

*MÉMOIRE  
SUR LA  
RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.\**

Par M. VANDERMONDE.

ENTRE les Ouvrages faits depuis quelques années sur la résolution générale des Équations, les plus remarquables sont le Mémoire de M. Euler dans le *Tome IX des nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, & celui de M. Bézout, dans le volume de cette Académie pour l'année 1765. Il suffit de consulter ces deux excellens Mémoires pour prendre une idée des progrès des analystes en cette matière, & des difficultés de tout genre qui restent à surmonter. Il m'a paru qu'une partie des difficultés pouvoit être imputée à la nature même des méthodes analytiques, les seules dont on ait fait usage ; & j'ai pris le parti de tenter une autre voie. La méthode que je vais exposer, ne suppose l'introduction d'aucune inconnue, & à quelque instant que ce

\* Ce Mémoire a été lu dans le courant de Novembre 1770, & paraphé par M. de Fouchy le 28 du même mois ; mais il m'a fallu attendre l'impression des Mémoires de 1771, parce que je n'avois pas, en 1770, l'honneur d'être de l'Académie. Avant cette époque, il avoit paru un ouvrage intitulé *Méditations algébraïques*, par M. Waring, ouvrage que je ne connoissois pas, & où, parmi des recherches très-intéressantes sur les Équations, on trouve des théorèmes analogues à ceux de l'article *V* de ce Mémoire. Depuis, l'illustre M. de la Grange a publié dans les deux premiers volumes des nouveaux Mémoires de Berlin, sous le titre de *Réflexions sur la résolution algébrique des Équations, une analyse des méthodes*,

de M. Tschirnauſis, Euler & Bézout, terminée par l'exposé d'une méthode particulière qu'il se propose d'appliquer aux degrés non résolus. On remarquera quelques conformités entre cet ouvrage & le mien, dont je ne puis être que flatté. Je dois avertir encore que le premier volume des Mémoires de l'Académie royale de Marine, renfermera des recherches ingénieuses déjà imprimées & distribuées, sur la *Résolution des Équations*, par M. de Marguerie ; & que, dans le cinquième volume de la Société royale de Turin, on trouvera quelques vues générales, sans doute très-profondes, sur cette question par M. le Marquis de Condorcet.

soit dans la marche du calcul, on n'a que des équations faciles à vérifier, en y exécutant les opérations indiquées; voilà son caractère particulier: c'est aux Géomètres à apprécier ses avantages.

I. On demande les valeurs générales les plus simples qui puissent satisfaire concurremment à une Équation d'un degré déterminé.

II. Développons d'abord, par un exemple, l'état de cette question.

$x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$   
est une équation identique, & par conséquent la condition

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

est satisfaite en faisant  $x = a$ , ou  $x = b$ ; mais

$$\left[ \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-2ab}}{2} \right]^2 - (a+b) \left[ \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-2ab}}{2} \right] + ab = 0,$$

est aussi une équation identique, indépendamment de l'extraction de la racine indiquée; d'où il suit que si l'on n'avoit pas connu cette quantité  $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-2ab}}{2}$  & qu'on eut voulu exprimer qu'on la cherchoit, la supposant  $x$ , on eut dû avoir

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0.$$

Or il est visible que cette expression  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$  qui signifie la quantité dont le carré est  $a^2 + b^2 - 2ab$ , est une expression ambiguë, puisque  $a^2 + b^2 - 2ab$  est indifféremment le carré d'autant de quantités  $r(a - b)$  qu'il y a de nombres qui satisfont à la condition  $r^2 = 1$ .

Voilà donc deux manières d'envisager l'équation

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0;$$

comme équation du second degré, & alors l'inconnue y représente une quantité ambiguë; comme produit de deux facteurs du premier degré, alors c'est l'équation qui est ambiguë, & l'inconnue y est susceptible de deux valeurs qui ne le font point.

S'il étoit simplement question de résoudre l'équation

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

il faudroit choisir le dernier point de vue; mais si l'on en demande

une racine qui ne soit composée que de ses coéfficiens ( $a + b$ ) &  $ab$ , cette racine sera ambiguë nécessairement : car  $a$  étant une valeur de  $x$ , il faudra qu'on ait

$$a = \text{fonction } [(a + b), ab];$$

& comme en échangeant les lettres  $a$  &  $b$  entre elles dans ( $a + b$ ) & dans  $ab$ , ces quantités, ainsi que leur fonction quelle qu'elle soit, demeurent absolument les mêmes; l'échange supposé fait dans les deux membres, on aura encore

$$b = \text{fonction } [(a + b), ab].$$

Or ces deux conditions ne peuvent subsister séparément que par l'ambiguité de la fonction.

Cette fonction est, par exemple,

$$\frac{1}{2} [a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}],$$

qui se déduit facilement de la valeur ci-dessus, parce que

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$

Une quantité de laquelle on ne pourroit dire en aucun sens qu'elle égale  $a$ , ou qu'elle égale  $b$ , ne résoudroit point l'équation proposée; mais toute quantité de laquelle on peut le dire, en un certain sens, la résout : telle est, par exemple,

$$\frac{1}{2} [a + b + \frac{\sqrt{(2\sqrt{-1)} + \sqrt{(-2\sqrt{-1)}}}}{2} \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}],$$

qui la résout effectivement, parce qu'il y a un sens dans lequel le carré de  $\frac{\sqrt{(2\sqrt{-1)} + \sqrt{(-2\sqrt{-1)}}}}{2}$  égale 1; telle est encore

$$\frac{a + b}{a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}},$$

qui ne satisfait, qu'après la réduction à un dénominateur commun.

De ces trois valeurs générales, la plus simple est la première; mais l'on demande de plus les valeurs qui satisfont concurremment, c'est-à-dire, celles dont la somme est  $a + b$ , & le produit est  $ab$ . Il faut pour cela déterminer un sens dans lequel la fonction ambiguë égale  $a$ , par exemple; & trouver, cela posé, comment elle égale  $b$ ; or cela est ici très-facile, puisque

$$\frac{1}{2} [a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}].$$

$$\sqrt[3]{(a+b)^3 - 4ab} = a - b;$$

d'où il suit que c'est

$$\frac{1}{2} [a + b - \sqrt[3]{(a+b)^3 - 4ab}],$$

qui, dans ce sens, est  $b$ .

III. Il faut prendre encore le troisième degré pour exemple.  
 $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = (x-a)(x-b)(x-c)$   
 identiquement : donc, pour résoudre généralement l'équation du troisième degré

$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$ ,  
 il faut trouver une fonction de

$$(a+b+c), \text{ de } (ab+ac+bc) \& \text{ de } abc,$$

qui égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ .

En réfléchissant sur le second degré, envisagé de la manière ci-dessus, & sur ce qu'on connoissoit du troisième, j'ai été conduit à penser que cette condition pouvoit être remplie par une fonction de cette forme

$\frac{1}{3}[a+b+c + \sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3} + \sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3}]$ ,  
 où je suppose les cubes développés, & que  $r'$ ,  $r''$  sont les valeurs qui satisfont, concurremment avec l'unité, à l'équation  $r^3 = 1$ .

Il est aisé de voir que l'on a  $r' + r'' = -1$ ,  $r'r'' = 1$  ;  
 d'où l'on tire  $r'^2 = r''$ ,  $r''^2 = r'$ , &c. & l'on trouve que le cube de  $a + r'b + r''c$ ; est  
 $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r'(a^2b + b^2c + c^2a) + 3r''(a^2c + b^2a + c^2b)$  ;  
 mais cette expression

$\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r'(a^2b + b^2c + c^2a) + 3r''(a^2c + b^2a + c^2b)}$   
 qui n'indique autre chose que la quantité dont elle renferme le cube, est une expression ambiguë, puisque ce cube l'est d'autant de quantités  $r(a + r'b + r''c)$  qu'il y a de nombres qui satisfont à la condition  $r^3 = 1$ .

Il est donc facile de vérifier si la fonction ci-dessus, au moyen des différens sens dont s'y trouvent susceptibles les deux quantités ambiguës, remplit d'abord cette condition d'être indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ . Je vois que cela est en effet, puisque

$$\frac{1}{3}[a$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}[a+b+c+(a+r'b+r''c)] &= a. \\ \frac{2}{3}[a+b+c+r'(a+r'b+r''c)+r''(a+r'b+r'c)] &= c. \\ \frac{2}{3}[a+b+c+r''(a+r'b+r'c)+r'(a+r''b+r'c)] &= b.\end{aligned}$$

Il ne s'agit donc plus que de faire que les deux cubes ne soient fonctions que de  $(a+b+c)$ ,  $(ab+ac+bc)$  & de  $abc$ : mais comme cela sera impossible tant qu'il ne sera pas indifférent d'y échanger les lettres  $a$ ,  $b$  &  $c$  entr'elles, il convient de s'occuper à part de cette seconde condition.

$$\text{On a } r' = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, r'' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}; \text{ d'où}$$

$$(a+r'b+r''c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{1}{2}(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + \frac{3}{2}abc + \frac{1}{2}(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)\sqrt{-3},$$

quantité dont  $(a+r''b+r'c)^3$  ne diffère que parce que  $\sqrt{-3}$  y est en moins.

