) = (\omega - t) + (\eta_2),$$

et par suite, d'après les formules écrites plus haut.

$$\sum_i M_i = (\omega - t) + N_1 + Z'(N_2).$$

Mais, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 6. on a  $(\omega - t)_\infty = (\omega)_\infty$  ; d'autre part, on a  $(\omega) = (\eta_1) - (\eta_2) = N_2 + Z'(N_1) - N_1 - Z'(N_2)$  ; on va déduire de là que l'on a  $N_1 + Z'(N_2) = (\omega)_\infty = (\omega - t)_\infty$ , ce qui donnera

$$\sum_i M_i = (\omega - t)_0.$$

En effet, puisque  $N_1 \times N_1$  n'est contenu dans aucune composante de  $Z$ , il résulte de la définition de  $Z'(N_1)$  que  $N_1$  n'est pas un composant de  $Z'(N_1)$  ; de même,  $N_2$  n'est pas un composant de  $Z'(N_2)$ . D'autre part,  $Z'(N_1)$  et  $Z'(N_2)$  ne peuvent avoir de composant commun ; supposons en effet que  $R$  soit un composant de  $Z'(N_1)$  et de  $Z'(N_2)$  ; alors, en vertu de F-VII<sub>6</sub>, th. 12, le lieu de  $R \times N_1$ , par rapport à  $\bar{K}$ , sur  $\Gamma \times \Gamma$  sera une composante de  $Z$  ; comme  $Z$  ne peut avoir de composante de la forme  $R \times \Gamma$ , il s'ensuit que  $R$  n'est pas algébrique sur  $K$ , et que  $N_1$  est algébrique sur  $K(R)$  ; de même,  $N_2$  devra être algébrique sur  $K(R)$  : le corps  $K(N_1, N_2)$  sera donc algébrique sur  $K(R)$ , contrairement à la définition de  $N_1, N_2$ , en vertu de laquelle il a la dimension 2 sur  $K$ .

Nous avons ainsi démontré que les diviseurs

$$N_2 + Z'(N_1) \quad \text{et} \quad N_1 + Z'(N_2)$$

n'ont pas de composant commun ; comme la différence de ces diviseurs est  $(\omega)$ , ces diviseurs sont donc égaux respectivement à  $(\omega)_0$ , et à  $(\omega)_\infty$ . On a donc bien  $N_2 + Z'(N_1) = (\omega)_\infty = (\omega - t)_\infty$ , d'où, d'après ce qui a été trouvé plus haut,

$$\sum_i M_i = (\omega - t) + (\omega - t)_\infty = (\omega - t)_0.$$

Mais soit  $\Lambda$  le graphe de la fonction  $\omega$  ; soit  $\Lambda_t$  celui de  $\omega - t$ . Si  $(u)$  est un point générique de la droite projective  $D$  par rapport à  $K(t)$ , il y a une correspondance birationnelle partout birégulière (une “translation”) dans laquelle  $(u)$  et  $(u + t)$  sont des points génériques correspondants de  $D$  par rapport à  $K(t)$  ; cette translation détermine une correspondance birationnelle partout birégulière entre la variété  $\Gamma \times D$  et elle-même, qui transforme les courbes  $\Lambda_i$  et  $\Gamma \times (0)$  en  $\Lambda$  et en  $\Gamma \times (t)$ , respectivement. Il s’ensuit qu’on a  $(\omega - t)_0 = (\omega)_t$  : l’on a d’ailleurs, par définition,  $\Lambda.[\Gamma \times (t)] = (\omega)_t \times (t)$ . On a donc

$$\Lambda.[\Gamma \times (t)] = \sum_i M_i \times (t).$$

Mais  $K(N_1, N_2)$  est un corps de définition pour  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , donc pour  $\omega$ , donc aussi pour  $\Lambda$  ; alors F-VI<sub>3</sub>, th. 12, montre que chacun des points  $M_i \times (t)$  est un point générique de  $\Lambda$  par rapport à  $K(N_1, N_2)$  ; chacun des points  $M_i$  est donc un point générique, par rapport à  $K(N_1, N_2)$ , de la projection  $\Gamma$  de  $\Lambda$  sur  $\Gamma$  : ceci implique qu’ils sont distincts de  $N_1$ , de  $N_2$ , et de tous les composants de  $\mathfrak{a}$  et de  $\mathfrak{k}$ , puisque ces derniers points sont tous algébriques sur  $K$ . Enfin, encore d’après F-VI<sub>3</sub>, th. 12, il y a un entier  $p^f$  tel que, parmi les  $M_i$ , il y en ait exactement  $p^f$  qui coïncident avec l’un quelconque d’entre eux ; et cet entier  $p^f$  divise le coefficient, dans le cycle  $\Lambda.[\Gamma \times (\infty)]$  de chacun des composants de ce cycle, qui n’est autre que

$$(\omega)_\infty \times (\infty) = [N_1 + Z'(N_2)] \times (\infty) ;$$

mais  $N_1$ , n’étant pas algébrique sur  $K(N_2)$ , n’est pas un composant de  $Z'(N_2)$ , de sorte que, dans ce cycle, le point  $N_1 \times (\infty)$  a le coefficient 1. On a donc  $p^f = 1$ , c’est-à-dire que tous les  $M_i$  sont distincts les uns des autres. Ceci achève notre démonstration.

7. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de Riemann-Roch :

**THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH.** — Soient  $\mathfrak{k}$  un diviseur canonique, et  $\mathfrak{a}$  un diviseur quelconque, sur la courbe  $\Gamma$  de genre  $g$ . Alors on a

$$l(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) - g + 1 + r(\mathfrak{a}), \quad r(\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{k} - \mathfrak{a}).$$

Nous avons à montrer que la relation  $l(\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) = \rho$  entraîne  $r(\mathfrak{a}) = \rho$ . C’est ce que nous ferons par récurrence sur  $\rho$ . Pour  $\rho = 0$ , notre assertion est contenue dans la prop. 12. Soit donc  $\rho > 0$ . Alors, d’après la prop. 2, il y a un diviseur positif  $\mathfrak{a}$  tel que  $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{k} - \mathfrak{a}$ , d’où

$$l(\mathfrak{b}) = l(\mathfrak{k} - \mathfrak{a}) = \rho, \quad \mathfrak{a} \sim \mathfrak{k} - \mathfrak{b}, \quad r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{k} - \mathfrak{b}).$$

Comme on a  $\mathfrak{k} - \mathfrak{b} \prec \mathfrak{k}$ , on a  $r(\mathfrak{k} - \mathfrak{b}) \geq r(\mathfrak{k})$ , donc, d’après la prop. 13,  $r(\mathfrak{k} - \mathfrak{b}) > 0$ . Soient  $K$  un corps par rapport auquel  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{k}$  soient rationnels, et  $M$  un point

générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$  ; d'après la prop. 9, on a  $l(\mathfrak{b} - M) = l(\mathfrak{b}) - 1 = \rho - 1$ , donc, d'après l'hypothèse de récurrence,  $r(\mathfrak{k} - \mathfrak{b} + M) = \rho - 1$ . D'autre part, d'après la prop. 8, on a  $r(\mathfrak{k} - \mathfrak{b} + M) = r(\mathfrak{k} - \mathfrak{b}) - 1$ . La comparaison de ces résultats donne bien  $r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{k} - \mathfrak{b}) = \rho$ .

COROLLAIRE. — Si  $\mathfrak{k}$  est un diviseur canonique, on a

$$\deg(\mathfrak{k}) = 2g - 2, \quad l(\mathfrak{k}) = g, \quad \text{et} \quad r(\mathfrak{k}) = 1.$$

En effet, si, dans le théorème de Riemann-Roch, on fait  $\mathfrak{a} = 0$ , on obtient  $l(\mathfrak{k}) = g$  ; si on y fait  $\mathfrak{a} = \mathfrak{k}$ , on obtient  $r(\mathfrak{k}) = l(0) = 1$ , et  $l(\mathfrak{k}) = \deg(\mathfrak{k}) - g + 2$ .

Observons pour terminer qu'il résulte du théorème de Riemann-Roch, ou même simplement de la définition du genre  $g$  que, si  $g = 0$  et si  $\mathfrak{m}$  est un diviseur quelconque de degré 0, on a

$$l(-\mathfrak{m}) = 1$$

donc qu'il existe une fonction  $\varphi$ , autre que 0, telle que  $(\varphi) \succ \mathfrak{m}$  ; comme d'ailleurs on a  $\deg(\varphi) = 0$ , ceci implique que  $(\varphi) = \mathfrak{m}$ . Autrement dit, quand le genre  $g$  a la valeur 0 (et, comme il est facile de le voir, seulement dans ce cas), les relations  $\deg(\mathfrak{m}) = 0$  et  $\mathfrak{m} \sim 0$  sont équivalentes.

## § II. Les différentielles sur une courbe.

8. En vertu de F-VIII<sub>2</sub>, th. 6, les fonctions  $\theta$  sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telles que  $v_{\Delta}(\theta) > 0$ , forment un groupe additif  $\mathcal{D}_1$ , dont les fonctions  $\theta$ , telles que  $v_{\Delta}(\theta) > 1$ , forment un sous-groupe  $\mathcal{D}_2$  ; le groupe quotient  $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$  s'appellera par définition le *groupe additif des différentielles sur  $\Gamma$* , et ses éléments, c'est-à-dire les classes de  $\mathcal{D}_1$  suivant  $\mathcal{D}_2$ , s'appelleront les *différentielles sur  $\Gamma$* . Si  $\theta$  est une fonction dans  $\mathcal{D}_1$ , la classe suivant  $\mathcal{D}_2$  à laquelle appartient  $\theta$  dans  $\mathcal{D}_1$  sera appelée la différentielle sur  $\Gamma$  *déterminée par  $\theta$* , et sera notée  $\{\theta\}$  : on écrira 0 pour la différentielle  $\mathcal{D}_2 = \{0\}$ . On dira qu'un corps  $K$  est un *corps de définition* pour une différentielle  $\omega$  sur  $\Gamma$ , s'il existe une fonction  $\theta$  dans  $\mathcal{D}_1$  ayant  $K$  pour corps de définition, et telle que  $\omega = \{\theta\}$ .

Nous allons vérifier maintenant, au moyen d'un raisonnement bien connu, que le groupe  $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ , des différentielles sur  $\Gamma$  est isomorphe au groupe additif des fonctions sur  $\Delta$ , donc aussi (cf. § 1. n° 5) au groupe additif des fonctions sur  $\Gamma$  et peut donc être considéré comme module de rang 1 sur le corps abstrait des fonctions sur  $\Gamma$ . Soient en effet  $\theta$  et  $\psi$  deux fonctions sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telles que  $v_{\Delta}(\theta) > 0$  et  $v_{\Delta}(\psi) \geq 0$ , d'où  $v_{\Delta}(\psi\theta) > 0$ . D'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 1,  $\psi$  induit sur  $\Delta$  une fonction  $\psi_{\Delta}$  ; soit  $\varphi$  la fonction correspondante sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire la fonction sur  $\Gamma$ , telle que l'on ait  $\varphi(P) = \psi_{\Delta}(P \times P)$  quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$ . Dans ces conditions, nous allons montrer

que la différentielle  $\{\psi\theta\}$  ne dépend que de  $\{\theta\}$  et de  $\varphi$ . Si en effet  $\theta_1$  est une fonction dans  $\mathcal{D}_1$ , déterminant la même différentielle que  $\theta$ , et  $\psi_1$  une fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , induisant sur  $\Delta$  la même fonction que  $\psi$ ,  $\theta_1 - \theta$  est dans  $\mathcal{D}_2$ , de sorte qu'on a  $v_\Delta(\theta_1 - \theta) > 1$ , et  $\psi_1 - \psi$  induit sur  $\Delta$  la constante 0, de sorte qu'on a (F-VIII<sub>2</sub>, th. 1)  $v_\Delta(\psi_1 - \psi) > 0$  ; comme on a d'autre part  $\psi_1\theta_1 - \psi\theta = \psi_1(\theta_1 - \theta) + \theta(\psi_1 - \psi)$ , il suit de là, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 6, que l'on a  $v_\Delta(\psi_1\theta_1 - \psi\theta) > 1$ , donc  $\{\psi_1\theta_1\} = \{\psi\theta\}$ . Réciproquement, soient  $\{\theta\}$  une différentielle sur  $\Gamma$ , déterminée par une fonction  $\theta$  de  $\mathcal{D}_1$  et  $\varphi$  une fonction quelconque sur  $\Gamma$  ; soit  $\bar{\varphi}$  la fonction sur  $\Delta$ , correspondant à  $\varphi$ , c'est-à-dire telle que l'on ait  $\bar{\varphi}(P \times P) = \varphi(P)$  quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$  : il existe des fonctions  $\psi$  sur  $\Gamma \times \Gamma$ , induisant sur  $\Delta$  la fonction  $\bar{\varphi}$ , car on peut prendre par exemple pour  $\psi$ , d'après F-VIII<sub>1</sub>, pr. 7, la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$  qui est telle que l'on ait, quels que soient  $P$  et  $Q$  sur  $\Gamma$ ,  $\psi(P \times Q) = \varphi(P)$ . Dans ces conditions, il existe une différentielle  $\{\psi\theta\}$  sur  $\Gamma$ , qui ne dépend, comme nous l'avons fait voir, que de  $\varphi$  et de  $\{\theta\}$  ; de plus, il résulte de notre construction que, si  $K$  est un corps de définition à la fois pour  $\varphi$  et pour la différentielle  $\{\theta\}$ , c'en est un aussi pour la différentielle  $\{\psi\theta\}$  ; alors, si  $\omega$  désigne la différentielle  $\{\theta\}$ , nous noterons, par e définition,  $\varphi.\omega$  la différentielle  $\{\psi\theta\}$ . Comme, avec ces notations, on a  $v_\Delta(\psi\theta) = v_\Delta(\psi) + v_\Delta(\theta)$ , on ne peut avoir  $\varphi.\omega = 0$  que si l'on a  $\varphi = 0$  ou  $\omega = 0$ . Il est clair que le "produit"  $\varphi.\omega$  est distributif par rapport au premier et au second facteur ; il résulte aussi des définitions ci-dessus que, si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux fonctions sur  $\Gamma$ , et  $\omega$  une différentielle sur  $\Gamma$ , on a

$$\varphi_1.(\varphi_2.\omega) = (\varphi_1\varphi_2).\omega.$$

Nous avons donc bien défini le groupe additif des différentielles sur  $\Gamma$  comme module sur le corps abstrait des fonctions sur  $\Gamma$ . De plus, ce module est de rang 1 ; soient en effet  $\omega$  et  $\omega_1$  des différentielles sur  $\Gamma$ , déterminées respectivement par des fonctions  $\theta$  et  $\theta_1$  de  $\mathcal{D}_1$  ; et supposons qu'on ait  $\omega \neq 0$ , donc  $v_\Delta(\theta) = 1$ . Alors, si nous posons  $\psi = \theta_1/\theta$ , on aura  $v_\Delta(\psi) \geq 0$ , donc par définition  $\omega_1 = \varphi.\omega$  si  $\varphi$  est la fonction sur  $\Gamma$ , correspondant à la fonction induite par  $\psi$  sur  $\Delta$ .

De plus, dans ces conditions, la fonction  $\varphi$  est déterminée d'une manière unique par la relation  $\omega_1 = \varphi.\omega$  ; si en effet  $\varphi'$  est une fonction ayant la même propriété, on a  $(\varphi' - \varphi).\omega = 0$ , donc  $\varphi' = \varphi$  puisque  $\omega \neq 0$  : on écrira alors  $\varphi = \omega_1/\omega$ . Il résulte de plus de ce calcul, et de nos définitions, que, si  $K$  est un corps de définition commun pour les différentielles  $\omega$  et  $\omega_1$ , c'en est un aussi pour la fonction  $\varphi = \omega_1/\omega$ . Comme nous avons déjà vu que, si  $K$  est un corps de définition commun pour  $\varphi$  et  $\omega$ , c'en est un aussi pour  $\varphi.\omega$ , il s'ensuit que, si  $K$  est un corps de définition pour une différentielle  $\omega \neq 0$ , les différentielles sur  $\Gamma$  qui ont  $K$  pour corps de définition sont celles qui sont de la forme  $\varphi.\omega$  où  $\varphi$  est une fonction sur  $\Gamma$  ayant  $K$  pour corps de définition, et celles-là seulement.

9. Soit  $\theta$  une fonction de  $\mathcal{D}_1$ , déterminant une différentielle autre que 0 ; alors on a  $v_\Delta(\theta) = 1$ , et par suite, d'après les définitions du § 1, n° 5,  $\theta$  détermine un diviseur

canonique  $\mathfrak{k}$  sur  $\Gamma$  au moyen des relations  $X = \Delta.[(\theta) - \Delta].\mathfrak{k} = pr_1X$ . On va voir maintenant que ce diviseur  $\mathfrak{k}$  ne dépend que de la différentielle  $\{\theta\}$ . Ce résultat est inclus dans la proposition suivante, qui n'est d'ailleurs qu'une forme plus précise de la prop. 10 du § 1 (n° 5) :

PROPOSITION 14. — Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux différentielles sur  $\Gamma$ , autres que 0 ; et soit  $\varphi = \omega_2/\omega_1$ . Soit  $\theta_i$ , pour  $i = 1, 2$ , une fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que l'on ait  $\omega_i = \{\theta_i\}$  ; posons

$$X_i = \Delta.[(\theta_i) - \Delta], \quad \text{et} \quad \mathfrak{k}_i = pr_1(X_i).$$

Alors on a  $\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1 = (\varphi)$ .