Il n'y a là que

$$(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$$

qui change de valeur si l'on échange les lettres entr'elles. En y écrivant en effet  $a$  pour  $b$ , &  $b$  pour  $a$ , on a

$$(a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - b^2c - c^2a),$$

& c'est la seule valeur différente de la première, que les échanges de lettres puissent produire: mais nous avons appris ci-devant à faire une quantité qui fut indifféremment l'une de deux, & dans laquelle il fut de plus indifférent d'écrire l'une pour l'autre:  $u'$  &  $u''$  étant ces deux quantités,  $\frac{1}{2}[u' + u'' + \sqrt{(u' - u'')^2}]$  satisfait aux deux conditions: donc supposant

$$a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b = u',$$

$$a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - b^2c - c^2a = u'',$$

$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)^2}$  sera indifféremment  $u'$  ou  $u''$ , & ne changera point de valeur si l'on y échange entr'elles les lettres  $a$ ,  $b$  &  $c$ .

Or  $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$ , qui égale  $(a - b)(a - c)(b - c)$ , a pour carré

$$\begin{aligned}&a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + c^4b^2 \\ &- 2(a^4bc + b^4ac + c^4ab) - 2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) \\ &+ 2(a^3b^2c + a^3c^2b + b^3a^2c + b^3c^2a + c^3a^2b + c^3b^2a) - 6a^2b^2c^2,\end{aligned}$$

Voilà donc la seconde condition de la résolution générale du troisième degré faite. Quant à la troisième & dernière qui est de substituer à toutes ces quantités, dans lesquelles il est indifférent d'échanger les lettres entre elles, leurs valeurs en . . . . ( $a + b + c$ ), ( $ab + ac + bc$ ) &  $abc$ , on verra dans l'instant qu'elle est toujours très-facile à remplir.

IV. On voit dès-à-présent que pour un degré quelconque, la condition essentielle de la résolution générale étant de trouver une fonction de la somme des racines, de la somme de leurs produits deux-à-deux, de la somme de leurs produits trois-à-trois, &c. qui soit indifféremment l'une quelconque de ces racines, cette recherche peut se partager en trois chefs :

1.<sup>o</sup> Trouver une fonction des racines, de laquelle on puisse dire, dans un certain sens, qu'elle égale telle de ces racines que l'on voudrà.

2.<sup>o</sup> Mettre cette fonction sous une forme telle qu'il soit de plus indifférent d'y échanger les racines entr'elles.

3.<sup>o</sup> Y substituer les valeurs en somme de ces racines, somme de leurs produits deux-à-deux, &c.

Traitons d'abord ce troisième objet qui est le plus simple.

#### V. J'écrirai dans la suite

(A) pour  $a + b + c + \&c.$  (A<sup>2</sup>) pour  $a^2 + b^2 + c^2 + \&c.$

(AB) pour  $ab + ac + \&c.$  (A<sup>2</sup>B) pour  $a^2b + b^2a + c^2a + \&c.$

$+ bc + \&c.$   $+ a^2c + b^2c + c^2b + \&c.$

$+ \&c.$   $+ \&c. + \&c. + \&c.$

&c.

En général par ( $A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots$ ) j'indiquerai la somme de tous les termes différens qui résulteroient de celui-là, au moyen de toutes les substitutions possibles des petites lettres  $a, b, c, d, e, \&c.$  dans un ordre quelconque, aux grandes,  $A, B, C, \&c.$  & j'appellerai ces expressions abrégées, *Types de combinaison* ou simplement *Types*.

Comme le cas où quelques-uns des exposans  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$

du Type ( $A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots$ ) sont égaux entre eux, conduit à des considérations particulières, j'adopterai encore, du moins dans cet article, une autre façon de noter, au moyen de laquelle le nombre d'égalités entre ces exposans puisse entrer d'une manière générale dans les expressions que je cherche.

Je fais ( $A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\varepsilon \dots$ ) =  $\{\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \dots\}$ ; & si, par exemple,  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon$ , j'aurai

$$(A^\alpha B^\alpha C^\alpha D^\alpha E^\alpha \dots) = \{\alpha \alpha \alpha \alpha \dots\} = \{\alpha^3 \dots\}$$

Ainsi le sens de cette expression  $\{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \dots\}$  est facile à saisir:

$$(A) = \{1\} \quad (A^2) = \{2\} \quad (A^3) = \{3^2\}$$

$$(AB) = \{1^2\} \quad (A^3) = \{3\} \quad (A^3 B^2 C^2 D) = \{2^3 1\}$$

$$(ABC) = \{1^3\} \quad \text{&c.} \quad \text{&c.}$$

&c.

Les fonctions qui ne changent point de valeur si l'on y échange les lettres entr'elles, étant évidemment des fonctions de types; ce qu'on se propose ici se réduit donc à trouver la valeur de  $\{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \dots\}$  en  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$ ,  $\{1^4\}$ , &c.

Les formules suivantes donnent d'abord la valeur de  $\{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \dots\}$  en sommes de puissances  $\{\varpi\}$ ,  $\{\varpi'\}$ , &c. puis la valeur en  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$ , &c. de ces sommes de puissances.

1.<sup>o</sup>  $\alpha, \beta, \gamma, \text{ &c.}$  demeurant indéterminés, &  $n, p, q, \text{ &c.}$  étant des nombres entiers positifs, ou zéro, si l'on satisfait de toutes les manières possibles à la suite d'équations

$$\alpha' \epsilon' + \alpha'' \epsilon'' + \alpha''' \epsilon''' + \dots = n,$$

$$\beta' \epsilon' + \beta'' \epsilon'' + \dots = p,$$

$$\gamma' \epsilon' + \dots = q,$$

&c.

en ne prenant pour  $\alpha', \alpha'', \alpha''' \dots$   $\beta', \beta'', \beta''' \dots$   $\gamma', \gamma'', \gamma''' \dots$  que des nombres entiers positifs, ou zéro, la valeur de  $\{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \dots\}$  en sommes de puissances, contiendra tous les différents termes de la forme  $\{\alpha' \beta' \gamma' \dots\}$ .

$$\{a' \alpha + b' \beta + c' \gamma + \dots\}^e \times \{a'' \alpha + b'' \beta + \dots\}^{e''} \times \{a''' \alpha + \dots\}^{e'''} \dots$$

$A_{a a i j}$

372 MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE  
qui en peuvent résulter; & le coefficient numérique du terme quelconque

$$\{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \dots\}^{\epsilon'} \times \{a''\alpha + b''\beta + \dots\}^{\epsilon''} \times \{a'''\alpha + \dots\}^{\epsilon'''} \dots$$

en supposant pour simplifier

$$a' + b' + c' + \dots = A', \quad n + p + q + \dots = N.$$

$$a'' + b'' + \dots = A'', \quad \epsilon' + \epsilon'' + \epsilon''' + \dots = E.$$

$$a''' + \dots = A''',$$

&c.

fera

$$(1,2,3,\dots,A' - z, A' - 1)^{\epsilon'} (1,2,\dots,A'' - 1)^{\epsilon''} (1,2,\dots,A''' - 1)^{\epsilon'''}\dots$$

$$(1,2,3,\dots,A' - z, A')^{\epsilon'} (1,2,A'')^{\epsilon''} (1,2,A''')^{\epsilon'''}\dots(1,2,b')^{\epsilon'} (1,2,b'')^{\epsilon''} \dots (1,2,c')^{\epsilon'} \dots (1,2,3,4) (1,2,4'') (1,2,4''')$$

le signe  $+$  ayant lieu si  $(N + E)$  est pair & le signe  $-$  s'il est impair.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \{a^3\beta^2\} &= \frac{1+2+3+4}{1+2+3+1+2} \{3\alpha + 2\beta\} - \frac{1+2+3}{1+2+3} \{3\alpha + \beta\} \{\beta\} \\ &\quad - \frac{1+2+3}{1+2+1+2} \{2\alpha + 2\beta\} \{\alpha\} \\ &\quad - \frac{1+2+1}{1+2+3+1+2} \{3\alpha\} \{2\beta\} \\ &\quad - \frac{1+2+1}{1+2} \{2\alpha + \beta\} \{\alpha + \beta\} \\ &\quad - \frac{1+2+1}{1+2+1+2} \{\alpha + 2\beta\} \{2\alpha\} \\ &\quad + \frac{1+2}{1+2+3+1+2} \{3\alpha\} \{\beta\}^2 \\ &\quad + \frac{1+2}{1+2} \{\alpha + \beta\} \{\alpha\} \{\beta\} - \frac{1}{1+2+1+2} \{2\alpha\} \{\alpha\} \{\beta\}^2 \\ &\quad + \frac{1+2}{1+2+1+2} \{\alpha + 2\beta\} \{\alpha\}^2 - \frac{1}{1+2} \{\alpha + \beta\} \{\alpha\}^2 \{\beta\} \\ &\quad + \frac{1+1}{1+2+1+2} \{2\alpha\} \{2\beta\} \{\alpha\} - \frac{1}{1+2+1+2} \{2\beta\} \{\alpha\}^3 \\ &\quad + \frac{1+1}{1+2} \{2\alpha\} \{\alpha + \beta\} \{\beta\} \\ &\quad + \frac{1}{1+2} \{\alpha + \beta\}^2 \{\alpha\} - \frac{1}{1+2+3+1+2} \{\alpha\}^3 \{\beta\}^2 \end{aligned}$$