Posons  $\psi = \theta_2/\theta_1$  ; on a  $v_\Delta(\theta_1) = v_\Delta(\theta_2) = 1$ , donc  $v_\Delta(\psi) = 0$ , de sorte que  $\psi$  induit sur  $\Delta$  une fonction  $\psi_\Delta$  ; si donc  $\varphi'$  est la fonction correspondante sur  $\Gamma$ , on a  $\omega_2 = \varphi'.\omega_1$ , donc  $\varphi' = \omega_2/\omega_1 = \varphi$ . Les fonctions  $\varphi$  sur  $\Gamma$ , et  $\psi_\Delta$  sur  $\Delta$ , se correspondent donc l'une à l'autre, c'est-à-dire qu'on a, quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$ ,  $\varphi(P) = \psi_\Delta(P \times P)$  : ceci implique qu'on a  $(\varphi) = pr_1[(\psi_\Delta)]$ . D'autre part, on a

$$X_2 = \Delta.[(\psi\theta_1) - \Delta] = \Delta.[(\psi) + (\theta_1) - \Delta] = \Delta.(\psi) + X_1;$$

on a donc  $\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1 = pr_1[\Delta.(\psi)]$  ; comme on a, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 4, cor. 1.,  $\Delta.(\psi) = (\psi_\Delta)$ , ceci achève la démonstration.

Les notations restant les mêmes que dans la prop. 14, prenons en particulier  $\omega_2 = \omega_1$  ; alors on a  $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}_1$  ; notre proposition montre donc bien que  $\mathfrak{k}_1$  ne dépend que de  $\omega_1$ , et non du choix de  $\theta_1$ .

Soit alors  $\omega$  une différentielle sur  $\Gamma$ , autre que 0 ; soit  $\theta$  une fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$  telle que l'on ait  $\omega = \{\theta\}$  ; alors le diviseur canonique  $\mathfrak{k}$  défini par les relations  $X = \Delta.[(\theta) - \Delta]$ ,  $\mathfrak{k} = pr_1X$ , diviseur qui ne dépend que de  $\omega$  d'après ce qui précède, s'appellera le diviseur de la différentielle  $\omega$ , et se notera  $(\omega)$  : si de plus  $P$  est un point quelconque sur  $\Gamma$ , on désignera par  $v_P(\omega)$  le coefficient de  $P$  dans  $(\omega)$ . La prop. 14 montre que, si  $\omega$  est une différentielle, et  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma$ , et si l'on a  $\omega \neq 0, \varphi \neq 0$ , on a  $(\varphi.\omega) = (\varphi) + (\omega)$ . Il résulte de plus de notre définition que, si  $K$  est un corps de définition pour  $\omega$ , le diviseur  $(\omega)$  est rationnel par rapport à  $K$ .

10. Soit  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma$ . Il y a, d'après F. VIII<sub>1</sub>, pr. 7, une fonction  $\varphi_1$  et une seule sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que l'on ait  $\varphi_1(P \times Q) = \varphi(P)$  quels que soient  $P$  et  $Q$  sur  $\Gamma$  : il y a de même une fonction  $\varphi_2$  et une seule sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que l'on ait  $\varphi_2(P \times Q) = \varphi(Q)$  quels que soient  $P$  et  $Q$  sur  $\Gamma$  ; la fonction  $\varphi_2 - \varphi_1$  sur  $\Gamma \times \Gamma$  sera, dans ce qui suit, désignée une fois pour toutes par  $\varphi_\partial$ . On a donc  $\varphi_\partial(P \times Q) = \varphi(Q) - \varphi(P)$  chaque fois que  $P$  et  $Q$  sont deux points sur  $\Gamma$  tels que  $\varphi(P) \neq \infty, \varphi(Q) \neq \infty$ . Si  $K$  est un

corps de définition pour  $\varphi$ , et que  $M$  et  $N$  soient deux points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ ,  $\varphi_\partial$  est la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$  définie par rapport à  $K$  par la relation  $\varphi_\partial(M \times N) = \varphi(N) - \varphi(M)$  ; on a alors, d'autre part,  $\varphi_\partial(M \times M) = 0$ , c'est-à-dire que  $\varphi_\partial$  induit sur  $\Delta$  la constante 0. On a donc, quelle que soit la fonction  $\varphi$  sur  $\Gamma$ ,  $v_\Delta(\varphi_\partial) > 0$  : par suite,  $\varphi_\partial$  détermine une différentielle  $\{\varphi_\partial\}$  sur  $\Gamma$  : celle-ci s'appellera, par définition, la *différentielle de  $\varphi$* , et se notera  $d\varphi$ . Il s'ensuit que, si  $K$  est un corps de définition pour  $\varphi$ , c'en est un aussi pour  $d\varphi$ .

Si  $\varphi$  est une constante, on a, d'après ces définitions,  $\varphi_\partial = 0$ , donc  $d\varphi = 0$ . Pour faire voir qu'il existe des fonctions  $\varphi$  telles que  $d\varphi \neq 0$ , nous introduirons la définition suivante. Soient  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma$ , et  $P$  un point de  $\Gamma$  ; posons  $c = \varphi(P)$  ; on dira que  $\varphi$  est une *uniformisante* pour  $\Gamma$  au point  $P$  si l'on a  $c \neq \infty$  et  $v_P(\varphi - c) = 1$ . L'existence d'uniformisantes pour tout point de  $\Gamma$  résulte par exemple de F-VIII<sub>2</sub>, th. 9. Il est clair qu'une constante n'est uniformisante en aucun point.

PROPOSITION 15. — Soient  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma$ , et  $P$  un point de  $\Gamma$ . Alors, pour que  $\varphi$  soit uniformisante en  $P$ , il faut et il suffit que l'on ait  $\varphi(P) \neq \infty$ ,  $d\varphi \neq 0$ , et  $v_P(d\varphi) = 0$ .

Si l'on a  $\varphi(P) = \infty$ , ou bien si  $\varphi$  est constante,  $\varphi$  n'est pas uniformisante en  $P$ , et les conditions ci-dessus ne sont pas satisfaites ; nous avons donc le droit de supposer que  $\varphi$  n'est pas constante et a une valeur finie en  $P$ . Soient  $K$  un corps de définition pour  $\varphi$  et  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K(P)$  : alors  $P \times M$  est un point générique de  $P \times \Gamma$  par rapport à  $K(P)$ . D'après le lemme du § 1, n° 1, puisque  $\varphi$  n'est pas constante,  $\varphi(M)$  est une quantité variable sur le corps  $K(P)$  : on a donc  $\varphi(M) \neq \varphi(P)$ , donc

$$\varphi_\partial(P \times M) = \varphi(M) - \varphi(P) \neq 0,$$

c'est-à-dire que  $\varphi_\partial$  induit sur  $P \times \Gamma$  une fonction qui n'est pas la constante 0. Soit  $\psi$  la fonction sur  $\Gamma$ , définie par rapport à  $K(P)$  par la relation  $\psi(M) = \varphi(M) - \varphi(P)$  ; on a alors, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 7,  $(\psi) = pr_2[(\varphi_\partial).(P \times \Gamma)]$  ; comme d'ailleurs le cycle  $(\varphi_\partial).(P \times \Gamma)$  est contenu dans  $P \times \Gamma$ , donc de la forme  $P \times \mathfrak{a}$ , on a

$$(\varphi_\partial).(P \times \Gamma) = P \times (\psi).$$

Mais, pour que  $\varphi$  soit uniformisante en  $P$ , il faut et il suffit, par définition, que  $P$  ait le coefficient 1 dans le diviseur  $(\psi)$  : donc, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le point  $P \times P$  ait le coefficient 1 dans le cycle  $(\varphi_\partial).(P \times \Gamma)$ . Soit  $a$  le coefficient de  $P \times P$  dans  $(\varphi_\partial).(P \times \Gamma)$  ; posons  $b = v_\Delta(\varphi_\partial)$ , et  $X = (\varphi_\partial) - b.\Delta$  ; et soient  $c$  et  $c'$  les coefficients de  $P \times P$  dans  $X.(P \times \Gamma)$  et dans  $X.\Delta$ , respectivement : on a alors  $a = b + c$ , et  $b > 0$ . De plus, comme la fonction  $\varphi_\partial$  est définie et a la valeur 0 en  $P \times P$ , ce point n'est contenu (d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 1) dans aucune composante du diviseur  $(\varphi_\partial)_\infty$  ; on a donc  $c \geq 0, c' \geq 0$  ; et l'on a  $c = c' = 0$  si

$P \times P$  n'est contenu dans aucune composante de  $X$ , et  $c > 0, c' > 0$  dans le cas contraire. Cela posé, pour que  $\varphi$  soit uniformisante en  $P$ , il faut et il suffit, d'après ce qui précède, qu'on ait  $b + c = 1$ , donc qu'on ait  $b = 1$  et  $c = 0$ , c'est-à-dire qu'on ait  $v_\Delta(\varphi_\partial) = 1$  et  $c' = 0$ , ou encore qu'on ait  $d\varphi \neq 0$  et que le point  $P \times P$  ne soit pas un composant du cycle  $X.\Delta = \Delta.[(\varphi_\partial) - \Delta]$ . C'est bien ce qu'il fallait démontrer.

Observons que, si le corps de base est de caractéristique 0, la relation  $\varphi(P) = \infty$  entraîne  $v_P(d\varphi) < 0$ , de sorte qu'en ce cas la première condition de l'énoncé ci-dessus est superflue : il n'en est pas de même si la caractéristique  $p$  n'est pas nulle.

11. On peut maintenant énoncer les principales propriétés de l'opération  $d\varphi$  comme suit :

THÉORÈME. — Sur la courbe  $\Gamma$  il existe des fonctions  $\varphi$  telles que  $d\varphi \neq 0$ . Si  $c$  est une constante, on a  $d(c) = 0$ . Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions quelconques sur  $\Gamma$ , on a

$$d(\varphi + \psi) = d\varphi + d\psi \quad \text{et} \quad d(\varphi\psi) = \varphi.d\psi + \psi.d\varphi.$$

Il ne nous reste en effet à démontrer que la dernière formule. Pour cela, soit  $K$  un corps commun de définition pour  $\varphi$  et  $\psi$ , et soient  $M$  et  $N$  deux points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ . Posons  $\theta = (\varphi\psi)_\partial$  ; on a alors  $d(\varphi\psi) = \{\theta\}$ , et  $\theta$  est la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , définie par rapport à  $K$  par

$$\theta(M \times N) = \varphi(N)\psi(N) - \varphi(M)\psi(M).$$

Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les fonctions sur  $\Gamma \times \Gamma$ , respectivement définies par rapport à  $K$  par

$$\theta_1(M \times N) = \varphi(N).\psi_\partial(M \times N) \quad \text{et} \quad \theta_2(M \times N) = \psi(M).\varphi_\partial(M \times N);$$

on a  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ , et il résulte immédiatement des définitions qu'on a  $\{\theta_1\} = \varphi.\{\psi_\partial\} = \varphi.d\psi$ , et  $\{\theta_2\} = \psi.\{\varphi_\partial\} = \psi.d\varphi$ .

COROLLAIRE. — Soient  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma$ , et  $K$  un corps de définition pour  $\varphi$ . Alors, pour qu'on ait  $d\varphi \neq 0$ , il faut et il suffit que le corps abstrait  $\Omega_K$  des fonctions sur  $\Gamma$  ayant  $K$  pour corps de définition soit une extension algébrique séparable de  $K(\varphi)$ . De plus, s'il en est ainsi, et qu'on pose, pour  $\psi \in \Omega_K$ ,  $D\psi = d\psi/d\varphi$ , l'opérateur  $D$  est la dérivation dans  $\Omega_K$ , s'annulant sur  $K$ , et telle que  $D\varphi = 1$ .

Soit  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$  ; alors  $K(M)$  est une extension régulière de  $K$  (F-17, et F-IV<sub>1</sub>), et est donc séparablement engendré, et de dimension 1 sur  $K$  ; par suite, d'après F-I<sub>5</sub>, pr. 16, il existe dans  $K(M)$  une dérivation non triviale, s'annulant sur  $K$ , et, à un facteur près, il n'en existe qu'une. En vertu de

l'isomorphisme entre  $K(M)$  et  $\Omega_K$  dont la définition a été rappelée au § 1, n° 1, le corps abstrait  $\Omega_K$  a donc les mêmes propriétés. Soit  $\varphi$  une fonction appartenant à  $\Omega_K$ , et telle que  $d\varphi \neq 0$  : alors  $K$  est un corps de définition pour  $d\varphi$ , et aussi pour de  $d\psi$  si  $\psi \in \Omega_K$  de sorte que

$$D\psi = d\psi/d\varphi$$

est alors dans  $\Omega_K$ . Il résulte alors de notre théorème que  $D$  est une dérivation dans  $\Omega_K$ , s'annulant sur  $K$ , et telle que  $D\varphi = 1$ . Comme toute autre dérivation dans  $\Omega_K$ , s'annulant sur  $K$ , doit alors, à un facteur près, coïncider avec  $D$ , il s'ensuit qu'une telle dérivation ne peut s'annuler sur  $K(\varphi)$  ; donc, d'après F-15, th. 1,  $\Omega_K$  est alors séparablement algébrique sur  $K(\varphi)$ . Supposons maintenant que  $\varphi_1$  soit dans  $\Omega_K$ , et telle que l'on ait  $d\varphi_1 = 0$  ; alors on a  $D\varphi_1 = 0$ , et par conséquent la dérivation  $D$  s'annule sur  $K(\varphi_1)$  ; en vertu de F-I5, th. 1, il s'ensuit qu'alors  $\Omega_K$  n'est pas séparablement algébrique sur  $K(\varphi_1)$ .

Donnons, pour terminer, l'interprétation, au moyen des différentielles, de l'entier  $r(\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{k} - \mathfrak{a})$  qui apparaît dans le théorème de Riemann-Roch. Soit  $\omega$  une différentielle sur  $\Gamma$ , autre que 0 ; posons  $\mathfrak{k} = (\omega)$  ; c'est là, comme on a vu, un diviseur canonique. Toute différentielle  $\eta$  sur  $\Gamma$  est alors de la forme  $\eta = \varphi.\omega$  où  $\varphi$  est une fonction sur  $\Gamma$ , et on a  $(\eta) = (\varphi) + \mathfrak{k}$ . Si donc  $\mathfrak{a}$  est un diviseur sur  $\Gamma$ , il faut et il suffit, pour qu'on ait  $(\eta) \succ \mathfrak{a}$ , qu'on ait  $\varphi \in L(\mathfrak{k} - \mathfrak{a})$ . L'ensemble des différentielles  $\eta$ , telles qu'on ait  $(\eta) \succ \mathfrak{a}$ , est donc un module sur le corps des constantes, de rang égal à  $l(\mathfrak{k} - \mathfrak{a})$ .

En particulier, on appelle différentielle de première espèce sur  $\Gamma$  toute différentielle  $\eta$  telle que  $(\eta) \succ 0$ . Il résulte de ce qui précède, et du corollaire du théorème de Riemann-Roch, que les différentielles de première espèce sur  $\Gamma$  forment un module de rang  $g$  sur le corps des constantes. De plus, d'après la prop. 5, ce module possède une base formée de  $g$  différentielles ayant  $k$  pour corps de définition.



DEUXIÈME PARTIE  
THÉORIE ÉLÉMENTAIRE  
DES CORRESPONDANCES SUR UNE COURBE

Nous abordons maintenant la théorie des correspondances. Des résultats de la 1<sup>re</sup> partie, il n'est nécessaire de retenir ici que la définition des diviseurs canoniques (1<sup>re</sup> partie, § 1, n<sup>o</sup> 5), et le théorème de Riemann-Roch ; ces résultats ne nous serviront d'ailleurs qu'à partir du § II, le § I dépendant seulement de la théorie générale des intersections.

Comme on le reconnaîtra sans peine, le présent mémoire est directement inspiré des travaux de Castelnuovo et Severi sur le même sujet. Avec Severi, nous entendons par une correspondance sur la courbe  $\Gamma$  un diviseur sur la surface  $\Gamma \times \Gamma$ . Au § I, nous définissons, pour les correspondances, une notion d'équivalence, et l'opération du produit de composition : les classes de correspondances se trouvent ainsi former un anneau, sur lequel on définit une fonction linéaire  $\sigma(\xi)$ , à valeurs entières rationnelles, possédant les propriétés formelles d'une trace. Le § II est consacré à l'étude de cette fonction. Les §§ suivants donnent des applications des résultats du § II, en particulier à la théorie des courbes définies sur un corps de base à un nombre fini d'éléments : dans le § IV se trouvent établies les propriétés élémentaires de la fonction zêta d'une telle courbe (y compris l'hypothèse de Riemann pour cette fonction), et le § V donne les résultats correspondants pour les fonctions  $L$ , abéliennes ou non abéliennes.

§ I. L'anneau des correspondances.

1. Les conventions et définitions restent celles de la 1<sup>re</sup> partie, c'est-à-dire que nous supposons donnés une fois pour toutes une courbe complète  $\Gamma$  sans point multiple, et un corps de définition pour  $\Gamma$ , le corps de base  $k$ . Rappelons que tout corps est supposé implicitement contenir le corps de base.

Notre objet est de faire l'étude des diviseurs sur la variété  $\Gamma \times \Gamma$  produit de la courbe  $\Gamma$  par elle-même ; c'est là une variété de dimension 2 (une "surface") complète et sans point multiple, définie sur le corps  $k$ . Par une *correspondance* appartenant à  $\Gamma$  (ou, comme on dit aussi, une correspondance sur  $\Gamma$ ), on entend un diviseur sur  $\Gamma \times \Gamma$ .

Soient  $M$  et  $N$  deux points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $k$  : alors  $M \times N$  et  $N \times M$  sont tous deux des points génériques de  $\Gamma \times \Gamma$  par rapport à  $k$ . Comme on a  $k(M \times N) = k(N \times M)$ , il existe (F-IV<sub>7</sub>, th. 16, cor. 1) une correspondance birationnelle entre la surface  $\Gamma \times \Gamma$  et elle-même, dans laquelle  $M \times N$  et  $N \times M$  sont des points génériques correspondants par rapport à  $k$  : cette correspondance, qui est évidemment partout birégulière, sera appelée la *symétrie* sur

$\Gamma \times \Gamma$ . Le transformé par symétrie de tout point, de toute courbe ou de tout cycle sur  $\Gamma \times \Gamma$  sera appelé son *symétrique*, et dénoté par le signe ' : par exemple, si  $P$  et  $Q$  sont deux points quelconques de  $\Gamma$ , on a  $(P \times Q)' = Q \times P$ . La diagonale  $\Delta$  de  $\Gamma \times \Gamma$  est sa propre symétrique, c'est-à-dire qu'on a  $\Delta' = \Delta$  : et, pour qu'un point de  $\Gamma \times \Gamma$  soit son propre symétrique, il faut et il suffit qu'il soit sur  $\Delta$ . Si  $\varphi$  est une fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , elle est transformée par symétrie en une fonction  $\varphi'$  telle que l'on ait  $\varphi'(P \times Q) = \varphi(Q \times P)$  chaque fois que  $Q \times P$  est un point de  $\Gamma \times \Gamma$  où  $\varphi$  soit définie.

Dans le groupe additif  $\mathcal{G}$  des correspondances, soit  $\mathcal{G}_0$  l'ensemble des diviseurs de la forme  $(\varphi)$ , où  $\varphi$  est une fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , autre que la constante 0 ; soit  $\mathcal{G}_1$ , l'ensemble des diviseurs de la forme  $(\varphi) + \Gamma \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \Gamma$ , où  $\varphi$  est une fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , autre que la constante 0, et où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont deux diviseurs sur  $\Gamma$  ; il résulte de F-VIII<sub>2</sub>, th. 6, que  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{G}_1$  sont des sous-groupes de  $\mathcal{G}$ . Si  $X$  et  $Y$  sont deux correspondances, on écrira  $X \sim Y$  si  $X - Y$  est dans  $\mathcal{G}_0$  et  $X \equiv Y$  si  $X - Y$  est dans  $\mathcal{G}_1$  ; la relation  $X \equiv Y$  signifie donc qu'il existe deux diviseurs  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  sur  $\Gamma$  tels que l'on ait

$$X \sim Y + \Gamma \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \Gamma.$$

On réservera le nom d'*équivalence*, quand il s'agira de correspondances, à la relation  $\equiv$  et, quand il sera question de classes d'équivalence dans l'ensemble des correspondances, ou plus brièvement de *classes de correspondances*, il faudra toujours entendre par là les classes dans le groupe  $\mathcal{G}$  suivant le sous-groupe  $\mathcal{G}_1$ . En conséquence, le groupe quotient  $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$  sera appelé le groupe additif des classes de correspondances. L'application  $X \rightarrow X'$  du groupe  $\mathcal{G}$  sur lui-même transforme en eux-mêmes les sous-groupes  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{G}_1$  : les relations  $X \sim Y$  et  $X \equiv Y$  sont donc respectivement équivalentes à  $X' \sim Y'$  et à  $X' \equiv Y'$  ; il suit aussi de là que, si  $\xi$  est une classe de correspondances (c'est-à-dire une classe dans  $\mathcal{G}$  suivant  $\mathcal{G}_1$ ), l'application  $X \rightarrow X'$  la transforme en une classe de correspondances, qui sera notée  $\xi'$ .

PROPOSITION 1. — Soient  $X, Y$  deux diviseurs sur  $\Gamma \times \Gamma$ , tels que le cycle  $X.Y$  soit défini. Alors, si  $X \sim 0$ , on a  $\deg(X.Y) = 0$ .

Si  $X \sim 0$ , il y a  $\varphi$  sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que  $X = (\varphi)$ . Si  $X.Y$  est défini,  $Y$  n'a donc aucune composante commune avec le diviseur  $(\varphi)$ , et par suite, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 3,  $\varphi$  induit, sur chacune des composantes de  $Y$  une fonction qui n'est pas la constante 0. D'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 7, il suit de là que  $pr_1[Y.(\varphi)]$  est un diviseur équivalent à 0 sur  $\Gamma$ , donc de degré 0 d'après la prop. 1 de la 1<sup>ère</sup> partie (n<sup>o</sup> 2) ; comme la projection algébrique de tout cycle a même degré que ce cycle lui-même, le cycle  $Y.(\varphi) = X.Y$  est donc bien de degré 0.

De la prop. 1 résulte la possibilité de définir un symbole  $I(X.Y)$ , attaché à tout couple de correspondances  $X, Y$ , et dont la valeur est égale à  $\deg(X.Y)$  quand  $X.Y$  est

défini. Pour cela, nous poserons d'abord, par définition,  $I(A.B) = \deg(A.B)$  chaque fois que  $A$  et  $B$  sont des courbes distinctes sur  $\Gamma \times \Gamma$  ; en effet, d'après F-VII<sub>6</sub>, pr. 16, le cycle  $A.B$  est alors défini. Soit d'autre part  $A$  une courbe quelconque sur  $\Gamma \times \Gamma$  ; il existe des diviseurs  $X$  tels que l'on ait  $X \sim A$ , et que  $X.A$  soit défini ; on obtiendra en effet un tel diviseur en posant  $X = A - (\varphi)$ ,  $\varphi$  étant une fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$  telle que  $v_A(\varphi) = 1$ , et il existe de telles fonctions d'après F-VIII<sub>3</sub>, th. 9 : on posera alors  $I(A.A) = \deg(X.A)$  : cet entier est bien indépendant du choix de  $X$  puisque si  $X_1$  est un diviseur satisfaisant aux conditions imposées à  $X$ , on a, d'après la prop. 1.

$$\deg[(X_1 - X).A] = 0,$$

donc  $\deg(X_1.A) = \deg(X.A)$ . Enfin, si  $X$  et  $Y$  sont deux correspondances quelconques, et si  $\sum_{\alpha} a_{\alpha}.A_{\alpha}$  et  $\sum_{\beta} b_{\beta}.B_{\beta}$  sont respectivement des expressions pour  $X$  et pour  $Y$ , nous poserons

$$I(X.Y) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha} b_{\beta} . I(A_{\alpha} . B_{\beta})$$

THÉORÈME 1. — Soient  $X, X_1$ , et  $Y, Y_1$ , des correspondances telles que l'on ait  $X \sim X_1$  et  $Y \sim Y_1$ . Alors on a  $I(X.Y) = I(X_1.Y_1)$ . Il suffit de montrer qu'on a

$$I(X.Y) = I(X_1.Y) \quad \text{et} \quad I(X_1.Y) = I(X_1.Y_1) ;$$

démontrons par exemple la première de ces relations. En vertu de la linéarité du symbole  $I$ , il suffit de montrer qu'on a

$$I(X.B) = I(X_1.B)$$

si  $B$  est une courbe quelconque. Soit  $m$  le coefficient de  $B$  dans  $X - X_1$  ; alors, si nous posons  $Z = X - X_1 - m.B$ ,  $B$  n'est pas une composante de  $Z$ , et l'on a  $Z \sim -m.B$ . Soit  $W$  une correspondance telle que l'on ait  $W \sim B$  et que  $W.B$  soit défini. On a alors, par définition.

$$I[(X - X_1).B] = \deg(Z.B) + m.\deg(W.B) = \deg[(Z + m.W).B] ;$$

et le dernier membre de cette relation est nul en vertu de la prop. 1 puisque l'on a  $Z + m.W \sim Z + m.B \sim 0$ .

2. Par  $pr_1$  et  $pr_2$ , nous entendons comme d'habitude (F-VII<sub>6</sub>) les projections algébriques, sur le premier et le second facteur de  $\Gamma \times \Gamma$  respectivement, des cycles sur  $\Gamma \times \Gamma$ . Si  $X$  est une correspondance, nous dénoterons par  $d(X)$  et  $d'(X)$  les entiers respectivement définis par  $pr_1 X = d(X).\Gamma$  et par  $pr_2 X = d'(X).\Gamma$ . Il est clair que l'on a

$$d'(X) = d(X') \quad \text{et} \quad d(X) = d'(X').$$

Soit  $X$  une correspondance ; on peut, d'une manière et d'une seule, la mettre sous la forme  $X = X_0 + \mathbf{a} \times \Gamma$ , où  $\mathbf{a}$  est un diviseur sur  $\Gamma$  et où  $X_0$  n'a aucune composante de la forme  $A \times \Gamma$ . Il résulte alors de F-VII<sub>6</sub>, pr. 16, que  $X_0.(P \times \Gamma)$  est défini quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$  ; de plus, comme deux courbes  $P \times \Gamma$  et  $Q \times \Gamma$  ne peuvent avoir de point commun à moins de coïncider, on a

$$X.(P \times \Gamma) = X_0.(P \times \Gamma)$$

chaque fois que le premier membre a un sens. Nous conviendrons, une fois pour toutes, si  $X$  est une correspondance,  $X_0$  la correspondance définie comme ci-dessus à partir de  $X$ , et  $P$  un point quelconque de  $\Gamma$ , de désigner par  $X(P)$  le diviseur sur  $\Gamma$  défini par la relation  $X_0.(P \times \Gamma) = P \times X(P)$  : il résulte de F-VII<sub>6</sub>, th. 13, que cette notation a toujours un sens, et qu'elle comprend comme cas particulier celle qui est définie dans ce dernier théorème. Il revient au même d'écrire  $X(P) = pr_2[X_0.(P \times \Gamma)]$  ; nous généraliserons cette notation en posant  $X(\mathbf{a}) = pr_2[X_0.(\mathbf{a} \times \Gamma)]$  quand  $\mathbf{a}$  est un diviseur quelconque sur  $\Gamma$ . Il résulte de ce qui précède que  $X(\mathbf{a})$  a toujours un sens, et qu'on a  $X(\mathbf{a}) = pr_2[X.(\mathbf{a} \times \Gamma)]$  chaque fois que  $X.(\mathbf{a} \times \Gamma)$  est défini, c'est-à-dire chaque fois que les cycles  $X$  et  $\mathbf{a} \times \Gamma$  n'ont pas de composante commune. De plus,  $X(\mathbf{a})$  dépend linéairement de  $X$  et de  $\mathbf{a}$  ; autrement dit, on a  $X(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = X(\mathbf{a}) + X(\mathbf{b})$ , et, si l'on a  $Z = X + Y$ , on a  $Z(\mathbf{a}) = X(\mathbf{a}) + Y(\mathbf{a})$ .

Cela posé, l'application des th. 12 et 15 de F-VII<sub>6</sub>, donne les résultats suivants

**THÉORÈME 2.** — Soient  $K$  un corps, et  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ . Soit  $X$  un élément du groupe additif  $\mathcal{G}_K$  des correspondances rationnelles par rapport à  $K$  : alors  $X(M)$  est un diviseur sur  $\Gamma$ , rationnel par rapport à  $K(M)$  : et l'on a  $X(M) = 0$  si  $X$  est de la forme  $\mathbf{a} \times \Gamma$ , où  $\mathbf{a}$  est un diviseur sur  $\Gamma$ , et dans ce cas seulement. De plus, l'application  $X \rightarrow X(M)$  est un homomorphisme de  $\mathcal{G}_K$  sur le groupe additif des diviseurs sur  $\Gamma$ , rationnels par rapport à  $K(M)$  ; et, si  $\mathbf{m}$  est un élément quelconque de ce dernier groupe, il existe un élément  $X$  et un seul de  $\mathcal{G}_K$ , sans composante de la forme  $A \times \Gamma$ , tel que  $X(M) = \mathbf{m}$  : si de plus on a  $\mathbf{m} \succ 0$ , on a  $X \succ 0$ .

C'est là en effet un cas particulier de F-VII<sub>6</sub>, th. 12, que nous reproduisons ici en raison de l'importance de ce résultat pour la théorie qui nous occupe.

**THÉORÈME 3.** — Soient  $X$  une correspondance, et  $P$  un point de  $\Gamma$  : alors on a  $\deg[X(P)] = I[X.(P \times \Gamma)] = d(X)$ . Plus généralement, si  $\mathbf{a}$  est un diviseur quelconque sur  $\Gamma$ , on a

$$\deg[X(\mathbf{a})] = I[X.(\mathbf{a} \times \Gamma)] = d(X).deg(\mathbf{a}).$$

Soient  $\mathbf{b}$  le diviseur sur  $\Gamma$ , et  $X_0$  la correspondance sans composante de la forme  $A \times \Gamma$  tels que l'on ait  $X = X_0 + \mathbf{b} \times \Gamma$ . On a  $pr_1(\mathbf{b} \times \Gamma) = 0$ , donc  $d(X) = d(X_0)$ . D'autre

part, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 15, on a  $\deg[X(P)] = \deg[X_0.(P \times \Gamma)] = d(X_0)$ . Alors, pour compléter la démonstration de la première partie de notre théorème, il suffit de faire voir qu'on a  $I[(\mathfrak{b} \times \Gamma).(P \times \Gamma)] = 0$ . Soit  $\tau$  une fonction sur  $\Gamma$ , telle que l'on ait  $v_P(\tau) = 1$ , et posons  $\mathfrak{c} = P - (\tau)$ , de sorte que  $P$  n'est pas un composant de  $\mathfrak{c}$ . Soit  $\varphi$  la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que l'on ait, quels que soient  $M$  et  $N$  sur  $\Gamma$

$$\varphi(M \times N) = \tau(M);$$

alors on a, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 1, cor. 4,

$$(\varphi) = (\tau) \times \Gamma = (P - \mathfrak{c}) \times \Gamma.$$

Soit  $b$  le coefficient de  $P$  dans  $\mathfrak{b}$  ; posons  $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} - b.(P - \mathfrak{c})$  ; alors  $P$  n'est pas un composant de  $\mathfrak{b}'$ , donc  $P \times \Gamma$  n'est pas une composante de  $\mathfrak{b}' \times \Gamma$  ; et l'on a  $\mathfrak{b} \times \Gamma \sim \mathfrak{b}' \times \Gamma$ , donc

$$I[(\mathfrak{b} \times \Gamma).(P \times \Gamma)] = I[(\mathfrak{b}' \times \Gamma).(P \times \Gamma)]$$

d'après le th. 1. Comme on a  $(\mathfrak{b}' \times \Gamma).(P \times \Gamma) = 0$ , ceci achève la démonstration de la première partie de notre théorème : la seconde s'en déduit immédiatement par linéarité.

3. Pour formuler le théorème suivant, il est commode d'introduire dès maintenant une notation générale qui ne nous servira guère dans le présent travail, mais sera très utile dans ceux qui lui feront suite. Soit  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma$  : soit  $\mathfrak{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$ , sans composant commun avec le diviseur  $(\varphi)$  : si donc  $\sum_{\alpha} a_{\alpha}.A_{\alpha}$  est l'expression réduite de  $\mathfrak{a}$ , on a, quel que soit  $\alpha$ ,  $\varphi(A_{\alpha}) \neq 0$  et  $(A_{\alpha}) \neq \infty$  ; dans ces conditions, on posera  $\varphi(\mathfrak{a}) = \prod_{\alpha} \varphi(A_{\alpha})^{a_{\alpha}}$ . Si le diviseur  $\mathfrak{a}$  se réduit à un point  $A$ , le symbole  $\varphi(\mathfrak{a})$ , s'il est défini, désigne donc la quantité  $\varphi(A)$  ; on a d'autre part  $\varphi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}).\varphi(\mathfrak{b})$  chaque fois que  $\varphi(\mathfrak{a})$  et  $\varphi(\mathfrak{b})$  sont définis.

THÉORÈME 4. — Soient  $K$  un corps,  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ , et  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma$ , ayant  $K$  pour corps de définition. Soit  $X$  une correspondance, rationnelle par rapport à  $K$ , et sans composante de la forme  $A \times \Gamma$ . Alors il y a une fonction  $\theta$  sur  $\Gamma$ , définie par rapport à  $K$  par la relation  $\varphi[X'(M)] = \theta(M)$  ; et l'on a  $(\theta) = X[(\varphi)]$ .

C'est là en effet une conséquence immédiate de F-VIII<sub>2</sub>, th. 7, de F-VIII<sub>2</sub>, th. 1, cor. 4. et de nos définitions.

COROLLAIRE. — Soient  $X$  une correspondance, et  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  deux diviseurs sur  $\Gamma$ . Alors la relation  $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$  entraîne  $X(\mathfrak{a}) \sim X(\mathfrak{b})$ . En particulier, si l'on a  $\mathfrak{a} \sim 0$ , on a  $X(\mathfrak{a}) \sim 0$ .

En effet, si l'on a  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\varphi)$ , il résulte de nos définitions, et du th. 4, qu'on peut construire une fonction  $\theta$  telle que  $X(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (\theta)$ .

THÉORÈME 5. — Soient  $K$  un corps,  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ , et  $X$  une correspondance rationnelle par rapport à  $K$ . Alors, pour qu'on ait  $X(M) \sim 0$ , il faut et il suffit qu'il existe un diviseur  $\mathbf{a}$  sur  $\Gamma$ , tel que l'on ait  $X \sim \mathbf{a} \times \Gamma$  ; et, s'il en est ainsi, on a  $X(P) \sim 0$  quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$ .