& si l'on supposoit  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ , on auroit

$$\begin{aligned}
 \{2^3 1^2\} &= 2 \{8\} - \{7\} \{1\} + \frac{1}{6} \{6\} \{1\}^2 \\
 &- \frac{3}{2} \{6\} \{2\} + \{5\} \{2\} \{1\} \\
 &- \frac{1}{6} \{6\} \{2\} + \frac{1}{2} \{4\} \{2\}^2 \\
 &- \{5\} \{3\} + \frac{1}{4} \{4\} \{2\}^2 \\
 &- \frac{1}{2} \{4\}^2 + \frac{1}{2} \{4\} \{3\} \{1\} \\
 &+ \frac{1}{2} \{3\}^2 \{2\} \\
 &- \frac{1}{4} \{4\} \{2\} \{1\}^2 + \frac{1}{12} \{2\}^3 \{1\}^2 \\
 &- \frac{1}{2} \{3\} \{2\}^2 \{1\} \\
 &- \frac{1}{12} \{2\}^4
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
 (A^3 B^2 C^2 D E) &= 2(A^8) - (A^7)(A) + \frac{1}{6}(A^6)(A)^2 \\
 &- \frac{5}{3}(A^6)(A^2) + (A^5)(A^2)(A) \\
 &- (A^5)(A^3) + \frac{3}{4}(A^4)(A^2)^2 \\
 &- \frac{1}{2}(A^4)^2 + \frac{1}{2}(A^4)(A^3)(A) \\
 &+ \frac{1}{2}(A^3)^2 (A^2) \\
 &- \frac{1}{4}(A^4)(A^2)(A)^2 + \frac{1}{12}(A^2)^3 (A)^2 \\
 &- \frac{1}{2}(A^3)(A^2)^2 (A) \\
 &- \frac{1}{12}(A^2)^4
 \end{aligned}$$

2.<sup>o</sup> Si l'on fait avec les quantités  $(A)$ ,  $(AB)$ ,  $(ABC)$  &c. ou  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$  &c. la fonction rationnelle & entière la plus générale possible de la dimension  $w$ , ou si l'on prend tous les différens termes de la forme  $\{1\}^{t'} \{1^2\}^{t''} \{1^3\}^{t'''}$ .... qui peuvent résulter des manières possibles de satisfaire à l'équation

$$t' + 2t'' + 3t''' + \dots = w,$$

$t'$ ,  $t''$ ,  $t'''$ .... étant des nombres entiers positifs ou zéro, la valeur de  $\{w\}$  contiendra tous ces termes; & le coefficient numérique du terme quelconque,

$$\{1\}^{t'} \{1^2\}^{t''} \{1^3\}^{t'''} \dots$$

$$\pm \frac{\varpi (1,2 \dots \overline{E-1})}{(1,2 \dots \epsilon') (1,2 \dots \epsilon'') (1,2 \dots \epsilon''') \dots}$$

le signe  $+$  ayant lieu si  $(\varpi + E)$  est pair, & le signe  $-$   
s'il est impair.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \{1\} &= \frac{s_{1,2,3,4}}{1,2,3,4,5} \{1\}^5 - \frac{s_{1,2,3}}{1,2,3} \{1\}^3 \{1^2\} + \frac{s_{1,2}}{1,2} \{1\} \{1^4\}^2 \\ &+ \frac{s_{1,2}}{1,2} \{1\}^2 \{1^3\} - \frac{s_{1}}{1} \{1^2\} \{1^3\} - \frac{s_{1}}{1} \{1\} \{1^4\} + \frac{s_{1}}{1} \{1^5\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} (A^5) &= (A)^5 - s(A)^3 (AB) + s(A) (AB)^2 + s(A)^2 (ABC) \\ &- s(AB) (ABC) - s(A) (ABCD) + s(ABCDE). \end{aligned}$$

L'inspection des Tables ci-jointes, que je crois faciles à entendre sans explication, & qu'il me paroîtroit intéressant de continuer, pourra suppléer aux détails de procédés qui ne sont pas ici de mon objet \*.

\* On étoit sur le point d'imprimer ce Mémoire, lorsqu'il m'est venu en idée de rechercher l'expression générale d'un nombre pris quelque part que ce soit dans ces Tables, ou, ce qui est la même chose, en l'supposant ce qui précède, celle du coefficient numérique du terme

$$\{1\}^{D-2a_1-3a_2-4a_3-\dots-n+\overline{1a_n}} \times \{1^2\}^{a_2} \{1^3\}^{a_3} \{1^4\}^{a_4} \dots \{1^{n-1}\}^{a_{n-1}},$$

dans la valeur du produit

$$\{n+1\}^{a_n} \dots \{4\}^{a_4} \{3\}^{a_3} \{2\}^{a_2} \{1\}^{a_1} D-2a_1-3a_2-4a_3-\dots-n+\overline{1a_n}.$$

J'ai trouvé que si l'on indique ce coefficient, qui est une Fonction de  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ , &c. par

$$\pm F \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \end{matrix} \right),$$

le signe  $+$  ayant lieu si

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots$$

est un nombre pair, & le signe  $-$  s'il est impair, on aura pour déterminer cette Fonction, la formule suivante (en supposant pour simplifier

$$\begin{aligned} &+ 1 - 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 - \dots - \overline{r+1}a_r = N, \\ &+ a_1 - 2a_2 - 3a_3 - \dots - \overline{ra_r} = N, \end{aligned}$$

$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9\}$
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9\}$
$\{2\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9\}$
$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9\}$
$\{4\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9\}$
$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$
$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$\{8\}$	$\{9\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$
$\{9\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$

$$\begin{cases} \{6\} = \\ \{5\} = \\ \{4\} = \\ \{4^1\} = \\ \{3\} = \\ \{3^2\} = \\ \{3^1\} = \\ \{2\} = \\ \{2^1\} = \\ \{1\} = \end{cases}$$

TABLE II. *Mém. de l'Acad. R. des Sc. en*

TABLE III

VI. Cherchons maintenant les moyens généraux de faire un fonction des racines, de laquelle il soit vrai en un certain sens qu'elle égale telle de ces racines qu'on voudra.

Je dis d'abord que la fonction

égale ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , &c. indifféremment, en supposant les puissances  $n$  développées, & que  $r^i, r^{ii}, r^{iii}$  &c. sont les valeurs qui résolvent concurremment avec l'unité l'équation  $r^n = 1$ .

Les exemples mettront cette proposition dans tout son jour. Ajoutons seulement que lorsque  $n$  est un nombre premier  $2m+1$ , pour obtenir les valeurs rigoureuses de  $r$  en supposant

... $=r^{m+1}-1=0=(r-1)(r^2+x'r+1)(r^2+x''r+1)(r^2+x'''r+1)\dots$   
on a l'équation

$$\left. x^m - x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2} x^{m-2} - \frac{m-3, m-4}{1, 2} x^{m-3} + \text{etc.} \right\} = 0,$$

$$- \frac{m-1}{m-2} x^{m-2} + \frac{m-2, m-3}{1, 2} x^{m-4} - \frac{m-3, m-4, m-5}{1, 2, 3} x^{m-6} \right\} = 0,$$

dont les racines sont  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$  &c. & qui est toujours facile à résoudre, comme on le verra ci-après par le calcul du cas où  $m = 5$ . Si  $n$  n'est pas un nombre premier, les simplifications sont encore plus grandes, & s'offrent sans peine.

$$F\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_N \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \dots, \beta_N \end{smallmatrix}\right) = \dots + \\ \sum_{\substack{\{1, 2, \dots, N\} \\ \{1, 2, 3, \dots, \alpha_1\} \cup \{1, 2, 3, \dots, \alpha_2\} \cup \dots \cup \{1, 2, \dots, \alpha_r\}}} F\left(\begin{smallmatrix} \overline{\alpha_1 - \alpha_1}, \overline{\alpha_2 - \alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_r - \alpha_r}, \overline{\alpha_{r+1}}, \overline{\alpha_{r+2}}, \dots, \overline{\alpha_N} \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_N \end{smallmatrix}\right) + \dots$$

formule d'où l'on tirera  $n$  équations en donnant à  $r$  successivement pour valeur les nombres  $1, 2, 3, \dots, n$ ; le second membre de chacune de ces équations étant la somme d'autant de termes que le terme quelconque en peut fournir en prenant pour  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ , ou zéro ou des nombres entiers positifs, tels que  $N >$  ou au plus  $\equiv 0$ .

En considérant cette formule comme une équation aux différences finies à plusieurs variables, dans laquelle la différence de chaque variable soit égale à l'unité, je parviens à intégrer & à satisfaire aux conditions, par un procédé particulier dont je me propose de rendre compte dans l'un des volumes suivants.

Les applications au second & au troisième degré se trouvent ci-dessus : passons au quatrième.

VII. Comme  $r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1)$ , les racines de  $r^4 - 1$  sont 1,  $-1 = r'$ ,  $\sqrt{-1} = r''$ ,  $-\sqrt{-1} = r'''$  ; & il faut prouver que

$$\frac{1}{4}[a+b+c+d+\sqrt[4]{(a-b+c)\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4} \\ + \sqrt[4]{(a+b-c-d)^4} \\ + \sqrt[4]{(a-b-c)\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4}]$$

égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , en supposant les carrés - carrés développés : mais cela posé, l'expression indiquée renferme les quatre valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} & [a+b+c+d+ (a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})+(a+b-c-d)+ (a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] = a; \\ & [a+b+c+d- (a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})+(a+b-c-d)- (a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] = b; \\ & [a+b+c+d+\sqrt{-1}(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})-(a+b-c-d)-\sqrt{-1}(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] = c; \\ & [a+b+c+d-\sqrt{-1}(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})-(a+b-c-d)+\sqrt{-1}(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] = d. \end{aligned}$$

Donc, &c.