Supposons qu'on ait  $X(M) \sim 0$  ; d'après le th. 2,  $X(M)$  est rationnel par rapport à  $K(M)$  ; d'après F-VIII<sub>3</sub>, th. 10, cor. 1, il existe donc sur  $\Gamma$  une fonction  $\theta$ , ayant  $K(M)$  pour corps de définition, telle qu'on ait  $(\theta) = X(M)$ . Soit  $N$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K(M)$  ; alors  $\theta(N)$  est un élément de  $K(M \times N)$ . Soit  $\varphi$  la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , définie par rapport à  $K$  par la relation  $\theta(N) = \varphi(M \times N)$  ; et posons  $X_1 = (\varphi)$ . Il résulte alors de F-VIII<sub>2</sub>, th. 1. cor. 3, qu'on a  $(\varphi).(M \times \Gamma) = M \times (\theta)$ , donc  $X_1(M) = X(M)$  ; en vertu du th. 2,  $X - X_1$  est donc de la forme  $\mathbf{a} \times \Gamma$ , de sorte qu'on a bien  $X \sim \mathbf{a} \times \Gamma$ . Soit maintenant  $P$  un point quelconque de  $\Gamma$  ; soit  $\tau$  une fonction sur  $\Gamma$ , telle que  $v_P(\tau) = 1$  ; soit  $\psi$  la fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que  $\psi(R \times S) = \tau(R)$  quels que soient  $R$  et  $S$  sur  $\Gamma$  ; on a donc, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 1, cor. 4,  $(\psi) = (\tau) \times \Gamma$ . Posons  $m = v_{P \times \Gamma}(\varphi)$ , et  $\varphi_0 = \psi^{-m} \cdot \varphi$ , d'où  $(\varphi_0) = (\varphi) - m \cdot (\tau) \times \Gamma$  ;  $P \times \Gamma$  n'est donc pas une composante de  $(\varphi_0)$ , et par suite  $\varphi_0$  induit sur  $P \times \Gamma$  une fonction qui n'est pas la constante 0 : on a de plus

$$(\varphi_0) = X - [\mathbf{a} + m \cdot (\tau)] \times \Gamma, \quad \text{d'où} \quad (\varphi_0).(P \times \Gamma) = P \times X(P).$$

Il résulte alors de F-VIII<sub>2</sub>, th. 4, cor. 1, que  $P \times X(P)$  est le diviseur de la fonction induite par  $\varphi_0$  sur  $P \times \Gamma$  ; on a donc bien  $X(P) \sim 0$ . Réciproquement, soient  $X$  une correspondance, et  $\mathbf{a}$  un diviseur sur  $\Gamma$ , tels que  $X \sim \mathbf{a} \times \Gamma$ . Soit  $\varphi$  une fonction telle que ait  $(\varphi) = X - \mathbf{a} \times \Gamma$ . Soit  $K'$  un corps de définition pour  $\varphi$ , par rapport auquel  $X$  et  $\mathbf{a}$  soient rationnels : soient  $M'$  et  $N'$  des points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K'$  : soit  $\theta$  la fonction sur  $\Gamma$ , définie par rapport à  $K'(M')$  par la relation  $\theta(N') = \varphi(M' \times N')$ . Alors, d'après F.VIII<sub>2</sub>, th. 1, cor. 3, on a  $(\varphi).(M' \times \Gamma) = M' \times (\theta)$ , donc  $(\theta) = X(M')$ , et par suite  $X(M') \sim 0$ . D'après ce qui a été démontré ci-dessus, ceci implique qu'on a  $X(P) \sim 0$  quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$ .

COROLLAIRE. — Soit  $X$  une correspondance. Pour qu'on ait  $X \equiv 0$ , il faut et il suffit qu'on ait  $X(\mathbf{m}) \sim 0$  pour tout diviseur de degré 0 sur  $\Gamma$ .

Supposons en effet qu'on ait  $X \equiv 0$ , donc  $X \sim \mathbf{a} \times \Gamma + \Gamma \times \mathbf{b}$  où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont deux diviseurs sur  $\Gamma$ . En appliquant le th. 5 à  $X - \Gamma \times \mathbf{b}$ , on voit qu'on a quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$ ,  $X(P) - \mathbf{b} \sim 0$ , donc en général, quel que soit le diviseur  $\mathbf{m}$  sur  $\Gamma$ ,  $X(\mathbf{m}) \sim \text{deg}(\mathbf{m}).\mathbf{b}$ , donc  $X(\mathbf{m}) \sim 0$  si  $\mathbf{m}$  est de degré 0. Réciproquement, supposons que  $\text{deg}(\mathbf{m}) = 0$  entraîne  $X(\mathbf{m}) \sim 0$  ; soient  $P$  un point de  $\Gamma$ ,  $K$  un corps par rapport auquel  $X$  soit rationnel, et  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K(P)$ .

On a  $X(M - P) = X(M) - X(P) \sim 0$ . Posons  $X(P) = \mathfrak{b}$  et  $X_1 = X - \Gamma \times \mathfrak{b}$  ;  $X_1$  est rationnel par rapport à  $K(P)$ , et l'on a  $X_1(M) = X(M) - \mathfrak{b} \sim 0$  ; d'après le th. 5, il existe donc un diviseur  $\mathfrak{a}$  tel que l'on ait  $X_1 \sim \mathfrak{a} \times \Gamma$ , d'où  $X \sim \mathfrak{a} \times \Gamma + \Gamma \times \mathfrak{b}$ .

4. Nous définirons maintenant une opération bilinéaire, non commutative, entre correspondances, au moyen du théorème suivant :

**THÉORÈME 6.** — Soient  $X$  et  $Y$  deux correspondances. Alors il existe une correspondance  $Z$  et une seule, telle que l'on ait, quel que soit le point  $P$  sur  $\Gamma$ ,  $Z(P) = X[Y(P)]$  et  $Z'(P) = Y'[X'(P)]$  ; si de plus  $K$  est un corps par rapport auquel  $X$  et  $Y$  soient rationnels,  $Z$  aussi est rationnel par rapport à  $K$  : et, si l'on a  $X \succ 0, Y \succ 0$ , on a  $Z \succ 0$ . Enfin,  $Z$  est donné par la formule

$$Z = pr_{13}[(\Gamma \times X).(Y \times \Gamma)]$$

chaque fois que le second membre a un sens.

Il ne peut exister plus d'une correspondance  $Z$  avec les propriétés énoncées dans notre première assertion ; en effet, s'il en existait deux,  $Z$  et  $Z_1$ , on aurait, quel que soit  $P$ ,

$$Z_1(P) = Z(P) \quad \text{et} \quad Z_1(P) = Z'(P) ;$$

si en particulier on prend  $P$  générique sur  $\Gamma$  par rapport à un corps par rapport auquel  $Z$  et  $Z_1$  soient rationnels, on voit, d'après le th. 2. que  $Z - Z_1$ , et  $Z' - Z'_1$  doivent être tous deux de la forme  $\mathfrak{a} \times \Gamma$ , donc que  $Z - Z_1$  doit être à la fois de la forme  $\mathfrak{a} \times \Gamma$  et de la forme  $\Gamma \times \mathfrak{a}_1$  ; et cela n'est possible que si l'on a  $Z - Z_1 = 0$ . Nous allons maintenant calculer le diviseur  $X[Y(P)]$  au moyen de nos définitions et des théorèmes de F-VII<sub>6</sub>. Supposons d'abord que ni  $X$  ni  $Y$  n'aient de composante de la forme  $A \times \Gamma$ . On a alors

$$Y.(P \times \Gamma) = P \times Y(P),$$

donc, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 11,

$$(Y \times \Gamma).(P \times \Gamma \times \Gamma) = P \times Y(P) \times \Gamma,$$

et par suite

$$(\Gamma \times X).(Y \times \Gamma).(P \times \Gamma \times \Gamma) = P \times \{X.[Y(P) \times \Gamma]\}.$$

Le premier membre de cette dernière relation a un sens, en vertu du calcul ci-dessus et par suite de l'hypothèse faite sur  $X$  et  $Y$  et l'on voit de même, au moyen de F-VII<sub>6</sub>, pr. 17, que les trois cycles

$$\Gamma \times X, \quad Y \times \Gamma \quad P \times \Gamma \times \Gamma$$

se coupent proprement sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  : de plus, d'après F-VII<sub>6</sub>, pr. 16,  $\Gamma \times X$  et  $Y \times \Gamma$  se coupent proprement sur la même variété, car autrement ils devraient avoir une composante commune, qui serait alors nécessairement de la forme  $\Gamma \times A \times \Gamma$ , et  $A \times \Gamma$  devrait être une composante de  $X$ . Dans ces conditions, on peut appliquer à

$$(\Gamma \times X).(Y \times \Gamma).(P \times \Gamma \times \Gamma)$$

le principe d'associativité des intersections [F-VII<sub>6</sub>, th. 10 (v)], qui montre que ce cycle peut aussi s'écrire

$$[(\Gamma \times X).(Y \times \Gamma)].(P \times \Gamma \times \Gamma).$$

Si donc on pose  $U = (\Gamma \times X).(Y \times \Gamma)$ , on a

$$U.(P \times \Gamma \times \Gamma) = P \times \{X.[Y(P) \times \Gamma]\},$$

d'où, par définition de  $X[Y(P)]$  et par application de F-VII<sub>6</sub>, th. 16,

$$P \times X[Y(P)] = pr_{12}[U.(P \times \Gamma \times \Gamma)] = (pr_{12}U).(P \times \Gamma);$$

dans cette formule, comme d'ailleurs dans l'énoncé de notre théorème,  $pr_{12}$  désigne bien entendu la projection algébrique de cycles dans  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  sur le produit partiel formé du premier et du dernier facteur de  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ . Si donc nous posons  $Z = pr_{12}U$ , on a

$$X[Y(P)] = Z(P).$$

Montrons maintenant que ce résultat reste valable même si  $X$  et  $Y$  ont des composantes de la forme  $A \times \Gamma$ , pourvu seulement que le cycle  $U = (\Gamma \times X).(Y \times \Gamma)$  soit défini. Posons en effet, dans ce cas,  $X = X_0 + \mathbf{a} \times \Gamma$ ,  $Y = Y_0 + \mathbf{b} \times \Gamma$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  étant des diviseurs sur  $\Gamma$ , et  $X_0$  et  $Y_0$  n'ayant pas de composante de la forme  $A \times \Gamma$ . On a alors, par définition,  $Y(P) = Y_0(P)$  et  $X[Y(P)] = X_0[Y_0(P)]$  : si donc on pose  $U_0 = (\Gamma \times X_0).(Y_0 \times \Gamma)$ , et  $Z_0 = pr_{13}(U_0)$ , on a, d'après ce qui a été démontré plus haut,  $X_0[Y_0(P)] = Z_0(P)$  ; d'autre part, il résulte des formules ci-dessus et de F-VII<sub>6</sub>, th. 11, que, si l'on pose  $W = (\Gamma \times \mathbf{a}).Y_0 + \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ , on a  $U = U_0 + W \times \Gamma + \mathbf{b} \times X_0$ , d'où, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 14,  $Z = Z_0 + \mathbf{c} \times \Gamma$  avec  $\mathbf{c} = pr_1 W + d'(X_0).\mathbf{b}$ , et par conséquent  $Z(P) = Z_0(P)$ . Considérons maintenant la correspondance birationnelle partout birégulière, entre le produit  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  et lui-même, qui échange entre eux le premier et le dernier facteur de ce produit, c'est-à-dire qui transforme tout point  $M_1 \times M_2 \times M_3$  de ce produit en le point  $M_3 \times M_2 \times M_1$  ; cette correspondance birationnelle transforme les cycles  $\Gamma \times X$  et  $Y \times \Gamma$  en  $X' \times \Gamma$  et  $\Gamma \times Y'$ , respectivement ; il s'ensuit que si  $Z$  est défini comme ci-dessus, on a  $Z' = pr_{12}[(X' \times \Gamma).(Y \times \Gamma)]$ , et par suite, d'après ce que nous avons démontré,  $Z'(P) = Y'[X'(P)]$  quel que soit  $P$ . Si donc le cycle  $(\Gamma \times X).(Y \times \Gamma)$  est défini, la correspondance  $Z$  que nous venons d'étudier a bien les propriétés énoncées dans notre théorème. Si d'autre part le cycle



$(\Gamma \times X).(Y \times \Gamma)$  n'est pas défini alors, d'après F-VII<sub>0</sub>, pr. 16,  $\Gamma \times X$  et  $Y \times \Gamma$  ont une composante commune, qui est nécessairement de la forme  $\Gamma \times A \times \Gamma$ , de sorte que  $X$  a une composante de la forme  $A \times \Gamma$ . Si donc nous posons  $X = X_0 + \mathfrak{a} \times \Gamma$ ,  $X_0$  et  $\mathfrak{a}$  ayant le même sens que plus haut, le cycle  $Z_0 = pr_{13}[(\Gamma \times X_0).(Y \times \Gamma)]$  aura un sens, et l'on aura, quel que soit  $P$ ,  $Z_0(P) = X_0[Y(P)] = X[Y(P)]$ , et  $Z_0(P) = Y'[X'_0(P)]$  : comme d'ailleurs on a  $X'(P) = X'_0(P) + \mathfrak{a}$ , on a

$$Y'[X'(P)] = Z'_0(P) + Y'(\mathfrak{a})$$

Il suit de là que, si l'on pose  $Z = Z_0 + Y'(\mathfrak{a}) \times \Gamma$ , cette correspondance a toutes les propriétés requises par notre théorème.

5. Si  $X$  et  $Y$  sont deux correspondances, on appellera *produit de composition* de  $X$  et  $Y$  (on simplement *produit* quand il ne pourra y avoir de confusion) la correspondance  $Z$  telle que  $Z(P) = X[Y(P)]$  et  $Z'(P) = Y'[X'(P)]$  quel que soit  $P$  ; ce produit sera noté  $X \circ Y$ . Il résulte de cette définition qu'on a  $(X \circ Y)' = Y' \circ X'$ , et aussi, par linéarité, que, si  $Z = X \circ Y$ , on a  $Z(\mathfrak{a}) = X[Y(\mathfrak{a})]$  quel que soit le diviseur  $\mathfrak{a}$  sur  $\Gamma$ . De cette dernière propriété, et de la définition du produit de composition, il résulte immédiatement que ce produit est associatif. Comme d'autre part on a  $\Delta(P) = P$  quel que soit  $P$  sur  $\Gamma$ , donc  $\Delta(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$  quel que soit le diviseur  $\mathfrak{a}$ , il résulte de notre définition qu'on a  $\Delta \circ X = X \circ \Delta = X$  quelle que soit la correspondance  $X$ , c'est-à-dire que  $\Delta$  est élément neutre (ou "élément unité") à droite et à gauche pour le produit de composition. Il résulte d'autre part de la définition, et du th. 3, que l'on a  $d(X \circ Y) = d(X).d(Y)$ , et de même  $d'(X \circ Y) = d'(X).d'(Y)$ , quelles que soient les correspondances  $X$  et  $Y$ .

Il résulte d'autre part du Corollaire du th. 5, et du th. 3, que, si l'on a  $X \equiv 0$ , et si  $Y$  est une correspondance quelconque, on a  $X \circ Y \equiv 0$  : et il résulte du Corollaire du th. 5, et de celui du th. 4, que, si  $Y \equiv 0$ , et si  $X$  est une correspondance quelconque, on a  $X \circ Y \equiv 0$ . Il suit de là que la *classe* du produit de composition  $X \circ Y$  (au sens de la relation d'équivalence  $\equiv$ ) ne dépend que des classes des facteurs  $X$  et  $Y$  ; si l'on désigne par  $\xi$  et  $\eta$  les classes de  $X$  et de  $Y$  respectivement, la classe de  $X \circ Y$  sera désignée par  $\xi \cdot \eta$ , et sera appelée le produit de  $\xi$  et  $\eta$ . La multiplication des classes de correspondances est évidemment distributive, à droite et à gauche, par rapport à l'addition : de ce qui précède, il résulte qu'elle est associative, et qu'elle possède un élément unité, à savoir la classe de  $\Delta$  ; celle-ci sera désormais désignée par  $\delta$ . Au moyen de ces définitions, l'ensemble des classes de correspondances se trouve défini comme anneau ; cet anneau sera désigné par  $\mathcal{A}$ . La transformation  $\xi \rightarrow \xi'$  de  $\mathcal{A}$  en lui-même est alors une anti-involution (ou "anti-automorphisme involutif"), c'est-à-dire que c'est un automorphisme du groupe additif de  $\mathcal{A}$  sur lui-même, et qu'on a

$$(\xi')' = \xi \qquad (\xi \cdot \eta)' = \eta' \cdot \xi'$$

quels que soient  $\xi$  et  $\eta$  dans  $\mathcal{A}$ .

PROPOSITION 2. — Soient  $X$  et  $Y$  deux correspondances quelconques. Alors on a  $I(X.Y') = I[\Delta.(X \circ Y)]$ .

Comme les deux membres de la relation à démontrer dépendent linéairement de  $X$  et de  $Y$ , il nous suffira de démontrer cette relation d'une part dans le cas où  $X$  et  $Y'$  sont sans composante commune, et d'autre part dans le cas où on a  $X = Y' = C$ ,  $C$  étant une courbe quelconque sur  $\Gamma \times \Gamma$ . Supposons donc d'abord  $X$  et  $Y'$  sans composante commune. Dans ce cas, le cycle

$$U = (\Gamma \times X).(Y \times \Gamma)$$

est défini sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  ; en effet, s'il ne l'était pas,  $\Gamma \times X$  et  $Y \times \Gamma$  auraient une composante commune, qui serait nécessairement de la forme  $\Gamma \times A \times \Gamma$ , et alors  $X$  aurait la composante  $A \times \Gamma$ , et  $Y$  la composante  $\Gamma \times A$ , de sorte que  $A \times \Gamma$  serait une composante commune de  $X$  et de  $Y'$ . On a donc alors, d'après le th. 6,

$$Z = X \circ Y = pr_{12}U.$$

D'autre part,  $M$  et  $N$  étant deux points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $k$ , soit  $\Theta$  le lieu de  $M \times N \times M$  par rapport à  $k$  sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  ; la projection de  $\Theta$  sur le produit partiel formé des deux premiers facteurs de  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  est partout régulière, et, si  $P \times Q$  est un point quelconque de ce produit partiel, le point de  $\Theta$  dont il est la projection est  $P \times Q \times P$ . D'après F-VII<sub>6</sub>, th. 17, cor. 3, il y a donc une correspondance hiunivoque entre les cycles  $Y$  sur  $\Gamma \times \Gamma$  et les cycles  $\bar{Y}$  contenus dans  $\Theta$  sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ , correspondance déterminée par les relations

$$Y = pr_{12}(\bar{Y}), \quad \bar{Y} = (Y \times \Gamma).\Theta.$$

Si de plus  $Y$  est une courbe sur  $\Gamma \times \Gamma$ , lieu d'un point  $P \times Q$  par rapport à un corps  $K$ ,  $\bar{Y}$  est alors la courbe sur  $\Theta$  qui a  $Y$  pour projection, c'est-à-dire que c'est le lieu du point  $P \times Q \times P$  par rapport à  $K$  ; on a donc alors  $Y' = pr_{23}(\bar{Y})$ , et, par linéarité, cette relation s'étend à une correspondance quelconque. Nous avons donc, quelle que soit la correspondance  $Y.Y' = pr_{23}[(Y \times \Gamma).\Theta]$ . Si donc  $X$  est une correspondance telle que le cycle

$$T = (\Gamma \times X).[(Y \times \Gamma).\Theta]$$

soit défini sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ , il résulte de F-VII<sub>6</sub>, th. 16, que  $X.Y'$  est défini sur  $\Gamma \times \Gamma$  et qu'on a  $X.Y' = pr_{23}T$ , et par suite

$$I(X.Y') = \deg(T).$$

Mais, si une composante  $C$  de  $Y$  est le lieu d'un point  $P \times Q$  par rapport à un corps  $K$ , il résulte de ce qui précède que l'intersection  $(C \times \Gamma) \cap \Theta$  est le lieu de  $P \times Q \times P$

par rapport à  $K$ , et ne peut donc être contenue dans une composante de  $\Gamma \times X$  que si une composante de  $X$  se confond avec le lieu  $C'$  de  $Q \times P$  par rapport à  $K$ , c'est-à-dire si  $C'$  est une composante commune de  $X$  et de  $Y'$ . Si donc, comme nous l'avons supposé,  $X$  et  $Y'$  n'ont pas de composante commune, les trois cycles  $\Gamma \times X, Y \times \Gamma$  et  $\Theta$  satisfont à la condition de F-VII<sub>6</sub>, pr. 17, et se coupent donc proprement sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ . D'ailleurs, dans ces conditions,  $(\Gamma \times X).(Y \times \Gamma)$  est défini, comme nous l'avons montré plus haut. Par conséquent le principe d'associativité des intersections [F-VII<sub>6</sub>, th. 10 (v)] s'applique aux cycles  $\Gamma \times X, Y \times \Gamma$  et  $\Theta$  ; le cycle désigné plus haut par  $T$  est donc défini et peut aussi s'écrire  $T = U.\Theta$ , avec

$$U = (\Gamma \times X).(Y \times \Gamma).$$

On a donc, dans ces conditions  $I(X.Y') = \deg(U.\Theta)$ .

Cela posé, si, dans le produit  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ , on échange le second et le troisième facteur (ou, ce qui revient au même, si, après avoir écrit ce produit sous la forme  $\Gamma \times (\Gamma \times \Gamma)$ , on applique une symétrie au second facteur  $\Gamma \times \Gamma$  de ce dernier produit),  $\Theta$  se trouve transformé en le lieu de  $M \times M \times N$  par rapport à  $k$ , c'est-à-dire en la variété  $\Delta \times \Gamma$ . Soit  $W$  le cycle transformé de  $U$  par la même opération ; comme on a  $Z = X \circ Y = pr_{13}U$ , on a alors  $Z = pr_{12}W$ . Comme on a d'autre part  $I(X.Y') = \deg(U.\Theta)$ , on a

$$I(X.Y') = \deg[W.(\Delta \times \Gamma)].$$

Mais il suit de F-VII<sub>6</sub>, th. 16, que, puisque  $W.(\Delta \times \Gamma)$  est défini,  $Z.\Delta$  l'est aussi, et qu'on a  $Z.\Delta = pr_{12}[W.(\Delta \times \Gamma)]$ . Ceci achève notre démonstration dans le cas où  $X$  et  $Y'$  sont sans composante commune.

Soit maintenant  $C$  une courbe quelconque sur  $\Gamma \times \Gamma$ , et considérons le cas  $X = C, Y = C'$ . Soit  $X_1$  une correspondance telle que l'on ait  $X_1 \sim C$ , et que  $C$  ne soit pas une composante de  $X_1$  ; on a alors, par définition,  $I(C.C) = I(X_1.C)$ , donc, d'après ce que nous avons démontré,  $I(C.C) = I[(X_1 \circ C').\Delta]$ . Posons

$$d = d(C), \quad d' = d'(C) = d(C') ;$$

on a, d'après le th. 1 du n° 1, et le th. 3 du n° 2,

$$d(X_1) = d \quad \text{et} \quad d'(X_1) = d'.$$

D'autre part, la relation  $X_1 \sim C$  entraîne a fortiori  $X_1 \equiv C$ , et par suite  $X_1 \circ C' \equiv C \circ C'$  ; il existe donc des diviseurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sur  $\Gamma$  tels que l'on ait  $X_1 \circ C' \sim C \circ C' + \mathbf{a} \times \Gamma + \Gamma \times \mathbf{b}$  ; on a alors, d'après le th. 1 du n° 1 et le th. 3 du n° 2,  $d(X_1 \circ C') = d(C \circ C') + \deg(\mathbf{b})$ , et par suite  $\deg(\mathbf{b}) = 0$  puisque l'on a  $d(X_1 \circ C') = d(C \circ C') = d.d'$ , et de même  $\deg(\mathbf{a}) = 0$ . Mais on a, d'après le th. 1 du n° 1,

$$I[X_1 \circ C'.\Delta] = I[(C \circ C' + \mathbf{a} \times \Gamma + \Gamma \times \mathbf{b}).\Delta],$$

donc

$$I[(X_1 \circ C').\Delta] = I[(C \circ C').\Delta] + \deg(\mathbf{a}) + \deg(\mathbf{b}) = I[(C \circ C').\Delta].$$

On a donc bien  $I(C.C) = I[(C \circ C').\Delta]$ , ce qui achève notre démonstration.

6. Soit  $X$  une correspondance : considérons l'entier

$$S(X) = d(X) + d'(X) - I(X.\Delta).$$

Il est clair que  $S(X)$  dépend linéairement de  $X$ , et qu'on a

$$S(X') = S(X)$$

Si  $M$  est un point générique de  $\Gamma$  par rapport à un corps par rapport auquel  $X$  soit rationnel, on a, d'après le th. 3 du n° 2,

$$S(X) = I[X.(M \times \Gamma + \Gamma \times M - \Delta)],$$

et par suite, d'après le th. 1 du n° 1,  $S(X) = 0$  si  $X \sim 0$ , donc aussi  $S(X) = S(Y)$  si  $X \sim Y$ . Si d'autre part  $A$  est un point quelconque de  $\Gamma$ , on a  $d(A \times \Gamma) = 0$ ,  $d'(A \times \Gamma) = 1$ , et

$$\Gamma[(A \times \Gamma).\Delta] = \deg[\Delta(A)] = 1.$$

et par suite  $S(A \times \Gamma) = 0$  ; on a de même  $S(\Gamma \times A) = 0$  ; par linéarité, il suit de là que l'on a  $S(\mathbf{a} \times \Gamma + \Gamma \times \mathbf{b}) = 0$  quels que soient les diviseurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sur  $\Gamma$ . Comme la relation  $X \equiv 0$  signifie qu'il existe  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  tels que l'on ait  $X \sim \mathbf{a} \times \Gamma + \Gamma \times \mathbf{b}$ , il s'ensuit que  $X \equiv 0$  entraîne  $S(X) = 0$ . Par conséquent, si  $X$  est une correspondance, l'entier  $S(X)$  que nous venons de définir ne dépend que de la classe à laquelle appartient  $X$  ; si  $\xi$  est cette classe, nous poserons  $\sigma(\xi) = S(X)$ .

THÉORÈME 7. — L'entier  $\sigma(\xi)$  est une fonction linéaire, définie sur l'anneau  $\mathcal{A}$  des classes de correspondances ; et l'on a, quels que soient  $\xi$  et  $\eta$  dans cet anneau,  $\sigma(\xi') = \sigma(\xi)$ , et  $\sigma(\xi \cdot \eta) = \sigma(\eta \cdot \xi)$ .

Il ne nous reste en effet à démontrer que la dernière formule.

Quant à celle-ci, soient  $X$  et  $Y$  des correspondances de classes respectives  $\xi$  et  $\eta$  : d'après la prop. 2 du n° 5, on a

$$\sigma(\xi \cdot \eta) = d(X).d'(Y) + d'(X).d(Y) - I(X.Y');$$

mais, dans cette dernière formule, le second membre ne change pas si on échange  $X$  et  $Y$  puisqu'on a

$$Y.X' = (X.Y')' \quad \text{et par suite} \quad I(Y.X') = I(X.Y').$$

Le th. 7 montre que  $\sigma(\xi)$ , considérée comme fonction de  $\xi$  sur l'anneau  $\mathcal{A}$ , possède les propriétés formelles d'une trace : nous l'appellerons désormais la *trace* de  $\xi$ .

## § II. Propriétés de la trace.

7. Jusqu'ici, nous n'avons fait aucun usage de la théorie des courbes algébriques, telle qu'elle a été exposée dans la 1<sup>ère</sup> partie ; cette théorie va maintenant être appliquée aux questions qui nous occupent. Nous allons d'abord en déduire la valeur de la trace  $\sigma(\delta)$  de l'élément unité  $\delta$  dans l'anneau des classes de correspondances.

THÉORÈME 8. — On a  $\sigma(\delta) = 2g$ .

Par définition, on a  $\sigma(\delta) = d(\Delta) + d'(\Delta) - I(\Delta.\Delta) = 2 - I(\Delta.\Delta)$ . Soit  $\varphi$  une fonction sur  $\Gamma \times \Gamma$ , telle que l'on ait  $v_\Delta(\varphi) = 1$  ; posons  $X = (\varphi) - \Delta$  ; par définition du symbole  $I$ , on a

$$I(\Delta.\Delta) = -\text{deg}(X.\Delta)$$

D'autre part, par définition aussi (1<sup>ère</sup> partie, § 1, n<sup>o</sup> 5), le diviseur  $\mathfrak{k} = pr_1(X.\Delta)$  est un diviseur canonique sur  $\Gamma$ , de sorte qu'on a, d'après le corollaire du théorème de Riemann-Roch (1<sup>ère</sup> partie, § I, n<sup>o</sup> 7),  $\text{deg}(\mathfrak{k}) = 2g - 2$ , donc  $I(\Delta.\Delta) = 2 - 2g$ .

Il résulte du th. 8 que, si  $n$  est un entier rationnel, on a

$$\sigma(n.\delta) = 2g.n;$$

si donc  $g \neq 0$ ,  $n.\delta$  ne peut être l'élément 0 de l'anneau  $\mathcal{A}$  des classes de correspondances que si l'on a  $n = 0$ . Il s'ensuit que, pour  $g \neq 0$ , l'ensemble des éléments  $n.\delta$  forme un sous-anneau de  $\mathcal{A}$ , isomorphe à l'anneau des entiers rationnels. On voit en particulier que, pour  $g \neq 0$ , l'anneau  $\mathcal{A}$  a des éléments autres que 0. En revanche, il résulte du corollaire du th. 5, § 1, n<sup>o</sup> 3, et de la remarque finale du § 1, n<sup>o</sup> 7, de la 1<sup>ère</sup> partie, que, si  $g = 0$ , l'anneau  $\mathcal{A}$  se réduit à l'élément 0 ; c'est là, du point de vue des questions qui nous occupent, un cas trivial qui sera désormais laissé de côté ; autrement dit, nous supposons à partir de maintenant, une fois pour toutes, que la courbe  $\Gamma$  est de genre  $g \geq 1$ .

8. Dans ce qui va suivre, nous aurons besoin du résultat auxiliaire suivant :

LEMME 1. — Soient  $\varphi_i$ , pour  $1 \leq i \leq d$ , des fonctions sur  $\Gamma$ , ayant un corps  $K$  pour corps de définition, et linéairement indépendantes sur le corps  $K$ . Soient  $M_1, \dots, M_d$   $d$  points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ . Alors il n'existe aucune combinaison linéaire  $\varphi = \sum_{i=1}^d c_i \varphi_i$  des  $\varphi_i$ , à coefficients  $c_i$  constants et non tous nuls telle que l'on ait  $\varphi(M_j) = 0$  pour  $1 \leq j \leq d$ ; et le déterminant  $|\varphi_i(M_j)|$  pour  $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d$ , n'est pas nul.

Supposons qu'il existe une fonction  $\varphi$  avec les propriétés ci-dessus, et supposons par exemple que  $c_1$  ne soit pas nul. Posons  $c'_k = c_k/c_1$  pour  $2 \leq h \leq d$ , et  $\psi = \varphi + \sum_{h=2}^d c'_h \varphi_h$ ; alors le corps  $K(c'_2, \dots, c'_d)$  est un corps de définition pour  $\psi$ ; comme on a  $\psi(M_i) = 0$  pour  $1 \leq i \leq d$ , les  $M_i$  sont des composants du diviseur  $(\psi)$ , et doivent par conséquent être algébriques sur  $K(c'_2, \dots, c'_d)$ ; comme ce dernier corps a au plus la dimension  $d-1$  sur  $K$ , le corps  $K(M_1, \dots, M_d)$  a donc aussi au plus la dimension  $d-1$  sur  $K$ , ce qui contredit l'hypothèse faite sur les  $M_i$ . Si maintenant on avait  $|\varphi_i(M_j)| = 0$ , on pourrait trouver, dans le corps  $K(M_1, \dots, M_d)$ , des quantités  $c_i$  non toutes nulles, telles qu'en posant  $\varphi = \sum_i c_i \varphi_i$ , on ait  $\varphi(M_j) = 0$  pour  $1 \leq j \leq d$ ; ceci contredirait ce qu'on vient de démontrer.

Nous passons maintenant à l'application du théorème de Riemann-Roch à la théorie des correspondances. Cette application se fait par l'intermédiaire du résultat suivant :

PROPOSITION 3. — Dans toute classe de correspondances, il existe une correspondance positive  $X$ , sans composante de la forme  $A \times \Gamma$ , telle que l'on ait  $d(X) = g$  et telle de plus que, si  $K$  est un corps par rapport auquel  $X$  soit rationnel, et  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ , le diviseur  $X(M)$  soit de la forme

$$X(M) = \sum_{i=1}^g N_i,$$

où les  $N_i$  sont  $g$  points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport au corps de base  $k$ .

Soit  $X_1$  une correspondance quelconque : posons  $d = d(X_1)$ . Soit  $\mathfrak{a}$  un diviseur de degré  $d$  sur  $\Gamma$ . Soit  $K_1$  un corps par rapport auquel  $X_1$  et  $\mathfrak{a}$  soient rationnels ; soient  $M, M_1, \dots, M_g$   $g+1$  points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K_1$ ; et posons

$$K = K_1(M_1, \dots, M_g).$$

Considérons le diviseur  $\mathfrak{m}_1 = X_1(M) - \mathfrak{a} + \sum_{i=1}^g M_i$  : il est de degré  $g$ , et rationnel par rapport à  $K(M)$  : d'après le théorème de Riemann-Roch, on a  $l(\mathfrak{m}_1) > 0$ , donc

il existe au moins une fonction  $\varphi$  ayant  $K(M)$  pour corps de définition, telle que  $(\varphi) \succ -\mathfrak{m}_1$ . Posons

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + (\varphi);$$

$\mathfrak{m}$  est alors un diviseur positif de degré  $g$ , rationnel par rapport à  $K(M)$  : d'après le th. 2, il existe donc une correspondance positive  $X$ , sans composante de la forme  $A \times \Gamma$ , rationnelle par rapport à  $K$ , et telle que  $X(M) = \mathfrak{m}$ . Posons  $Z = X - X_1 + \Gamma \times (\mathfrak{a} - \sum_i M_i)$  ; la correspondance  $Z$  est rationnelle par rapport à  $K$ , et l'on a

$$Z(M) = \mathfrak{m} - \mathfrak{m}_1 = (\varphi) \sim 0.$$

donc, d'après le th. 5,  $Z \equiv 0$ , d'où  $X \equiv X_1$ . Posons maintenant

$$\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^g N_i;$$

$\mathfrak{m}$  est alors rationnel sur le corps  $K_2 = K(M, N_1, \dots, N_g)$  ; il en est donc de même du diviseur  $\mathfrak{b} = \mathfrak{m} - X_1(M) + \mathfrak{a}$ . On a

$$(1/\varphi) = \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m} = \sum_{i=1}^g M_i - \mathfrak{b},$$

donc  $\sum_i M_i \sim \mathfrak{b}$ . Mais, d'après la prop. 8 de la 1<sup>ère</sup> partie, § 1, n<sup>o</sup> 4 (ou encore, comme il est facile de le vérifier, d'après le lemme 1 ci-dessus et le théorème de Riemann-Roch), on a  $l\left(\sum_i M_i\right) = 1$  ; on a donc aussi  $l(\mathfrak{b}) = 1$ . Puisque  $\mathfrak{b}$  est rationnel par rapport à  $K_2$ , il y a donc une fonction  $\psi$  sur  $\Gamma$ , ayant  $K_2$  pour corps de définition, telle que l'on ait  $(\psi) \succ -\mathfrak{b}$ , et toute fonction du module  $L(\mathfrak{b})$  ne peut différer de  $\psi$  que par un facteur constant ; comme  $1/\varphi$  est une telle fonction, on a donc  $(1/\varphi) = (\psi)$ , d'où  $\sum_i M_i = (\psi) + \mathfrak{b}$  ; le diviseur  $\sum_i M_i$  est donc rationnel par rapport à  $K_2$ . Il s'ensuit que chacun des  $M_i$  est algébrique sur le corps  $K_2 = K_1(M, N_1, \dots, N_g)$  ; si alors la dimension de ce dernier corps sur  $K_1(M)$  était moindre que  $g$ , il en serait de même de celle de  $K_1(M, M_1, \dots, M_g)$  sur  $K_1(M)$ , ce qui serait contraire à nos hypothèses sur les points  $M, M_1, \dots, M_g$ . Par conséquent les  $N_i$  sont des points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K_1(M)$  et a fortiori par rapport au corps de base  $k$ . Soit maintenant  $K'$  l'un quelconque des corps par rapport auxquels  $X$  est rationnel : soit  $M'$  un point générique quelconque de  $\Gamma$  par rapport à  $K'$ , et posons  $X(M') = \sum_i N'_i$ .