VIII.  $r^5 - 1 = (r - 1)(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$ .

Or si l'on avoit les quatre équations,

$$\begin{aligned} r + r' + r'' + r''' + r'''' &= 0, \\ r'r'' &= 1, \quad r''r'''' = 1, \\ r''r''' &= r'; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} r'r''' &= r''', \quad r''r'''' = r'', \\ r'r'''' &= r'', \\ r'^2 &= r''', \quad r''^2 = r''', \quad r''''^2 = r'', \quad r''''''^2 = r', \text{ &c.} \end{aligned}$$

on trouveroit pour déterminer ou  $r'$ , ou  $r''$ , ou  $r'''$ , ou  $r''''$ ,  $r$  étant l'une quelconque de ces quatre quantités, l'équation

$$r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0.$$

Donc les valeurs qui résolvent concurremment avec l'unité l'équation  $r^5 - 1 = 0$  & qui sont  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$ , &  $r''''$ , satisfont aux quatre équations que j'avois d'abord supposées & à celles qui s'en déduisent ; donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[a+b+c+d+e + \sqrt[5]{(a+r'b+r''c+r'''d+r''')^5} \\ & \quad + \sqrt[5]{(a+r''b+r''c+r''d+r'e)^5} \\ & \quad + \sqrt[5]{(a+r''b+r''c+r'd+r'e)^5} \\ & \quad + \sqrt[5]{(a+r''b+r'e+r''d+r'''e)^5}] \end{aligned}$$

en supposant les cinquièmes puissances développées, renferme les cinq valeurs

$$b+c+d+e$$

$$a+r'b+r''c+r'''d+r''') + (a+r''b+r''c+r'd+r'e) + (a+r''b+r''c+r'd+r'e) + (a+r''b+r'e+r''d+r'''e)$$

$$b+c+d+e$$

$$a+r'b+r''c+r'''d+r''') + r'''(a+r''b+r''c+r''d+r'e) + r''(a+r''b+r''c+r'd+r'e) + r''(a+r''b+r'e+r''d+r'''e)$$

$$b+c+d+e$$

$$a+r'b+r''c+r'''d+r''') + r''(a+r''b+r''c+r'd+r'e) + r''(a+r''b+r''c+r'd+r'e) + r'(a+r''b+r'e+r''d+r'''e)$$

$$b+c+d+e$$

$$a+r'b+r''c+r'''d+r''') + r''(a+r''b+r''c+r''d+r'e) + r''(a+r''b+r''c+r'd+r'e) + r''(a+r''b+r'e+r''d+r'''e)$$

$$b+c+d+e$$

$$a+r'b+r''c+r'''d+r''') + r''(a+r''b+r''c+r''d+r'e) + r''(a+r''b+r''c+r'd+r'e) + r''(a+r''b+r'e+r''d+r'''e)$$

$$b+c+d+e$$

$$a+r'b+r''c+r'''d+r''') + r'(a+r''b+r''c+r''d+r'e) + r''(a+r''b+r''c+r'd+r'e) + r''(a+r''b+r'e+r''d+r'''e)$$

$$b+c+d+e$$

$$a+r'b+r''c+r'''d+r''') + r'(a+r''b+r''c+r''d+r'e) + r''(a+r''b+r''c+r'd+r'e) + r''(a+r''b+r'e+r''d+r'''e)$$

Les cinquièmes puissances indiquées sont faciles à exécuter au moyen du système d'équations entre le produit de deux quelconques des valeurs de  $r$ , & une troisième, tel qu'il est ci-dessus ; mais il faut observer que les mêmes lettres continuant d'indiquer les mêmes nombres, & les trois équations

$$1 + r' + r'' + r''' + r'''' = 0, \quad r'r'' = 1, \quad r'''r'''' = 1,$$

ayant lieu, on pourroit, à cause de l'ambiguité de ces nombres, supposer  $r''r''' = r''''$ ; d'où l'on déduiroit

$$r'r''' = r'', \quad r'r'''' = r''', \quad r'r'' = r', \quad r'^2 = r''', \quad r''^2 = r''''$$

$r''''^2 = r'$ ,  $r''''^2 = r''$ ; second système d'équations qui est vrai, ainsi que le premier, sans l'être en même temps, & duquel on concluroit les mêmes choses que ci-dessus, quoique dans le développement des cinquièmes puissances, il conduise à d'autres valeurs.

IX. Comme  $r^6 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + r + 1)$   
 $(r^2 - r + 1)$ , les six valeurs de  $r$  dans l'équation  $r^6 = 1$  sont

$1, -1, g', g'', -g', -g''$ ;  $g'$  &  $g''$  étant les valeurs qui résolvent concurremment avec l'unité l'équation  $g^3 = 1$ , ce qui (art. III) donne  $g' + g'' = -1, g'g'' = 1, g'^2 = g'', g''^2 = g', \text{ &c.}$  & il faut prouver que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f + \sqrt[6]{(a-b+p'c-p'd+p'e-p'f)^6} \\ & + \sqrt[6]{(a+b+p''c+p''d+p'e+p'f)^6} \\ & + \sqrt[6]{(a-b+c-d+e-f)^6} \\ & + \sqrt[6]{(a+b+p'c+p'd+p'e+p'f)^6} \\ & + \sqrt[6]{(a-b+p''c-p''d+p'e-p'f)^6}] \end{aligned}$$

égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , ou  $e$ , ou  $f$ , en supposant les sixièmes puissances développées : mais alors la fonction renferme les six valeurs

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ + p' \\ - p' \\ + p'' \\ - p'' \end{array} \right\} (a-b+p'c-p'd+p'e-p'f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} + \\ + p'' \\ + p' \\ + p' \end{array} \right\} (a+b+p''c+p''d+p'e+p'f) \quad \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} (a-b+c-d+e-f). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} + \\ + \\ + p' \\ + p' \\ + p'' \\ + p'' \end{array} \right\} (a+b+p'c+p'd+p''e+p'f) \quad \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ + p'' \\ - p'' \\ + p' \\ - p' \end{array} \right\} (a-b+p''c-p''d+p'e-p'f) = \left. \begin{array}{l} b \\ c \\ c \\ d \end{array} \right\} \end{aligned}$$

donc, &c.

X.  $r^7 - 1 = (r - 1)(r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$ ; or si l'on avoit les six équations

$$1 + r' + r'' + r''' + r^{IV} + r^V + r^{VI} = 0,$$

$$r'r'' = 1, \quad r'''r^{IV} = 1, \quad r^Vr^{VI} = 1,$$

$$r''r''' = r', \quad r^{IV}r^V = r';$$

d'où l'on déduit

$$r'r''' = r^v, \quad r''r^{iv} = r^{vi}, \quad r'''r^v = r^{iv}, \quad r^{iv}r^{vi} = r''',$$

$$r'r^{iv} = r'', \quad r''r^v = r''', \quad r'''r^{vi} = r'',$$

$$r'r^v = r^{vi}, \quad r''r^{vi} = r^v;$$

$$r'r^{vi} = r^{iv},$$

$$r'^2 = r''', \quad r''^2 = r^{iv}, \quad r'''^2 = r^{vi},$$

$$r^{iv^2} = r^v, \quad r^{v^2} = r'', \quad r^{vi^2} = r', \text{ &c.}$$

on trouveroit  $r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ ,

$r$  étant l'une quelconque des six quantités : donc les valeurs imaginaires de  $\sqrt[7]{1}$  satisfont à toutes ces équations ; donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7}[a+b+c+d+e+f+g + \sqrt[7]{(a+r'b+r^c+d+r^e+r^f+r^g)} \\ & \quad + \sqrt[7]{(a+r'''b+r^{iv}c+r^{v}d+r^v e+r^f+r^{vi}g)} \\ & \quad + \sqrt[7]{(a+r^vb+r^{v}c+r^nd+r^e+r^f+r^{iv}g)} \\ & \quad + \sqrt[7]{(a+r^{vi}b+r^{v}c+r^d+r^e+r^f+r^{iv}g)} \\ & \quad + \sqrt[7]{(a+r^{iv}b+r^{v}c+r^d+r^{vi}e+r^f+r^g)} \\ & \quad + \sqrt[7]{(a+r''b+r^{v}c+r^d+r^{iv}e+r^f+r^{vi}g)}] \end{aligned}$$

en supposant les septièmes puissances développées, renferme les sept valeurs

$$\left. \begin{array}{l} + \\ + r' \\ + r'' \\ + r''' \\ + r^{iv} \\ + r^v \\ + r^{vi} \end{array} \right\} (a+r'b+r^c+r^d+r^e+r^f+r^g)$$

$$\left. \begin{array}{l} + r''' \\ + r^{iv} \\ + r^{vi} \\ (a+r'''b+r^{iv}c+r^{v}d+r^e+r^f+r^g) \\ + r^v \\ + r'' \\ + r' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} + \\ + r^v \\ + r^{vi} \\ + r'' \\ + r' \\ + r''' \\ + r^{iv} \end{array} \right\} (a+r^vb+r^{v}c+r^nd+r^e+r^f+r^{iv}g)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 + r^{v1} \\
 + r^v \\
 + r \\
 + r'' \\
 + r''' \\
 + r^{v1} \\
 + r'''
 \end{array} \right\} (a + r^{v1}b + r^v c + r'd + r''e + r'''f + r^{v1}g) + r^v \\
 \left. \begin{array}{l}
 + r^{v1} \\
 + r^v \\
 + r \\
 + r'' \\
 + r''' \\
 + r^{v1} \\
 + r'''
 \end{array} \right\} (a + r^{v1}b + r''c + r^v d + r^{v1}e + r^f + r''g) \\
 \left. \begin{array}{l}
 + r'' \\
 + r' \\
 + r \\
 + r^{v1} \\
 + r'' \\
 + r^{v1} \\
 + r'' \\
 + r^v
 \end{array} \right\} (a + r''b + r'c + r^v d + r^{v1}e + r''f + r^v g) = \left\{ \begin{array}{l}
 c \\
 b \\
 c \\
 d \\
 g
 \end{array} \right.$$