Alors, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 13,  $\sum_i N_i$  est une spécialisation de  $\sum_i N'_i$ , par rapport à  $K'$ , donc a fortiori par rapport à  $k$  ; si donc les  $N'_i$  n'étaient pas des points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $k$ , c'est-à-dire si la dimension de  $(N'_1, \dots, N'_g)$  sur  $k$  était moindre que  $g$ , il en serait de même a fortiori de celle de  $(N_1, \dots, N_g)$  sur  $k$ ,

ce qui contredirait ce que nous venons de démontrer. Ceci achève la démonstration de notre proposition. Remarquons en outre que, d'après ce qui précède,  $M$  et  $N_i$  sont, quel que soit  $i$ , des points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K_1$ , c'est-à-dire que chacun des points  $M \times N_i$  a la dimension 2 sur le corps  $K_1$  ; il en est donc de même de toute spécialisation générique de l'un des  $M \times N_i$  par rapport à  $K_1$ , et à fortiori de toute spécialisation générique de l'un des  $M \times N_i$  par rapport à  $K$ . Or, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 12, (i), appliqué à chacun des cycles premiers rationnels par rapport à  $K(M)$  qui figurent dans l'expression de  $\mathfrak{m}$  au moyen de tels cycles (F-VII<sub>6</sub>, th. 9), chaque composante de  $X$  est le lieu, par rapport au corps  $K$ , de l'un des points  $M \times N_i$  ou d'une spécialisation générique de l'un de ces points par rapport à  $K$  : si alors une telle composante était algébrique par rapport à  $K_1$ , ce serait le lieu du même point par rapport à  $\overline{K}_1$ , ce qui est impossible, puisque la dimension d'un tel point par rapport à  $K_1$  est 2.

Aucune composante de  $X$  n'est donc algébrique par rapport à  $K_1$ . Comme d'ailleurs, dans ce qui précède, on peut prendre pour  $K_1$  n'importe quel corps par rapport auquel  $X_1$  et  $\mathfrak{a}$  soient rationnels, on peut supposer que  $K_1$  contient un corps arbitrairement donné à l'avance. Il résulte donc de notre démonstration qu'il existe, dans toute classe de correspondances, une correspondance dont aucune composante ne soit algébrique par rapport à un corps donné. Cette remarque nous servira dans la démonstration du th. 11 (§ III, n° 15).

9. La prop. 3 montre en particulier que, si  $g = 1$ , il existe, dans toute classe de correspondances, une correspondance positive  $X$  telle que  $d(X) = 1$  : on déduit facilement de là les principales propriétés élémentaires de l'anneau des classes de correspondances sur une courbe de genre 1, telles qu'elles ont déjà été établies par Hasse dans des travaux bien connus. Pour cela, nous nous servons du résultat suivant valable pour les courbes de genre quelconque.

PROPOSITION 4. — Soit  $X$  une correspondance positive, sans composante de la forme  $A \times \Gamma$ , et telle que l'on ait  $d(X) = 1$ . Alors on a  $X \circ X' = d'(X) \cdot \Delta$ .

Posons  $e = d'(X)$ , et soit  $P$  un point quelconque de  $\Gamma$ . Alors, d'après le th. 3 du § 1, n° 2,  $X'(P)$  est un diviseur positif de degré  $e$ , qu'on peut écrire sous la forme  $X'(P) = \sum_{i=1}^e Q_i$  : et l'on a alors

$$X.(\Gamma \times P) = \sum_i Q_i \times P,$$

de sorte que chacun des points  $Q_i \times P$  est contenu dans une composante de  $X$ . D'autre part, d'après le même théorème,  $X(Q_i)$  est un diviseur positif de degré 1, donc réduit à un point : comme on a  $X.(Q_i \times \Gamma) = Q_i \times X(Q_i)$ , et que  $Q_i \times P$  est contenu



dans  $X$  et dans  $Q_i \times \Gamma$ ,  $P$  est un composant de  $X(Q_i)$ , de sorte qu'on a  $X(Q_i) = P$  pour  $1 \leq i \leq e$ , et par conséquent  $X[X'(P)] = e.P$ . Si donc on pose  $Z = e.\Delta$ , on a bien  $Z(P) = X[X'(P)]$  quel que soit  $P$  ; comme on a d'autre part  $Z' = Z$  et  $(X \circ X')' = X \circ X'$ , il en résulte bien, par définition de  $X \circ X'$ , que  $Z = X \circ X'$ .

THÉORÈME 9. — Si  $g = 1$ , et si  $\xi$  est un élément quelconque, autre que 0, de l'anneau  $\mathcal{A}$  des classes de correspondances, on a

$$\xi \cdot \xi' = N.\delta,$$

$N$  étant un entier positif, et par suite  $\sigma(\xi \cdot \xi') = 2N > 0$ . De plus, on a quel que soit  $\xi$ ,  $\xi + \xi' = \sigma(\xi).\delta$ . Plus généralement, tout élément  $\zeta$  de l'anneau  $\mathcal{A}$ , tel que l'on ait  $\zeta' = \zeta$  est de la forme  $n.\delta$ , où  $n$  est un entier rationnel.

Si on applique la prop. 4 à la correspondance  $X$ , de classe  $\xi$ , dont l'existence résulte de la prop. 3, on voit qu'on a  $\xi \cdot \xi' = N.\delta$  avec  $N = d'(X) \geq 0$  ; d'ailleurs, une correspondance positive  $X$  pour laquelle on a  $d'(X) = 0$  est nécessairement, d'après le th. 2 du § 1, n° 2, de la forme  $\Gamma \times \mathfrak{a}$ , donc de classe 0, de sorte qu'on a  $N > 0$  si  $\xi \neq 0$ . Il suit de là qu'on a aussi  $(\xi + \delta).\xi' + \delta = N'.\delta$ , avec  $N' \geq 0$ , donc  $\xi + \xi' = (N' - N - 1).\delta$ , d'où

$$\sigma(\xi) = \sigma(\xi') = 1/2.(N' - N - 1).\sigma(\delta)$$

et par suite  $N' - N - 1 = \sigma(\xi)$ . Soit alors  $\zeta$  tel que  $\zeta' = \zeta$  ; on a donc, d'après ce qui précède,  $2\zeta = \sigma(\zeta).\delta$  ; il s'ensuit qu'il y a un entier  $n$  tel qu'en posant  $\zeta_1 = \zeta - n.\delta$ , on ait, suivant que  $\sigma(\zeta)$  est pair ou impair, soit  $2\zeta_1 = 0$ , soit  $2\zeta_1 = \delta$  : dans le premier cas, on a  $0 = \sigma(2\zeta_1.2\zeta'_1) = 4\sigma(\zeta_1\zeta'_1)$ , donc  $\zeta_1 = 0$  ; dans le second cas, on a  $2\zeta_1.2\zeta'_1 = \delta$ , donc  $4\sigma(\zeta_1\zeta'_1) = \sigma(\delta) = 2$ , ce qui est impossible. On a donc  $\zeta_1 = 0$ , d'où  $\zeta = n.\delta$ . Observons que l'entier  $N$ , attaché au moyen de la première formule de notre théorème à tout élément  $\xi$  de  $\mathcal{A}$ , n'est autre que l'invariant fondamental  $N(\mu)$  employé par Hasse dans les travaux auxquels nous avons fait allusion plus haut.

10. Passons à l'étude des courbes de genre quelconque. Soit d'abord, d'une manière générale,  $X$  une correspondance positive, rationnelle par rapport à un corps  $K$ , et sans composante de la forme  $A \times \Gamma$ . Posons  $d(X) = d, d'(X) = e$ . Soit  $M$  un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ , et posons  $X(M) = \sum_{i=1}^d N_i$ . Posons d'autre part  $U = (\Gamma \times X).(X' \times \Gamma)$  ; ce cycle est bien défini sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ , car, si  $\Gamma \times X$  et  $X' \times \Gamma$  avaient une composante commune, celle-ci serait de la forme  $\Gamma \times A \times \Gamma$ , et  $A \times \Gamma$  serait une composante de  $X$ . Cela étant,  $U$  est un cycle rationnel par rapport à  $K$ , et l'on a, d'après le th. 6 du § 1, n° 4,  $X \circ X' = pr_{13}U$ . Calculons le cycle  $U.(\Gamma \times M \times \Gamma)$  ; il est défini, en vertu de F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (ii) ; de plus, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (ii) et

F-VII<sub>6</sub>, th. 11, les cycles  $\Gamma \times M \times \Gamma$  et  $\Gamma \times X$  se coupent proprement sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  et l'on a

$$(\Gamma \times M \times \Gamma).(\Gamma \times X) = \Gamma \times M \times X(M);$$

il s'ensuit, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 10, cor., qu'on a

$$U.(\Gamma \times M \times \Gamma) = [\Gamma \times M \times X(M)].(X' \times \Gamma),$$

donc, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 11,

$$U.(\Gamma \times M \times \Gamma) = [(\Gamma \times M).X'] \times X(M).$$

On a d'autre part  $(\Gamma \times M).X' = [(M \times \Gamma).X]' = X(M) \times M$ . Par conséquent, on a  $U.(\Gamma \times M \times \Gamma) = X(M) \times M \times X(M)$ . Désignons maintenant par  $\tilde{U}$  le cycle transformé de  $U$  par la correspondance birationnelle entre le produit  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  et lui-même qui échange entre eux les deux premiers facteurs de ce produit ; on a alors

$$X \circ X' = pr_{23}\tilde{U}, \quad \text{et} \quad \tilde{U}.(M \times \Gamma \times \Gamma) = M \times X(M) \times X(M).$$

D'ailleurs  $\tilde{U}$  est un cycle positif, dont aucune composante n'a, sur le premier facteur de  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ , une projection réduite à un point : en effet, si une composante de  $\tilde{U}$  avait, sur ce facteur, une projection réduite à un point  $A$ , elle serait contenue dans  $A \times \Gamma \times \Gamma$  et  $U$  aurait donc une composante  $W$  contenue dans  $\Gamma \times A \times \Gamma$  ;  $W$  serait aussi contenue dans une composante de  $\Gamma \times X$ , donc, puisque  $X \succ 0$ , dans une composante de  $(\Gamma \times A \times \Gamma).(\Gamma \times X) = \Gamma \times A \times X(A)$ , de sorte que sa projection sur le troisième facteur de  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  serait l'un des composants  $B$  de  $X(A)$  ; on voit de même que la projection de  $W$  sur le premier facteur du même produit serait un point  $C$ , de sorte que  $W$  devrait se réduire au point  $C \times A \times B$ , ce qui est impossible puisque  $U$  est de dimension 1.

On voit donc que  $\tilde{U}$  est un cycle rationnel par rapport à  $K$ , dont aucune composante n'a, sur le premier facteur de  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ , une projection réduite à un point, et qu'on a

$$\tilde{U}.(M \times \Gamma \times \Gamma) = M \times X(M) \times X(M);$$

et, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (iii),  $\tilde{U}$  est caractérisé d'une manière unique par ces propriétés. Avec les notations de ce théorème, nous pouvons écrire

$$\tilde{U}(M) = X(M) \times X(M) = \sum_{i,j} N_i \times N_j = \sum_i N_i \times N_i + \sum_{i \neq j} N_i \times N_j.$$

Mais, puisque le cycle  $X(M) = \sum_i N_i$  est rationnel par rapport à  $K(M)$ , il en est de même, en vertu des définitions, du cycle  $\sum_i N_i \times N_i$  ; il suit alors de là et de la formule

qui précède (ou bien de F-VII<sub>6</sub>, pr. 18) que le cycle  $\sum_{i \neq j} N_i \times N_j$  aussi est rationnel par rapport à  $K(M)$ . D'après F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (iii), il existe donc sur  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  deux cycles  $V_0$  et  $V_1$  rationnels par rapport à  $K$  et dont aucune composante n'a sur le premier facteur de  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  une projection réduite à un point, tels respectivement que l'on ait

$$V_0(M) = \sum_i N_i \times N_i, \quad \text{et} \quad V_1(M) = \sum_{i \neq j} N_i \times N_j ;$$

et, d'après ce même théorème, on a alors  $\tilde{U} = V_0 + V_1$ , donc, d'après ce qui précède,  $X \circ X' = pr_{23}(V_0) + pr_{23}(V_1)$ . Si de plus  $\Lambda$  est l'une quelconque des composantes de  $V_0$ , il résulte de F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (i) que  $\Lambda$  est le lieu de l'un des points  $M \times N_i \times N_i$ , par rapport à  $K$ , ou le conjugué de l'un de ces lieux sur le corps  $K$  ; de toute manière,  $\Lambda$  est donc contenue dans  $\Gamma \times \Delta$ , de sorte que la projection de  $\Lambda$  sur le produit des deux derniers facteurs de  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  est contenue dans  $\Delta$  : on a donc  $pr_{23}(V_0) = m.\Delta$ ,  $m$  étant un certain entier ; et l'on a alors  $pr_2(V_0) = m.\Gamma$ . Mais, si on applique l'opérateur  $pr_{12}$  aux deux membres de la relation  $\sum_i M \times N_i \times N_i = V_0.(M \times \Gamma \times \Gamma)$ , on obtient, en vertu de F-VII<sub>6</sub>, th. 16,  $\sum_i M \times N_i = pr_{12}(V_0).(M \times \Gamma)$ , donc, d'après le th. 2 du § I, n° 2, et en tenant compte de ce qui précède,  $pr_{12}(V_0) = X$ , d'où  $pr_2(V_0) = pr_2(X) = e.\Gamma$  ; ceci donne  $m = e$ , et par conséquent  $pr_{23}(V_0) = e.\Delta$ . Nous avons donc démontré qu'on a  $X \circ X' = e.\Delta + pr_{23}(V_1)$ .

11. Si, dans ce qui précède, on suppose qu'on a  $d = 1$ , on a  $V_1(M) = 0$ , donc  $V_1 = 0$  et  $X \circ X' = e.\Delta$  ; on retrouve ainsi le résultat de la prop 4 du n° 9. Supposons donc, à partir de maintenant, qu'on a  $d \geq 2$ . Sur la variété  $\Pi = \Gamma \times \Gamma \times \dots \times \Gamma$ , produit de  $d + 1$  facteurs identiques à  $\Gamma$ , il existe, en vertu de F-VII<sub>6</sub>, pr. 18, et de F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (iii), un cycle positif  $Z$ , rationnel par rapport à  $K$ , dont aucune composante n'ait sur le premier facteur du produit  $\Pi$  une projection réduite à un point, et satisfaisant à la relation

$$Z.(M \times \Gamma \times \dots \times \Gamma) = M \times \sum_{(i)} N_{i_1} \times N_{i_2} \times \dots \times N_{i_d},$$

la somme du second membre étant étendue aux  $d !$  permutations  $(i_1, \dots, i_d)$  des entiers  $(1, 2, \dots, d)$ . Nous allons montrer que la projection algébrique de  $Z$  sur le produit partiel de  $\Pi$  formé des trois premiers facteurs est donnée par  $pr_{123}Z = (d - 2) ! V_1$ ,  $V_1$  étant le cycle défini au n° 10. Soit en effet  $V_2 = pr_{123}Z$  ; en appliquant à la relation  $Z.(M \times \Gamma \times \dots \times \Gamma) = M \times \sum_{(i)} N_{i_1} \times \dots \times N_{i_d}$ , l'opérateur  $pr_{123}$ , on obtient, d'après

F-VII<sub>6</sub>, th. 16,

$$V_2.(M \times \Gamma \times \Gamma) = (d - 2) ! M \times \sum_{i \neq j} N_i \times N_j,$$

c'est-à-dire  $V_2.(M \times \Gamma \times \Gamma) = (d - 2) ! V_1.(M \times \Gamma \times \Gamma)$ . De plus, d'après la définition de  $Z$ ,  $V_2$  ne peut avoir de composante dont la projection sur le premier facteur

de  $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$  soit réduite à un point. D'après F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (iii), on a donc bien  $V_2 = (d-2)! V_1$ . Il s'ensuit que l'on a  $pr_{23}Z = (d-2)! pr_{23}(V_1)$ . Si donc on pose  $Y = pr_{23}(V_1)$ , on a d'une part  $pr_{23}Z = (d-2)! Y$ , et de l'autre, d'après ce qu'on a démontré plus haut,  $Y = X \circ X' - e.\Delta$ .

Posons maintenant  $T = pr_{2,3,\dots,d+1}(Z)$  : en d'autres termes, désignons par  $T$  la projection algébrique du cycle  $Z$  sur le produit partiel de  $\Pi$  formé des  $d$  derniers facteurs. Nous avons alors  $pr_{23}T = (d-2)! Y$ . D'ailleurs  $Z$ , et par conséquent  $T$ , ne changent pas si on effectue sur les  $d$  derniers facteurs du produit  $\Pi$  une permutation quelconque : il s'ensuit qu'on a  $pr_{ij}T = (d-2)! Y$  pour tout couple d'indices distincts  $(i, j)$  pris parmi les entiers  $2, 3, \dots, d+1$ . De plus, en vertu de F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (i), appliqué aux cycles premiers rationnels par rapport à  $K(M)$  dont le cycle

$$\sum_{(i)} N_{i_1} \times \dots \times N_{i_d}$$

est combinaison linéaire, toute composante de  $Z$  est le lieu, par rapport à  $\overline{K}$ , de l'un des points  $M \times N_{i_1} \times \dots \times N_{i_d}$ , ou bien est le conjugué d'un tel lieu par rapport à  $K$ .

12. Nous avons ainsi défini, sur le produit  $\Omega = \Gamma \times \Gamma \times \dots \times \Gamma$  de  $d$  facteurs identiques à  $\Gamma$ , un cycle positif  $T$  dont la projection algébrique sur tout produit partiel de  $\Omega$  formé de deux facteurs soit le cycle  $(d-2)! Y$ . Comme c'est uniquement de  $\Omega$  qu'il va être question maintenant, et que nous n'avons plus besoin de la variété  $\Pi$ , nous numéroterons  $1, 2, \dots, d$  (au lieu de  $2, 3, \dots, d+1$ ) les facteurs du produit  $\Omega$ . On a donc, après ce changement de notation,  $pr_{ij}T = (d-2)! Y$  pour tout couple d'indices distincts  $(i, j)$  pris parmi les entiers  $1, 2, \dots, d$ . Comme d'ailleurs on a

$$d(Y) = d(X).d(X') - e = (d-1).e,$$

il s'ensuit qu'on a  $pr_i T = (d-1)! e.\Gamma$  pour  $1 \leq i \leq d$ .

Designons maintenant par  $\Delta_{12}$  la sous-variété du produit définie par  $\Delta_{12} = \Delta \times \Gamma \times \dots \times \Gamma$ , les facteurs  $\Gamma$  dans le second membre étant en nombre  $d-2$  ; et désignons par  $\Delta_g$  la variété qui se déduit de  $\Delta_{12}$  par une permutation des facteurs de  $\Omega$  qui transforme les premier et second facteurs en les  $i^{\text{ième}}$  et  $j^{\text{ième}}$  facteurs, respectivement ;  $\Delta_g$  est donc la sous-variété de  $\Omega$ , de dimension  $d-1$ , dont les points ont même projection sur le  $i^{\text{ième}}$  et sur le  $j^{\text{ième}}$  facteur de  $\Omega$ . Comme  $T$  n'est pas changé par une permutation des facteurs de  $\Omega$ , les cycles  $T.\Delta_g$  sont tous définis si l'un d'entre eux est défini, et ils ont alors tous même degré, égal par exemple au degré de

$$T.\Delta_{12} = T.(\Delta \times \Gamma \times \dots \times \Gamma).$$

Mais, en appliquant à ce dernier cycle l'opérateur  $pr_{12}$ , on obtient, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 16,  $pr_{12}(T.\Delta_{12}) = (pr_{12}T).\Delta = (d-2)! (Y.\Delta)$  ; si donc les cycles  $T.\Delta_{ij}$  sont

définis, ils sont tous de degré égal à  $(d-2)! \deg(Y.\Delta)$ .

Soit de même  $\mathfrak{d}$  un diviseur sur  $\Gamma$  ; désignons par  $D_1$  le diviseur sur  $\Omega$  défini par  $D_1 = \mathfrak{d} \times \Gamma \times \dots \times \Gamma$ , les facteurs  $\Gamma$  dans le second membre étant en nombre  $d-1$ , et par  $D_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, d$ , les diviseurs qui se déduisent de  $D_1$  par les permutations des facteurs de  $\Omega$  ; on a donc  $D_i = \Gamma \times \dots \times \Gamma \times \mathfrak{d} \times \Gamma \times \dots \times \Gamma$ , le second membre étant formé de  $i-1$  facteurs égaux à  $\Gamma$ , du facteur  $\mathfrak{d}$  et de  $d-i$  facteurs  $\Gamma$ , pris dans cet ordre. On voit comme plus haut, au moyen de F-VII<sub>6</sub>, th. 16, appliqué à l'opérateur  $pr_1$  et à la relation

$$T.D_1 = T.(\mathfrak{d} \times \Gamma \times \dots \times \Gamma),$$

et au moyen de la relation  $pr_1 T = (d-1)! e.\Gamma$ , que, si l'un des cycles  $T.D_i$  est défini, ils le sont tous, et qu'ils sont alors de degré égal à  $(d-1)! e. \deg(\mathfrak{d})$ .

13. Supposons maintenant qu'il existe  $d$  fonctions  $\varphi_i$  sur  $\Gamma$ , linéairement indépendantes sur le corps des constantes, ayant le corps  $K$  pour corps de définition, telles que l'on ait  $(\varphi_i) \succ -\mathfrak{d}$  pour  $1 \leq i \leq d$ ,  $\varphi_i(N_j) \neq \infty$  pour  $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d$ , et telles que déterminant  $|\varphi_i(N_j)|$  ne soit pas nul. Soient  $M_1, \dots, M_d$   $d$  points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ , de sorte que

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_d$$

est un point générique de  $\Omega$  par rapport à  $K$ . Considérons la fonction  $\Phi$  sur  $\Omega$ , définie par rapport à  $K$  par la relation

$$\Phi(M_1 \times \dots \times M_d) = |\varphi_i(M_j)|;$$

il résulte des hypothèses ci-dessus que  $\Phi$  est définie au point  $N_1 \times \dots \times N_d$ , et en chacun des points  $N_{i_1} \times \dots \times N_{i_d}$  qui se déduisent de celui-ci par une permutation des facteurs, et qu'elle prend en chacun de ces points une valeur finie non nulle. Comme on a vu que toute composante du cycle  $T$  est le lieu d'un de ces points par rapport à  $K$ , ou bien est le conjugué d'un tel lieu par rapport à  $K$ , il s'ensuit que  $\Phi$  est définie sur toute composante de  $T$  et induit sur chacune de ces composantes une fonction autre que la constante 0. En vertu de F-VIII<sub>2</sub>, th. 7, il suit de là que le cycle  $T.(\Phi)$  est défini sur  $\Omega$ , et que sa projection sur l'un quelconque des facteurs de  $\Omega$  est un diviseur équivalent à 0, donc de degré 0 ; par conséquent le cycle  $T.(\Phi)$  lui-même est de degré 0.

Nous allons maintenant faire voir qu'on a  $(\Phi) \succ \sum_{i \neq j} \Delta_{ij} - \sum_i D_i$ . Soit en effet  $(i) = (i_1, \dots, i_d)$  l'une quelconque des  $d!$  permutations de  $(1, 2, \dots, d)$  ; soit  $\Phi_{(i)}$  la fonction sur  $\Omega$ , définie par rapport à  $K$  par la relation  $\Phi_{(i)}(M_1 \times \dots \times M_d) = \varphi_{i_1}(M_1) \dots \varphi_{i_d}(M_d)$  ; il résulte de F-VIII<sub>2</sub>, th. 1, cor. 4, et de F-VIII<sub>2</sub>, th. 6, que l'on a

$$(\Phi_{(i)}) = (\varphi_{i_1}) \times \Gamma \times \dots \times \Gamma + \Gamma \times \varphi_{i_2} \times \dots \times \Gamma + \Gamma \times \dots \times \Gamma \times (\varphi_{i_d}),$$

et par conséquent  $(\Phi_{(i)}) \succ -\sum_i D_i$  ; comme  $\Phi$  elle-même est combinaison linéaire des  $\Phi_{(i)}$  avec des coefficients égaux à  $\pm 1$ , on a donc aussi, d'après F-VIII<sub>2</sub>, th. 6,  $(\Phi) \succ -\sum_i D_i$ . D'autre part, d'après F-VIII<sub>1</sub>, pr. 5,  $\Phi$  est définie sur chacune des variétés  $\Delta_{ij}$  ; considérons par exemple la variété  $\Delta_{12}$  ; le point  $M_1 \times M_1 \times M_3 \times \dots \times M_d$  est un point générique de  $\Delta_{12}$  par rapport à  $K$ , et la valeur de  $\Phi$  en ce point est un déterminant dont deux colonnes sont identiques et par suite s'annule ;  $\Delta_{12}$ , et de même tous les  $\Delta_{ij}$  sont donc des composantes du diviseur  $(\Phi)_0$  ; comme toutes ces variétés sont distinctes les unes des autres et distinctes aussi de toutes les variétés  $D_i$ , on a donc bien  $(\Phi) \succ \sum_{(i,j)} \Delta_{ij} - \sum_i D_i$ . Nous pouvons donc écrire  $(\Phi) = R + \sum_{(i,j)} \Delta_{ij} - \sum_i D_i$ ,  $R$  étant un diviseur positif. Comme les variétés  $\Delta_{ij}$  sont des composantes de  $(\Phi)$ , et qu'on a vu que le cycle  $T.(\Phi)$  est défini, les cycles  $T.\Delta_{ij}$  sont donc définis. Supposons d'autre part que les cycles  $T.D_i$  soient définis : d'après ce qu'on a vu sur les composantes de  $T$ , il faut et il suffit pour cela qu'aucun des points  $N_i$  ne soit un composant de  $\mathfrak{d}$ . Dans ces conditions, la relation  $R = (\Phi) - \sum_{(i,j)} \Delta_{ij} + \sum_i D_i$  implique que le cycle  $T.R$  est défini ; c'est alors nécessairement un cycle positif, puisque  $T$  et  $R$  sont positifs, de sorte qu'on a  $\deg(T.R) \geq 0$ .

On a donc

$$T.(\Phi) = T.R + \sum_{(i,j)} (T.\Delta_{ij}) - \sum_i (T.D_i), \quad \deg [T.(\Phi)] = 0,$$

$$\deg (T.R) \geq 0, \quad \deg (T.\Delta_{ij}) = (d-2)! \deg (Y.\Delta).$$

$$\deg(T.D_i) = (d-1)! e. \deg(\mathfrak{d}).$$

De toutes ces relations résulte qu'on a  $\deg(Y.\Delta) \leq 2e.\deg(\mathfrak{d})$ .

Mais on a  $X \circ X' = Y + e.\Delta$ , donc, si l'on désigne par  $\xi$  et  $\eta$ , respectivement, les classes des correspondances  $X$  et  $Y$ ,

$$\xi \cdot \xi' = \eta + e.\delta, \quad \text{d'où} \quad \sigma(\xi \cdot \xi') = \sigma(\eta) + 2eg ;$$

on a d'autre part, par définition,  $\sigma(\eta) = d(Y) + d'(Y) - \deg(Y.\Delta)$  ; comme on a déjà vu plus haut qu'on a  $d(Y) = d'(Y) = (d-1)e$ , on a donc  $\sigma(\eta) \geq 2e[d-1-\deg(\mathfrak{d})]$ , et par conséquent

$$\sigma(\xi \cdot \xi') \geq 2e[d+g-1-\deg(\mathfrak{d})].$$

14. Maintenant, supposant qu'on a  $g \geq 2$ , et supposant la classe  $\xi$  donnée, prenons pour  $X$  la correspondance de classe  $\xi$  dont l'existence résulte de la prop. 3 ; prenons pour  $\mathfrak{d}$  un diviseur canonique  $\mathfrak{k}$  sur  $\Gamma$ , rationnel par rapport au corps de base  $k$  ; et

prenons pour  $\varphi_1, \dots, \varphi_g$  une base du module  $L(\mathfrak{d}) = L(\mathfrak{k})$ , composée de  $g$  fonctions ayant  $k$  pour corps de définition (cf. 1<sup>ère</sup> partie, § 1. n° 3, prop. 3, et le corollaire du théorème de Riemann-Roch, ibid., n° 7). On a  $\deg(\mathfrak{k}) = 2g - 2$ . D'autre part, d'après la prop. 3, on a  $d = d(X) = g$  ; comme d'ailleurs, d'après la prop. 3, les  $N_i$  sont des points génériques indépendants de  $\Gamma$  par rapport à  $k$ , ils ne peuvent être des composantes de  $\mathfrak{k}$ , de sorte que les cycles  $T.D_i$  considérés ci-dessus sont bien définis ; pour une raison analogue, on a bien  $\varphi_i(N_j) \neq \infty$  pour  $1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g$  et il résulte du lemme 1 du n° 8 qu'on a  $|\varphi_i(N_j)| \neq 0$ . Toutes les hypothèses qui ont été introduites au cours de la discussion des n°s 10-13 au sujet de  $X$ , de  $\mathfrak{d}$ , et des  $\varphi_i$ , sont donc bien vérifiées ici. Il s'ensuit que l'inégalité finale du n° 13 est satisfaite si l'on y fait  $d = g$ , et  $\deg(\mathfrak{d}) = 2g - 2$ ,  $e$  désignant comme précédemment l'entier  $e = d'(X)$  défini au moyen de la correspondance  $X$  ci-dessus. On a donc  $\sigma(\xi \cdot \xi') \geq 2e$ . Mais,  $X$  étant une correspondance positive, on a  $e \geq 0$  ; et on ne peut avoir  $e = 0$ , en vertu du th. 2 du n° 2, que si  $X$  est de la forme  $\Gamma \times \mathfrak{a}$ , donc si l'on a  $\xi = 0$ . Il est donc démontré que, si  $g \geq 2$ , on a  $\sigma(\xi \cdot \xi') > 0$  pour  $\xi \neq 0$ . En tenant compte des résultats obtenus plus haut pour  $g = 1$  (th. 9 du n° 9) et pour  $g = 0$ , nous pouvons énoncer notre résultat sous une forme indépendante de la valeur de  $g$  :

THÉORÈME 10. — Quel que soit l'élément  $\xi$ , autre que 0, de l'anneau  $\mathcal{A}$  des classes de correspondances, on a  $\sigma(\xi \cdot \xi') > 0$ .

### § III. Conséquences de $\sigma(\xi\xi') > 0$ .

15. Le th. 10 va nous permettre en premier lieu d'établir la relation entre la notion d'équivalence des correspondances, telle qu'elle a été définie ci-dessus, et les notions d'"équivalence numérique" et d'"équivalence continue" (cf. F-IX<sub>7</sub>). Cette relation est donnée par les résultats suivants :

THÉORÈME 11. — Soit  $X$  une correspondance telle que  $X = 0$  ; alors il existe des entiers  $a, b$  tels que l'on ait, quelle que soit la correspondance  $Y.I(X.Y) = a.d(Y) + b.d'(Y)$ . Réciproquement, soit  $X$  une correspondance telle qu'il existe des entiers  $a, b$  et des courbes  $A_i$  en nombre fini sur  $\Gamma \times \Gamma$ , ayant la propriété suivante : quelle que soit la courbe  $B$  sur  $\Gamma \times \Gamma$ , distincte des  $A_i$  et des composantes de  $X$ , on a  $\deg(X.B) = a.d(B) + b.d'(B)$  ; alors on a  $X \equiv 0$ .

La première partie est une conséquence immédiate du th. 1, du th. 3 et des définitions ; on doit y prendre  $a = d'(X), b = d(X)$ . Quant à la réciproque, supposons d'abord qu'on a  $a = b = 0$ . Soit  $K$  un corps de définition commun pour les  $A_i$  et pour toutes les composantes de  $X$  : il résulte de la remarque qui termine la démonstration de la prop. 3 du n° 8 qu'il y a une correspondance  $Z$ , équivalente à  $X$ , dont aucune

composante n'est algébrique sur  $K$  ; les composantes de  $Z$  sont alors distinctes des  $A_i$  et des composantes de  $X$  de sorte que notre hypothèse sur  $X$  implique qu'on a

$$\deg (X.Z) = 0.$$

D'autre part, d'après notre hypothèse sur  $X$ , si  $M$  est un point générique de  $\Gamma$  par rapport à  $K$ , on a  $\deg[X.(M \times \Gamma)] = 0$ , donc, d'après le th. 3,  $d(X) = 0$  ; et l'on a de même  $d'(X) = 0$ . Soit alors  $\xi$  la classe de  $X$  ; comme on a  $Z \equiv X$ ,  $X \circ Z'$  est de classe  $\xi\xi'$ , et on a donc, d'après la prop. 2 du n° 5,

$$\sigma(\xi\xi') = d(X).d(Z') + d'(X).d'(Z') - \deg (X.Z) :$$

de plus, d'après ce qu'on vient de démontrer, le second membre de cette dernière relation est nul. On a donc  $\sigma(\xi\xi') = 0$ , d'où  $\xi = 0$ , c'est-à-dire  $X \equiv 0$ , d'après le th. 10. Ceci achève la démonstration dans le cas où l'on a  $a = b = 0$ . Si maintenant  $a$  et  $b$  ont des valeurs quelconques, il suffit, pour démontrer notre assertion, de prendre sur  $\Gamma$  des diviseurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de degrés respectifs  $a$  et  $b$ , et d'appliquer ce qui précède à  $X - \Gamma \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \Gamma$ .

THÉORÈME 12. — Soient  $W$  une variété,  $Z$  un diviseur sur le produit  $W \times \Gamma \times \Gamma$ , et  $P, Q$  deux points simples de  $W$  tels que les cycles  $Z.(P \times \Gamma \times \Gamma)$  et  $Z.(Q \times \Gamma \times \Gamma)$  soient définis sur  $W \times \Gamma \times \Gamma$ . Alors les correspondances  $X$  et  $Y$  respectivement définies par

$$Z.(P \times \Gamma \times \Gamma) = P \times X \quad \text{et par} \quad Z.(Q \times \Gamma \times \Gamma) = Q \times Y$$

sont équivalentes.