XI. Ce procédé est uniforme, & pour un nombre premier  $n$  quelconque,  $r^1, r^2, r^3, \dots$  étant les valeurs imaginaires de  $\sqrt[n]{1}$ , on aura toujours un système d'équations analogue aux précédens, en supposant les  $(n - 1)$  équations

$$\begin{aligned}
 1 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots &= 0, \\
 r^1r^2 = 1, \quad r^2r^3 = 1, \quad r^3r^1 = 1, \quad r^3r^4 = 1, \quad \text{etc.} \\
 r^2r^3 = r^1, \quad r^3r^4 = r^2, \quad r^4r^1 = r^3, \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

qui donneront toutes les autres. Ce système suffira pour éléver sans embarras les puissances indiquées, & satisfaire par conséquent à l'objet qui nous occupe ici, puisque les valeurs rigoureuses de toutes les racines de l'unité sont faciles à obtenir successivement, comme on le verra.

XII. Il y a, lorsque  $n$  n'est pas un nombre premier, des simplifications dans la forme générale ci-dessus, qui se présentent au premier coup-d'œil; par exemple,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}[a + b + c + d + \sqrt{(a - b + c)\sqrt{-1 - d\sqrt{-1}}}]^2 \\
 + \sqrt{(a + b - c - d)^2} \\
 + \frac{1}{4}[a - b - c\sqrt{-1} + d\sqrt{-1}]^2
 \end{aligned}$$

renferme les quatre valeurs de l'article VII.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d+e+f + & \sqrt[4]{(a-b+p'c-p'd+p''e-p'f)^2} \\ & + \sqrt[4]{(a+b+p'e+p''d+p'f+p''e+p'f)^2} \\ & + \sqrt[4]{(a-b+c-d+e-f)^2} \\ & + \sqrt[4]{(a+b+p'c+p'd+p''e+p''f)^2} \\ & + \sqrt[4]{(a-b+p'c-p'd+p'e-p'f)^2}] \end{aligned}$$

renferme les six valeurs de l'*article IX*; &c.

Mais il existe encore pour ces cas, des formes particulières plus simples.

XIII. On peut, par exemple, faire une quantité qui ait indifféremment l'une de quatre valeurs déterminées, sans éléver d'autres puissances que des carrés, & par conséquent sans employer d'imaginaires, car

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d & + \sqrt{(a+b-c-d)^2} \\ & + \sqrt{(a+c-b-d)^2} \\ & + \sqrt{(a+d-b-c)^2}] \end{aligned}$$

renferme les quatre valeurs

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d & \left. \begin{array}{l} + \\ + \\ - \\ - \end{array} \right\} (a+b-c-d) \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} (a+c-b-d) \\ & \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ - \\ + \end{array} \right\} (a+d-b-c)] = \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right. \end{aligned}$$

XIV. On peut faire une quantité qui soit indifféremment l'une de six, sans éléver d'autres puissances que cinq différens cubes; car  $p'$  &  $p''$  étant les valeurs imaginaires de  $\sqrt[3]{1}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d+e+f + & \sqrt[4]{(a+b+\overline{p'c+d}+\overline{p''e+f})^2} \\ & + \sqrt[4]{(a+c+\overline{p'b+e}+\overline{p''d+f})^2} \\ & + \sqrt[4]{(a+d+\overline{p'b+f}+\overline{p''c+e})^2} \\ & + \sqrt[4]{(a+e+\overline{p'c+f}+\overline{p''b+d})^2} \\ & + \sqrt[4]{(a+f+\overline{p'd+e}+\overline{p''b+c})^2}] \end{aligned}$$

382 MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE  
renferme les six valeurs

$$\begin{aligned}
 & + \\
 & + \\
 & + p'' \left\{ \begin{array}{l} (a+b+p'c+d+p'e+f) \\ + p' \\ + p'' \end{array} \right. \\
 & + p' \\
 & + \\
 & + p'' \left\{ \begin{array}{l} (a+e+p'b+c+p'd+f) \\ + p' \\ + p'' \end{array} \right. \\
 & + p' \\
 & + \\
 & + p' \left\{ \begin{array}{l} (a+e+p'c+f+p''b+d) \\ + p' \\ + p'' \end{array} \right. \\
 & + p'' \left\{ \begin{array}{l} (a+f+p'd+c+p''b+e) \\ + p' \\ + p'' \end{array} \right. \\
 & + p' \\
 & + \\
 & + p'' \left\{ \begin{array}{l} (a+b+c+d-e-f) \\ + (a+b+d-c-e-f) \\ + (a+c+f-b-d-e) \\ + (a+d-e-b-c-f) \\ + (a+e+f-b-c-d) \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

X V. Veut-on savoir si, sans éléver d'autres puissances que cinq différens carrés, l'on pourroit faire encore une quantité qui fût indifféremment l'une de six? voici le moyen de s'en assurer.

Il faut que chaque lettre, excepté  $a$ , se trouve dans la somme des quantités radicales, deux fois en plus & trois fois en moins, pour satisfaire au cas où tous les radicaux auront le signe  $+$  comme ici

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}[a+b+c+d+e+f + (a+b+c-d-e-f) \\
 & + (a+b+d-c-e-f) + (a+c+f-b-d-e) \\
 & + (a+d-e-b-c-f) + (a+e+f-b-c-d)] = 0; \\
 & \text{mais quand on disposera les signes } + \& - \text{ au-devant des radicaux, de la manière qu'il faudra pour avoir dans tous, } + 1 \text{ pour coefficient d'une des lettres autre que } a, \text{ il faudra que les coefficients } + 1 \& - 1 \text{ continuent de se mi-partir pour toutes les autres lettres, dont la somme doit être zéro; il faut donc que deux lettres quelconques ne soient pas trois fois de même signe dans les cinq quantités radicales: or ces conditions sont impossibles à remplir.}
 \end{aligned}$$

Au reste, ce qui est impossible si l'on veut se borner à cinq carrés, n'a rien que de facile si on en élève dix, car

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}[2(a+b+c+d+e+f) + \sqrt{(a+b+c-d-e-f)^2} \\ & + \sqrt{(a+b+d-c-e-f)^2} + \sqrt{(a+b+e-c-d-f)^2} \\ & + \sqrt{(a+b+f-c-d-e)^2} + \sqrt{(a+c+d-b-e-f)^2} \\ & + \sqrt{(a+c+e-b-d-f)^2} + \sqrt{(a+c+f-b-d-e)^2} \\ & + \sqrt{(a+d+e-b-c-f)^2} + \sqrt{(a+d+f-b-c-e)^2} \\ & + \sqrt{(a+e+f-b-c-d)^2}] \end{aligned}$$

renferme les six valeurs  $a, b, c, d, e, f$ .

XVI. On peut faire une quantité qui ait indifféremment l'une de huit valeurs déterminées, sans éléver d'autres puissances que sept différens carrés, car

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[a+b+c+d+e+f+g+h + \sqrt{(a+b+c+d-e-f-g-h)^2} \\ & + \sqrt{(a+b+c+f-c-d-g-h)^2} \\ & + \sqrt{(a+b+g+h-c-d-e-f)^2} \\ & + \sqrt{(a+c+e+h-b-d-f-g)^2} \\ & + \sqrt{(a+c+f+g-b-d-e-h)^2} \\ & + \sqrt{(a+d+e+g-b-c-f-h)^2} \\ & + \sqrt{(a+d+f+h-b-c-e-g)^2}] \end{aligned}$$

renferme les huit valeurs  $a, b, c, d, e, f, g, h$ .

XVII. On peut faire une quantité qui soit indifféremment l'une de neuf, sans éléver d'autres puissances que huit différens cubes, car  $g'$  &  $g''$  étant les valeurs imaginaires de  $\sqrt[3]{1}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[a+b+c+d+e+f+g+h+k \\ & + \sqrt{(a+b+c+\overline{g'd+e+f}+\overline{g'g+h+k})^3} \\ & + \sqrt{(a+b+c+\overline{g'g+h+k}+\overline{g'd+e+f})^3} \\ & + \sqrt{(a+d+g+\overline{g'b+f+k}+\overline{g'c+e+h})^3} \\ & + \sqrt{(a+d+g+\overline{g'c+e+h}+\overline{g'b+f+k})^3} \\ & + \sqrt{(a+f+h+\overline{g'b+e+g}+\overline{g'c+d+k})^3} \\ & + \sqrt{(a+f+h+\overline{g'c+d+k}+\overline{g'b+e+g})^3} \\ & + \sqrt{(a+e+k+\overline{g'c+f+g}+\overline{g'b+d+h})^3} \\ & + \sqrt{(a+e+k+\overline{g'b+d+h}+\overline{g'c+f+g})^3}] \end{aligned}$$

renferme les neuf valeurs  $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ .

XVIII. En général, on trouvera toujours les formes de cette espèce, en prenant dans la première, simplifiée comme dans l'*article XII*, les radicaux de même dénomination, en y échangeant les lettres entre elles de toutes les manières, puis faisant une somme de tous ces résultats; car chaque forme élémentaire se compose toujours de cette somme, & souvent, de différentes portions de cette somme.

Les modifications qui paroissent multiplier le nombre de formes des racines, ne sont que des complications des formes élémentaires; comme lorsque l'on prend deux ou plusieurs termes de la racine, & qu'on élève leur somme à une certaine puissance, pour la mettre ensuite sous le radical de même exposant que cette puissance; lorsqu'on fait le produit de deux termes, pour le diviser ensuite par l'un d'eux, &c. &c. & je dis que pour le quatrième degré par exemple, il n'y a de formes essentiellement différentes, que les deux des *articles VII* ou *XII* & *XIII*; que pour le sixième, il n'y a que les trois des *articles IX* ou *XII*, *XIV* & *XV*, &c. car la différence essentielle est dans le degré des radicaux nécessaires.

Sans entrer dans de plus longues discussions à ce sujet, parce que l'objet des formes particulières est moins de faciliter les solutions générales, que d'en simplifier les résultats, nous nous contenterons de remarquer qu'au moyen de tout ce qui précède, notre question principale se trouve réduite au second des trois chefs que nous y avions distingués (*article IV*); c'est - à - dire à transformer en fonction de *types* (*article V*) la quantité de laquelle on peut dire qu'elle égale telle des racines que l'on voudra.

Reprendons un instant le troisième degré.

XIX. On a vu (*articles III* & *V*) que la quantité qui est indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , se présente immédiatement sous la forme

$$\frac{1}{2}[(A) + \sqrt[3]{(A^3) - \frac{1}{4}(A^2B) + 6(ABC) - \frac{1}{4}(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}}] \\ + \sqrt[3]{(A^3) - \frac{1}{4}(A^2B) + 6(ABC) - \frac{1}{4}(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}}],$$

& que pour avoir le tout en fonction de *types*, il ne s'agit que de prendre, au lieu de

$$(a - b) (a - c) (b - c),$$

la racine

la racine de son carré

$$(A^3B^2) - 2(A^3BC) - 2(A^3B^3) + 2(A^3B^2C) - 6(A^3B^2C^2).$$

Les Tables de l'article V donnent le surplus, & l'équation proposée étant

$$Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$$

si l'on fait

$$\begin{aligned} \Delta' \} &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} [ -2N^2 + 3^2 MNP - 3^3 M^2 Q ]} \\ \Delta'' \} &= \sqrt[3]{3M\sqrt{-3(N^2P^2 - 2^2MP^3 - 2^2N^2Q + 2 \cdot 3^2 MNPQ - 3^3 M^2 Q^2)}}, \end{aligned}$$

la formule de résolution sera

$$x = \frac{1}{3M} \left[ -N + \left\{ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right\} \Delta' + \left\{ \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right\} \Delta'' \right]$$

$$+ \left\{ \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right\} \Delta'$$

$$+ \left\{ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right\} \Delta''$$

formule connue & la plus simple possible, comme le prouvent les observations suivantes.

XX. On doit toujours pouvoir distinguer les différentes racines l'une de l'autre, dans la valeur générale qui les renferme toutes, uniquement en y multipliant chaque radical par les différentes racines de l'unité, de même exposant que ce radical; d'où il suit que la formule générale du troisième degré ne peut pas ne renfermer que des radicaux seconds: l'addition des radicaux dans la somme des valeurs qui résolvent concurremment doit donner zéro, ainsi il y faut des radicaux troisièmes.

Il faut que dans chaque radical tout soit zéro quand  $a=b=c$  puisqu'alors on doit trouver  $x = \frac{1}{3}(A) = -\frac{N}{3M}$  sans aucune ambiguïté.

Il faut que  $a^3, b^3$  &  $c^3$  y aient le même coefficient, puisque  $a^3$  par exemple, est de la même difficulté que  $a$  à obtenir en types.... &c.

Mém. 1771.

Ccc

Comme toutes ces conditions exigent que l'on ait sous les radicaux, les nombres imaginaires dont le cube est 1, on voit qu'il est impossible d'éviter dans la solution du troisième degré, ce qu'on appelle le *cas irréductible*.

Il sera facile d'étendre & de généraliser ces remarques.

XXI. Nous avons prouvé (*article XIII*) que

$\frac{1}{2}[(A) + \sqrt{a+b+c-d})^3 + \sqrt{a+b+c-d})^3 + \sqrt{(a+d-b-c)^3}]$  renferme les quatre valeurs  $a, b, c, d$ , si l'on y suppose les carrés développés. Ces carrés sont, savoir,

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & (a+b+c-d)^3 \\ & (a+c-b-d)^3 \\ & (a+d-b-c)^3 \end{aligned} \right\} = (A^3) - 2(AB) + 4 \begin{cases} ab+cd \\ ac+bd \\ ad+bc \end{cases} \\ & = (A^3) - \frac{2}{3}(AB) + \frac{1}{3} \begin{cases} 2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc), \\ 2(ac+bd) - (ad+bc) - (ab+cd), \\ 2(ad+bc) - (ab+cd) - (ac+bd). \end{cases} \end{aligned}$$

En échangeant les lettres entre elles, de toutes les manières possibles; dans

$$2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc),$$

on ne trouve que les trois valeurs

$$2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc) = u'$$

$$2(ac+bd) - (ad+bc) - (ab+cd) = u''$$

$$2(ad+bc) - (ab+cd) - (ac+bd) = u''';$$

mais par l'article III

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(ab+cd+r'\overline{ac+bd}+r''\overline{ad+bc})^3} \\ & + \sqrt[3]{(ab+cd+r''\overline{ac+bd}+r'\overline{ad+bc})^3}, \end{aligned}$$

en y supposant les cubes développés, sera indifféremment ou  $u'$ , ou  $u''$ , ou  $u'''$ . Le premier de ces cubes est

$$\begin{aligned} & (A^3B^3) - \frac{1}{3}(A^4B^2C) + 6(A^4BCD) + 6(A^4B^2C^2) - 3(A^3B^3CD), \\ & + \frac{1}{3}(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\sqrt{-3}; \end{aligned}$$

l'autre n'en diffère que parce que  $\sqrt{-3}$  y est en moins: or comme le carré du produit des différences entre les racines est

une fonction de types, la solution ne dépend plus que des propositions de l'article V.

L'équation proposée étant

$$\begin{aligned}
 & Mx^4 + Nx^3 + Px^2 + Qx + R = 0, \\
 & \Delta' \left\{ = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \left( z^4 P^3 - 3^4 N P Q + 3^3 M Q^3 + 3^3 N^2 R - z^3 3^3 M P R \right) \right. \\
 & \left. + \left\{ 3 \sqrt{-3} \left[ \begin{array}{l} N^2 P^2 Q^2 \\ -z^2 M P^2 Q^2 \\ -z^4 N^2 Q^2 \end{array} \right] - \begin{array}{l} -z^3 N^2 P^2 R \\ +z^4 M P^2 R \\ +z^4 3^2 M N^2 P R^2 \end{array} \right] \right), \\
 & - \left\{ \begin{array}{l} -z^4 N^2 Q^2 \\ +z^2 3^2 N^2 P Q R \\ +z^7 M^2 P^2 R^2 \\ +z^2 3^2 M N P Q^2 \\ -z^4 5 M N P Q R \\ -z^6 3 M^2 N Q R^2 \\ -z^3 M^2 Q^2 \\ -z^2 3 M N^2 Q^2 R \\ +z^8 M^2 R^2 \\ +z^4 3^2 M^2 P Q^2 R \end{array} \right\} \\
 & u' \left\{ = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right\} \Delta' \left\{ \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right\} \Delta'' \\
 & u'' \left\{ = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right\} \Delta' \left\{ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right\} \Delta'' \\
 & u''' \left\{ = \frac{1}{2} \right\} \Delta' \left\{ \frac{1}{2} \right\} \Delta'' 
 \end{aligned}$$

ou bien  $u'$ ,  $u''$  &  $u'''$  étant les trois racines de l'équation

$$\begin{aligned}
 & z^3 (-z^4 - 3(-P^2 + 3NQ - z^3 3MR)u \\
 & + (-z^4 P^2 + 3^4 NPQ - 3^3 MQ^2 - 3^3 N^2 R + z^3 3^3 MPR) = 0,
 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
 & u = \frac{1}{z^2 M} \left[ -N \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt[3]{(3N^2 - z^3 MP + z^2 M u'')} \right. \\
 & \left. \pm \left\{ \sqrt[3]{(3N^2 - z^3 MP + z^2 M u'')} \right\} \right. \\
 & \left. \pm \left\{ \sqrt[3]{(3N^2 - z^3 MP + z^2 M u'')} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

& si au lieu des deux derniers radicaux, on prend la racine du carré de leur somme, le tout ne dépendra que de  $u'$ .