Par linéarité, il suffit de considérer le cas où  $Z$  se réduit à une variété. D'autre part, d'après le th. 11, il suffira de montrer que, si  $A$  est une courbe quelconque sur  $\Gamma \times \Gamma$ , distincte des composantes de  $X$  et de  $Y$ , on a  $\deg (X.A) = \deg (Y.A)$ . Considérons en effet, sur  $W \times \Gamma \times \Gamma$ , les trois variétés  $Z$ ,  $P \times \Gamma \times \Gamma$  et  $W \times A$  ;  $Z.(P \times \Gamma \times \Gamma)$  est défini par hypothèse ;  $(P \times \Gamma \times \Gamma).(W \times A)$  est défini et égal à  $P \times A$  d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 11 ; et  $Z.(W \times A)$  est défini car autrement, d'après F-VII<sub>6</sub>, pr. 16, on aurait  $Z = W \times A$ , donc

$$Z.(P \times \Gamma \times \Gamma) = P \times A$$

d'où  $X = A$ . contrairement à l'hypothèse que  $A$  n'est pas une composante de  $X$ . De plus,  $Z$  et  $P \times A$  se coupent proprement sur  $W \times \Gamma \times \Gamma$ , car autrement, d'après F-VII<sub>6</sub>, pr. 16,  $P \times A$  devrait être contenu dans  $Z$ , et serait donc une composante de  $Z.(P \times \Gamma \times \Gamma)$ , de sorte que  $A$  serait une composante de  $X$ . Il suit de là qu'on peut appliquer à  $Z.P \times \Gamma \times \Gamma$  et  $W \times A$  le principe d'associativité des intersections [F-VII<sub>3</sub>, th. 10 (v)] si l'on pose  $U = Z.(W \times A)$ , il s'ensuit qu'on a  $(W \times A).(P \times X) = U.(P \times \Gamma \times \Gamma)$ , c'est-à-dire  $P \times (A.X) = U.(P \times \Gamma \times \Gamma)$ , ou, avec les notations de F-VII<sub>6</sub>, th. 13,



$A.X = U(P)$ . On voit de même qu'on a  $A.Y = U(Q)$ , Il résulte de là, et de F-VII<sub>6</sub>, th. 13, que les cycles  $A.X = U(P)$  et  $A.Y = U(Q)$ , étant tous deux spécialisations d'un même cycle de dimension 0, ont même degré, on peut aussi se servir de F-VII<sub>6</sub>, th. 15, d'où résulte que, si on définit un entier  $m$  par  $pr_w U = m.W$ , on a  $\deg [U(P)] = \deg [U(Q)] = m$ . On a donc bien, dans les conditions indiquées,  $\deg (A.X) = \deg (A.Y)$ , ce qui, comme nous l'avons dit, démontre notre théorème.

COROLLAIRE. — Dans toute classe de correspondances, il existe une correspondance rationnelle par rapport au corps  $\bar{k}$ .

Nous allons montrer d'abord que, si  $K$  est un corps,  $K(u)$  une extension de  $K$  de dimension 1, et  $X$  une correspondance rationnelle par rapport à  $K(u)$ , il existe une correspondance  $X_1$ , équivalente à  $X$ , et rationnelle par rapport à  $\bar{K}$ . Soit en effet  $C$  la courbe lieu du point  $(u)$  par rapport au corps  $\bar{K}$  ; d'après F-IV<sub>1</sub>, pr. 3, et F-IV<sub>6</sub>, th. 12, il existe sur  $C$  un point simple  $(u')$  algébrique par rapport à  $K$ . Sur  $C \times \Gamma \times \Gamma$ , il existe, d'après F-VII<sub>6</sub>, th. 12 (iii), un cycle  $Z$ , rationnel par rapport à  $K$ , tel que l'on ait

$$Z.[(u) \times \Gamma \times \Gamma] = (u) \times X,$$

et sans composante dont la projection sur  $C$  soit réduite à un point. La variété  $(u') \times \Gamma \times \Gamma$  n'est donc pas une composante de  $Z$ , et par suite, d'après F-VII<sub>6</sub>, pr. 16, le cycle  $Z.[(u') \times \Gamma \times \Gamma]$  est défini ; il est alors de la forme  $(u') \times X_1$ ,  $X_1$  étant une correspondance rationnelle par rapport à  $K$ , et équivalente à  $X$  en vertu du th. 12 ; ceci démontre l'assertion faite plus haut. Soit maintenant  $X$  une correspondance quelconque d'après F-VII<sub>1</sub>, th. 3. cor., il y a un plus petit corps (contenant, comme il est toujours implicitement supposé, le corps de base  $k$ ) qui soit corps de définition pour toutes les composantes de  $X$  : de plus, ce corps est une extension de  $k$ , engendrée sur  $k$  par des quantités en nombre fini : soit  $n$  sa dimension sur  $k$ . Il résulte alors de ce qui précède, par récurrence sur  $n$ , que  $X$  est équivalente à une correspondance rationnelle par rapport à  $k$ .

16. Il résulte de l'inégalité  $\sigma(\xi\xi') > 0$  pour  $\xi \neq 0$  que, si  $\xi$  est un élément quelconque, autre que 0, de l'anneau  $\mathcal{A}$  des classes de correspondances, et si  $n$  est un entier rationnel non nul, on a  $n.\xi \neq 0$ . Autrement dit, le groupe additif des éléments de  $\mathcal{A}$  n'a pas d'élément d'ordre fini.

On sait qu'on peut alors, comme suit, plonger  $\mathcal{A}$  dans un anneau qui soit aussi un module sur le corps des rationnels. Considérons l'ensemble des couples  $(\xi, n)$  d'un élément  $\xi$  de  $\mathcal{A}$  et d'un entier  $n$  non nul ; la relation  $n_2\xi_1 = n_1\xi_2$  entre éléments  $(\xi_1, n_1)$  et  $(\xi_2, n_2)$  de cet ensemble est une relation d'équivalence ; car elle est réflexive et symétrique et, si l'on a  $n_2\xi_1 = n_1\xi_2$  et  $n_3\xi_2 = n_2\xi_3$ , on a

$$n_2(n_3\xi_1 - n_1\xi_3) = 0,$$

donc, d'après ce qui précède,  $n_3\xi_1 = n_1\xi_3$ . On note alors  $\xi/n$  la classe d'équivalence à laquelle appartient, par rapport à la relation ainsi définie, l'élément  $(\xi, n)$ . Alors, comme il est facile de le vérifier, si  $\xi/n$  et  $\eta/m$  sont de telles classes, les classes  $(n\eta + m\xi)/nm$  et  $\xi\eta/nm$  dépendent seulement des classes  $\xi/n$  et  $\eta/m$  ; et les opérations sur les classes qui sont ainsi définies ont toutes les propriétés requises de l'addition et de la multiplication dans un anneau. Soit  $\mathcal{A}_0$  l'anneau dont les éléments sont les classes  $\xi/n$ , et dont les opérations d'addition et de multiplication sont celles qu'on vient de définir ; les éléments de  $\mathcal{A}_0$  de la forme  $\xi/1$  forment un sous-anneau de  $\mathcal{A}_0$ , isomorphe à l'anneau  $\mathcal{A}$ , qui sera identifié avec celui-ci. D'autre part, si  $\xi/n$  est un élément de  $\mathcal{A}_0$ , et si  $\rho = r/s$  est un nombre rationnel,  $r$  et  $s$  étant des entiers rationnels dont le second n'est pas nul, il est facile de voir que l'élément  $(r\xi)/(sn)$  de  $\mathcal{A}_0$  ne dépend que de  $\rho$  et de  $\xi/n$  ; on l'écrira  $\rho.(\xi/n)$  ; on vérifie facilement aussi que  $\mathcal{A}_0$  se trouve ainsi défini comme module sur le corps des rationnels, et que les éléments  $\rho.\delta$  de  $\mathcal{A}_0$ , quand  $\rho$  parcourt le corps des rationnels, forment un sous-anneau de  $\mathcal{A}_0$  isomorphe à ce dernier corps. On étendra l'anti-involution  $\xi \rightarrow \xi'$ , et la trace  $\sigma(\xi)$ , à l'anneau  $\mathcal{A}_0$ , en posant

$$(\xi/n)' = \xi'/n, \quad \text{et} \quad \sigma(\xi/n) = \sigma(\xi)/n ; ;$$

il est clair que toutes les propriétés principales de ces deux symboles, telles qu'elles ont été établies plus haut, s'étendent immédiatement à l'anneau  $\mathcal{A}_0$ .

L'anneau  $\mathcal{A}_0$  étant un module sur le corps des rationnels, il possède sur ce corps une base formée d'éléments  $\alpha$ , linéairement indépendants, en nombre égal à son rang, fini ou infini (on démontrera d'ailleurs plus tard que ce rang est toujours fini). La loi de multiplication dans  $\mathcal{A}_0$  peut alors être définie par la table de multiplication des  $\alpha_\rho$  qui est de la forme  $\alpha_\mu\alpha_\nu = \sum_{\rho} c_{\mu\nu\rho}\alpha_\rho$ , les seconds membres étant des sommes à coefficients rationnels, contenant au plus un nombre fini de termes non nuls. Cela posé, on désignera par  $\mathcal{A}_c$  l'anneau dont le groupe additif est un module sur le corps des nombres complexes, ayant pour base l'ensemble des  $\alpha_\nu$ , la table de multiplication des  $\alpha_\nu$  étant la même que dans  $\mathcal{A}_0$ . Si alors  $\alpha$  est un élément quelconque de  $\mathcal{A}_c$ , défini par conséquent par une somme finie  $\alpha = \sum_{\nu} u_\nu\alpha_\nu$  à coefficients complexes  $u_\nu$ , on posera  $\alpha' = \sum_{\nu} \bar{u}_\nu\alpha'_\nu$  (en désignant comme d'habitude par  $\bar{u}_\nu$  l'imaginaire conjugué de  $u_\nu$ ), et  $\sigma(\alpha) = \sum_{\nu} u_\nu.\sigma(\alpha_\nu)$ . Dans ces conditions, l'application  $\alpha \rightarrow \alpha'$  est une anti-involution de l'anneau  $\mathcal{A}_c$ . Quant à la trace  $\sigma$ , il est clair que c'est une fonction linéaire à valeurs complexes, et qu'on a  $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\beta\alpha)$  et  $\sigma(\alpha') = \overline{\sigma(\alpha)}$  quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathcal{A}_c$ . De plus, on a aussi  $\sigma(\alpha\alpha') > 0$  quel que soit  $\alpha$  autre que 0, dans  $\mathcal{A}_c$ . Si en effet  $\alpha$  est un élément de  $\mathcal{A}_c$ , autre que 0, on peut l'écrire sous la forme  $\alpha = \sum_{\lambda} (u_\lambda + i.v_\lambda).\xi_\lambda$ , où les  $u_\lambda$  et  $v_\lambda$  sont des nombres réels non tous nuls et où les  $\xi_\lambda$  sont des éléments de  $\mathcal{A}$ . Posons  $F(u) = \sum_{\lambda,\mu} \sigma(\xi_\lambda, \xi'_\mu).u_\lambda u_\mu$  ; c'est là une forme quadratique à coefficients entiers, et il résulte du th. 10 (n° 14) qu'elle prend

des valeurs positives (non nulles) chaque fois qu'on donne aux  $u_\lambda$  des valeurs entières non nulles ; elle est donc définie positive. On a alors  $\sigma(\alpha\alpha') = F(u) + F(v) > 0$ .

De ce qui précède, on déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 5. — L'anneau  $\mathcal{A}_c$  ne contient pas d'élément symétrique nilpotent, autre que 0, c'est-à-dire qu'il ne contient pas d'élément  $\alpha \neq 0$  tel que l'on ait  $\alpha' = \alpha$ , et  $\alpha^n = 0$  pour  $n$  assez grand.

Supposons en effet qu'on ait  $\alpha = \alpha' \neq 0$  ; posons, pour  $m \geq 0$ ,  $\alpha_m = \alpha^{2^m}$  ; on a donc  $\alpha'_m = \alpha_m$  donc  $\alpha_{m+1} = \alpha_m \cdot \alpha'_m$ . On voit alors, par récurrence sur  $m$ , qu'on a  $\alpha_m \neq 0$  quel que soit  $m$  ; en effet, si  $\alpha_m \neq 0$ , on doit avoir  $\sigma(\alpha_m \cdot \alpha'_m) \neq 0$ , donc  $\alpha_{m+1} = \alpha_m \cdot \alpha'_m \neq 0$ .

Si donc  $\mathcal{B}$  est un sous-anneau symétrique de  $\mathcal{A}_c$  (c'est-à-dire un sous-anneau transformé en lui-même par la symétrie  $\alpha \rightarrow \alpha'$ ), il ne peut y avoir dans  $\mathcal{B}$  d'idéal autre que (0) dont tous les éléments soient nilpotents. En effet, soit  $\mathfrak{N}$  un tel idéal, par exemple un idéal à droite, et soit  $\eta$  un élément de  $\mathfrak{N}$  : alors  $\eta\eta'$  est symétrique et est dans  $\mathfrak{N}$ , donc nilpotent ; on a donc  $\eta\eta' = 0$  d'après la prop. 5, donc  $\sigma(\eta\eta') = 0$  et par suite  $\eta = 0$ . Si en particulier un sous-anneau symétrique de  $\mathcal{A}_c$  est un module de rang fini sur un certain corps, c'est une algèbre semi-simple sur ce corps.

17. Convenons pour un moment, pour abrégier le langage. d'appeler algèbre de type  $S$  une algèbre  $\mathcal{B}$  sur le corps des rationnels où sont définies une anti-involution  $\beta \rightarrow \beta'$  et une fonction  $\sigma(\beta)$  à valeurs complexes, cette dernière dépendant linéairement de  $\beta$  et satisfaisant aux conditions

$$\sigma(\beta_1, \beta_2) = \sigma(\beta_2, \beta_1), \quad \sigma(\beta') = \overline{\sigma(\beta)}, \quad \text{et} \quad \sigma(\beta\beta') > 0 \text{ pour } \beta \neq 0.$$

Il résulte du raisonnement ci-dessus que toute algèbre de type  $S$  est semi-simple. Toute algèbre de matrices à coefficients complexes, de rang fini sur le corps des rationnels, et douée de symétrie hermitienne (c'est-à-dire qui, en même temps qu'une matrice  $M$ , contient toujours la transposée  ${}^i\overline{M}$  de l'imaginaire conjuguée de  $M$ ), est de type  $S$  ; car l'anti-involution  $M \rightarrow {}^i\overline{M}$ , et la trace  $\text{Tr}(M)$ , y possèdent les propriétés requises ; en particulier, toute algèbre de groupe définie au moyen d'un groupe fini (sur le corps des rationnels, ou plus généralement sur un corps de nombres algébriques de degré fini qui soit son propre imaginaire conjugué) est donc de type  $S$ . Plus généralement, si  $S$  est une matrice hermitienne positive définie, toute algèbre de matrices à coefficients complexes, de rang fini sur le corps des rationnels, transformée en elle-même par l'anti-involution  $M \rightarrow M' = S \cdot {}^i\overline{M} \cdot S^{-1}$  est de type  $S$  si l'on prend pour trace la fonction  $\text{Tr}(S \cdot M)$  : ce cas se ramène d'ailleurs au précédent en écrivant  $S$  sous la forme  $S = X \cdot {}^i\overline{X}$  et passant à la représentation de l'algèbre

en question, définie par  $N = X^{-1}.M.X$ . On voit que le problème de la recherche de toutes les algèbres de type  $S$  généralise le problème dit des matrices de Riemann (comme il est naturel si on songe à l'origine de celui-ci, et aux considérations qui nous ont amenés à définir les algèbres de type  $S$ ) ; il peut être traité par la méthode qui a servi à H. Weyl dans l'étude de ce dernier problème<sup>3</sup>. Observons seulement ici que, si une algèbre de type  $S$  est décomposée en somme directe d'algèbres simples, chacune de celles-ci, comme il est facile de le voir, est nécessairement symétrique, c'est-à-dire transformée en elle-même par l'anti-involution  $\beta \rightarrow \beta'$ , et est donc elle-même de type  $S$  : le problème se ramène donc à la recherche des algèbres simples de type  $S$ . L'étude d'une telle algèbre peut alors se poursuivre par l'extension du corps de base, soit au corps des nombres réels, soit au corps des nombres complexes, et par l'extension correspondante (semblable à celle qui a été effectuée plus haut pour passer de l'anneau  $\mathcal{A}_0$  à l'anneau  $\mathcal{A}_c$ ) de l'anti-involution  $\beta \rightarrow \beta'$  et de la trace  $\sigma(\beta)$  ; on déduit facilement de là, entre autres, que toute algèbre de type  $S$  est isomorphe à une algèbre de matrices douée de symétrie hermitienne.

On peut se demander si l'anneau  $\mathcal{A}_0$  lui-même, tel que nous l'avons défini au n° 16, est une algèbre de type  $S$  (c'est-à-dire s'il est de rang fini sur le corps des rationnels), et si  $\sigma$  est la trace d'une représentation matricielle de  $\mathcal{A}_0$ . Dans le mémoire qui fait suite à celui-ci, on démontrera que la réponse à ces deux questions est affirmative. Plus précisément, on définira, par la considération des classes de diviseurs d'ordre fini sur la courbe  $\Gamma$ , des représentations de l'anneau  $\mathcal{A}$  par des matrices de degré  $2g$  sur l'anneau des entiers  $l$ -adiques,  $l$  étant un nombre premier quelconque autre que la caractéristique  $p$  du corps de base : ces représentations auront toutes la trace  $\sigma$  ; et, de leur étude, on déduira que le groupe additif des éléments de  $\mathcal{A}$  possède une base finie, donc que  $\mathcal{A}_0$  est de rang fini sur le corps des rationnels. Le fait que  $\mathcal{A}_0$  est de type  $S$  apporte alors, comme on a vu, des renseignements assez précis un sujet des structures dont cet anneau est susceptible ; il s'y ajoute les indications fournies par les représentations  $l$ -adiques auxquelles nous venons de faire allusion. En revanche, la recherche de toutes les structures que peut présenter l'anneau  $\mathcal{A}$  reste un problème fort peu avancé, et cela même dans le cas classique où le corps des constantes est celui des nombres complexes, et où l'on peut donc faire usage de la topologie combinatoire et des fonctions thêta.

---

<sup>3</sup>H. WEYL, Generalized Riemann matrices and factor sets, *Ann. of Math.*, 37 (1936), p. 709.