XXII. Si nous prenons la forme de l'article XII, savoir,

$\frac{1}{4}[(A) + \sqrt[4]{(a - b + c\sqrt{-1} - d\sqrt{-1})^4}$   
 $+ \sqrt[4]{a + b - c - d)^4} + \sqrt[4]{(a - b - c\sqrt{-1} + d\sqrt{-1})^4}]$   
nous aurons  $(a + b - c - d)^4$  par l'article précédent ;  
& quant aux deux quatrièmes puissances, si l'on fait

$$\Phi = 3^4(A^4) - 2^8 3(A^4 B) - 2 \cdot 3^7 (A^4 B^2)$$

$+ 2^8 2 3 (A^4 B C) - 2^3 3 \cdot 2 3 (A B C D) - 2^8 [3(A^4) - 2(A B)] d^4 + 2^8 7 d^8,$   
*u'* ayant la même valeur que dans l'article précédent, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} (a - b + c\sqrt{-1} - d\sqrt{-1})^4 \\ (a - b - c\sqrt{-1} + d\sqrt{-1})^4 \end{array} \right\} = \frac{1}{3^8} \Phi \left\{ \begin{array}{l} + 2^8(a - b)(c - d)[(a - b)^4 - (c - d)^4] \sqrt{-1} \\ - \end{array} \right\};$$

or faisant

$$\Psi = 2^8 (A^4 B^2) - 2^8 (A^4 B C) + 2^3 3 (A B C D) - d^8;$$

on a

$$[(a - b)(c - d)]^8 = \frac{1}{3^8} \Psi$$

$$[(a - b)^4 - (c - d)^4]^8 = \frac{1}{3^8} (\Phi + 2^8 3 \Psi);$$

d'où, au moyen des propositions de l'article V, résulte la formule suivante,  $\Phi$  &  $\Psi$  étant, savoir,

$$\Phi = 3^8 N^4 - 2^4 3 M N^2 P - 2^5 M^2 P^2 + 2^5 3^2 M^2 N Q - 2^7 3^5 M^2 R$$

$$- 2^8 M (3 N^2 - 2^3 M P) d^4 + 2^8 7 M^8 u^2.$$

$$\Psi = 2^8 P^4 - 2^8 3 N Q + 2^4 3 M R - d^8$$

$$\Psi = \frac{1}{3^2 M} \left[ -N \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{\frac{1}{3} (N^2 - 2^3 M P + 2^8 M u^2)} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ - \sqrt{-1} \\ + \sqrt{-1} \end{array} \right\} \sqrt{\frac{1}{3^2} (\Phi + 2^8 M \sqrt{-1} \Psi (\Phi + 2^8 3 M^2 \Psi))}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ + \sqrt{-1} \\ - \sqrt{-1} \end{array} \right\} \sqrt{\frac{1}{3^2} (\Phi - 2^8 M \sqrt{-1} \Psi (\Phi + 2^8 3 M^2 \Psi))},$$

XXIII. Pour l'équation

$$r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0,$$

par exemple, qui renferme les valeurs imaginaires de  $\sqrt[4]{1}$ , on aura, par la première formule,

$$r = \frac{1}{2}[-1 + \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{s} - \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{-s + 2\sqrt{s}} - \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{-s - 2\sqrt{s}}],$$

& par la seconde,

$$r = \frac{1}{2}[-1 + \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{s} - \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{s(-3 + 4\sqrt{-1})} - \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{s(-3 - 4\sqrt{-1})}].$$

XXIV. Avant de passer au cinquième degré, il faut expliquer une nouvelle notation abrégée qui rendra nos expressions plus concises, & nous fournira des procédés de calcul plus expéditifs que ceux de l'algèbre. Cette notation convient à certaines quantités d'une forme systématique dans lesquelles se résolvent celles que j'appelle *types*, & auxquelles se réduit toujours immédiatement la fonction qui est indifféremment telle des racines que l'on voudra.

J'appellerai *Types partiels*, les expressions abrégées de ces quantités. Ce sont des suites de termes faisant partie du développement d'un même *type*, dont la propriété fondamentale est que si, dans un certain échange entre les lettres, il résulte d'un terme, un autre terme qui soit de la suite, il ne résulte des autres, aucun terme qui n'y soit pas compris; de manière que cet échange n'y produise aucun changement: & qu'au contraire, s'il en résulte un terme qui n'y soit pas compris, aucun des résultans ne le soit.

Je suppose, par exemple,

$$[\alpha \beta \gamma] = \underset{\alpha \beta \gamma}{a b c} + \underset{\gamma \alpha \beta}{a b c} + \underset{\beta \gamma \alpha}{a b c},$$

c'est-à-dire que  $[\alpha \beta \gamma]$  représente la somme de tous les termes différens que l'on peut former en conservant toujours  $a$ ,  $b$  &  $c$ , dans l'ordre alphabétique, prenant au premier terme pour exposants respectifs de ces lettres, les nombres  $\alpha$ ,  $\beta$  &  $\gamma$  dans l'ordre même où ils sont écrits, & concluant ensuite chaque terme, du précédent, en y empruntant les exposants successifs dans l'ordre qui suit, le *dernier*, le *premier*, le *second*; ordre de succession

suffisamment indiqué par celui des caractéristiques 1, II, III, dans l'expression  $[\alpha \beta \gamma]$ , & d'où l'on ne déduit ici que trois termes, puisqu'en continuant toujours, on retomberoit dès le quatrième, sur le premier.

Il suit de-là que

$$[\alpha \gamma \beta] = a^{\alpha} b^{\gamma} c^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} c^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\beta} c^{\alpha},$$

& que par conséquent, en ne supposant dans le développement du type  $(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma})$  que  $a$ ,  $b$  &  $c$ , on a

$$(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}) = [\alpha \beta \gamma] + [\alpha \gamma \beta].$$

Il est facile de conclure semblablement

$$[\alpha \beta \gamma \delta] = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} + a^{\delta} b^{\gamma} c^{\alpha} d^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} c^{\delta} d^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\delta} c^{\beta} d^{\alpha}$$

$$[\alpha \delta \beta \gamma] = a^{\alpha} b^{\delta} c^{\beta} d^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\beta} c^{\delta} d^{\alpha} + a^{\beta} b^{\gamma} c^{\alpha} d^{\delta} + a^{\alpha} b^{\delta} c^{\alpha} d^{\beta}$$

$$[\alpha \gamma \delta \beta] = a^{\alpha} b^{\gamma} c^{\delta} d^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} c^{\delta} d^{\gamma} + a^{\delta} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\alpha} + a^{\gamma} b^{\beta} c^{\alpha} d^{\delta}$$

$$[\alpha \beta \delta \gamma] = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\delta} d^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\delta} c^{\alpha} d^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} c^{\gamma} d^{\delta} + a^{\delta} b^{\gamma} c^{\beta} d^{\alpha}$$

$$[\alpha \gamma \beta \delta] = a^{\alpha} b^{\gamma} c^{\beta} d^{\delta} + a^{\delta} b^{\beta} c^{\delta} d^{\alpha} + a^{\beta} b^{\delta} c^{\alpha} d^{\gamma} + a^{\delta} b^{\alpha} c^{\gamma} d^{\beta}$$

$$[\alpha \delta \beta \gamma] = a^{\alpha} b^{\delta} c^{\beta} d^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\beta} c^{\delta} d^{\alpha} + a^{\beta} b^{\gamma} c^{\delta} d^{\alpha} + a^{\delta} b^{\beta} c^{\alpha} d^{\gamma}$$

d'où il suit qu'en ne supposant dans le développement du type  $(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta})$  que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  &  $d$ , on a

$$(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta}) = [\alpha \beta \gamma \delta] + [\alpha \delta \beta \gamma] + [\alpha \gamma \delta \beta] \\ + [\alpha \beta \delta \gamma] + [\alpha \gamma \beta \delta] + [\alpha \delta \beta \gamma].$$

Il faut observer, avant d'aller plus loin, que dans les loix que j'ai prises ici, j'avois une intention particulière. Les deux portions  $[\alpha \beta \gamma]$  &  $[\alpha \gamma \beta]$  du type  $(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma})$  sont telles qu'elles ne font que se convertir réciproquement l'une en l'autre

par les échanges qu'on peut faire dans la valeur de chacune, entre les lettres  $a$ ,  $b$  &  $c$ ; j'ai de même assujetti à cette propriété les six portions dans lesquelles j'ai partagé ( $A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta$ ): ainsi, il faut, pour obtenir en *types* la quantité [ $\alpha \beta \gamma$ ], faire une fonction qui ait indifféremment l'une de ces deux valeurs [ $\alpha \beta \gamma$ ] & [ $\alpha \gamma \beta$ ], & de même, pour obtenir en *types* la quantité [ $\alpha \beta \gamma \delta$ ], il faut faire une fonction qui ait indifféremment l'une des six valeurs

$$\begin{aligned} & [\alpha \beta \gamma \delta], \quad [\alpha \delta \beta \gamma], \quad [\alpha \gamma \delta \beta]; \\ & [\alpha \beta \delta \gamma], \quad [\alpha \gamma \beta \delta] \text{ &} [\alpha \delta \gamma \beta]. \end{aligned}$$

Ce n'est que pour satisfaire à cette vue particulière, qu'il a fallu partager le *type* ( $A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta$ ) en portions où les caractéristiques I, II, III & IV se trouvaient dans un ordre différent.

En suivant ce procédé, on aura

$$\begin{aligned} [\alpha \beta \gamma \delta \epsilon] &= a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\epsilon + a^\delta b^\epsilon c^\beta d^\gamma e^\alpha + a^\gamma b^\alpha c^\epsilon d^\beta e^\delta \\ &\quad + a^\beta b^\delta c^\alpha d^\epsilon e^\gamma + a^\epsilon b^\gamma c^\delta d^\alpha e^\beta \\ [\alpha \epsilon \delta \beta \gamma] &= a^\alpha b^\epsilon c^\delta d^\beta e^\gamma + a^\beta b^\gamma c^\epsilon d^\delta e^\alpha + a^\delta b^\alpha c^\gamma d^\epsilon e^\beta \\ &\quad + a^\epsilon b^\beta c^\alpha d^\gamma e^\delta + a^\gamma b^\delta c^\beta d^\alpha e^\epsilon \\ [\alpha \gamma \beta \epsilon \delta] &= a^\alpha b^\gamma c^\beta d^\epsilon e^\delta + a^\epsilon b^\delta c^\gamma d^\beta e^\alpha + a^\beta b^\alpha c^\epsilon d^\gamma e^\delta \\ &\quad + a^\gamma b^\epsilon c^\alpha d^\beta e^\delta + a^\delta b^\beta c^\epsilon d^\alpha e^\gamma \\ [\alpha \delta \epsilon \gamma \beta] &= a^\alpha b^\delta c^\epsilon d^\gamma e^\beta + a^\gamma b^\beta c^\delta d^\epsilon e^\alpha + a^\epsilon b^\alpha c^\beta d^\delta e^\gamma \\ &\quad + a^\delta b^\gamma c^\alpha d^\beta e^\epsilon + a^\beta b^\epsilon c^\gamma d^\alpha e^\delta \end{aligned}$$

La somme de ces quatre *types partiels* est encore un *type partiel*, qui, à cause de l'enchaînement entre les exposants  $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ , peut être noté ainsi [ $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ ], en concevant que le premier

ordre de caractéristiques détermine, non une suite de simples termes, mais une suite de *types partiels* de la forme  $[a b c d e]$ ,

forme indiquée par le second ordre de caractéristiques. Cependant à cause des difficultés de l'impression, je substituerai ici, à cette notation qui m'est familière, la suivante qui peut suffire pour ce Mémoire: je ferai

$$[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon] = [\alpha\beta\gamma\delta\epsilon] + [\alpha\delta\beta\gamma] + [\alpha\gamma\beta\delta\epsilon] + [\alpha\delta\epsilon\gamma\beta]$$

& semblablement

$$[\alpha\beta\epsilon\gamma\delta] = [\alpha\beta\epsilon\gamma\delta] + [\alpha\epsilon\gamma\delta\beta] + [\alpha\gamma\delta\beta\epsilon] + [\alpha\delta\beta\epsilon\gamma]$$

$$[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma] = [\alpha\beta\delta\epsilon\gamma] + [\alpha\epsilon\beta\gamma\delta] + [\alpha\gamma\epsilon\delta\beta] + [\alpha\delta\gamma\beta\epsilon]$$

Si l'on suppose de plus

$$[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta] = [\alpha\beta\gamma\epsilon\delta] + [\alpha\delta\epsilon\beta\gamma] + [\alpha\gamma\beta\delta\epsilon] + [\alpha\epsilon\delta\gamma\beta]$$

$$[\alpha\beta\delta\gamma\epsilon] = [\alpha\beta\delta\gamma\epsilon] + [\alpha\delta\gamma\epsilon\beta] + [\alpha\gamma\epsilon\beta\delta] + [\alpha\epsilon\beta\delta\gamma]$$

$$[\alpha\beta\epsilon\delta\gamma] = [\alpha\beta\epsilon\delta\gamma] + [\alpha\delta\beta\gamma\epsilon] + [\alpha\gamma\delta\epsilon\beta] + [\alpha\epsilon\gamma\beta\delta]$$

on aura

$$(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\epsilon) = [\alpha\beta\gamma\delta\epsilon] + [\alpha\beta\epsilon\gamma\delta] + [\alpha\beta\delta\epsilon\gamma] \\ + [\alpha\beta\gamma\epsilon\delta] + [\alpha\beta\delta\gamma\epsilon] + [\alpha\beta\epsilon\delta\gamma]$$

& les six *types partiels* qui composent cette somme, seront tels qu'ils ne feront que se convertir réciproquement l'un en l'autre, si l'on échange dans la valeur de chacun, les lettres  $a, b, c, d, e$ , entre elles: de manière que pour obtenir en *types* l'un de ces *types partiels*, il faudra faire une fonction qui soit indifféremment l'un des six.

Ces exemples suffisent pour entendre l'algorithme en question.

XXV. Lorsque  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$  sont des nombres déterminés, s'il y en a d'égaux entre eux, il pourra arriver que substituant dans ces formules d'abréviation & dans leurs valeurs, on trouve dans la valeur, des termes qui ne diffèrent point: par exemple,

on

on trouve, en substituant dans l'une des formules précédentes,  
 $[2211] = a^2 b^2 c^1 d^1 + a^1 b^1 c^2 d^2 + a^2 b^1 c^1 d^1 + a^1 b^1 c^2 d^1$  ;  
cependant, en suivant immédiatement la loi indiquée par l'ordre  
des caractéristiques I, II, III, IV, on auroit dû s'arrêter, après les  
deux premiers termes.

Pour éviter toute équivoque à cet égard, je supposerai que  
dans le développement des *types partiels*, comme dans celui des  
*types mêmes*, il ne se trouve jamais que des termes divers entre  
eux, & jamais d'autre coëfficient que l'unité.

Ainsi, par exemple,  $[2211]$  ne représentera que les deux  
termes  $a^2 b^2 c d + a b c^2 d^2$ , & le résultat de la substitution dans  
la formule  $+ [\alpha \beta \gamma \delta]$  quand  $\alpha = \beta = 2$ ,  $\gamma = \delta = 1$ ,  
sera  $+ 2 [2211]$ ; &c.

Le cas où quelques-uns des exposants  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$  sont zéro,  
ne produit rien de particulier; ainsi

$$[2100] = a^2 b^1 c^0 d^0 + a^0 b^0 c^2 d^0 + a^1 b^0 c^0 d^0 + a^0 b^0 c^1 d^0 = a^2 b + c^2 d + a b^2 + c d^0$$

$$[2002] = a^2 d^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2.$$

XXV I. On peut, par le moyen des opérations suivantes;  
trouver le produit de deux *types partiels* dans lesquels l'ordre entre  
les caractéristiques est, ou doit être conforme.

Soit demandé, par exemple, le produit de  $[2100]$  par  
 $[7040]$ ; j'écris quatre fois  $7040$ , & au-dessus, les quatre  
permutations de  $2100$  indiquées par l'ordre des caractéristiques,  
comme il suit.

$$\begin{array}{cccc} 2100 & 0021 & 1200 & 0012 \\ 7040 & 7040 & 7040 & 7040 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 7040 & 7040 & 7040 & 7040 \\ 2100 & 0021 & 1200 & 0012 \end{array}$$

J'ajoute les nombres qui se trouvent immédiatement l'un sur  
l'autre, & j'ai, pour le produit,

$$[2100] [7040] = [2140] + [7061] + [8240] + [7052].$$

Cet exemple suffiroit pour appliquer le même procédé à tous

394 MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE  
 les cas, si les réductions, lorsqu'il y en a, n'exigeoient une ou deux considérations particulières.

Soit proposé le produit de [10022] par [31100]; je fais

$$\begin{array}{r} 31100 \quad 00113 \quad 13010 \quad 10301 \quad 01031 \\ \times 10022 \quad 10022 \quad 10022 \quad 10022 \quad 10022 \\ \hline \end{array}$$

d'où

$$\begin{aligned} [10022][31100] &= [41122] + [10135] \\ &+ [23032] + [20323] + [11053]; \end{aligned}$$

mais, dans ce produit, les deux *types partiels* [10135] & [11053] représentent chacun cinq termes différens, au lieu que les deux [23032] & [20323], représentent les cinq mêmes termes.

Pour faire ces sortes de réductions, en calculant, je suppose, des *types partiels* de la forme [ $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ ], j'ai sous les yeux, ou dans la mémoire, l'ordre de permutation que voici

12345, 45231, 31524, 24153, 53412,  
 lequel est indiqué par 12345.

Cet enchaînement me fait voir que [2 3 0 3 2] est la même chose que [0 2 2 3 3], & que [2 0 3 2 3] n'est encore que la même chose; car, pour trouver un équivalent de [2 3 0 3 2], dans lequel 0 qui occupe ici la troisième place, occupe la première, je choisis 3 1 5 2 4, & je m'en sers pour appeler les nombres dans cet ordre:

- 0 qui est le 3.<sup>me</sup>
- 2 qui est le 1.<sup>er</sup>
- 2 qui est le 5.<sup>me</sup>

$3$  qui est le  $2^{\text{me}}$

$3$  qui est le  $4^{\text{me}}$

Pareillement, pour trouver un équivalent de  $[2 \underset{v}{0} \underset{m}{3} \underset{n}{2} \underset{v}{3}]$ , dans lequel  $0$  qui occupe ici la deuxième place, occupe la première, je choisis  $24153$ , dont je me fers pour appeler les nombres dans cet ordre:

$0$  qui est le  $2^{\text{me}}$

$2$  qui est le  $4^{\text{me}}$

$2$  qui est le  $1^{\text{er}}$

$3$  qui est le  $5^{\text{me}}$

$3$  qui est le  $3^{\text{me}}$

& ainsi des autres.

On a donc, après avoir ordonné & réduit,

$$\begin{aligned} [10022] \quad [31100] &= [41122] + [51310] \\ &+ 2 [02233] + [53101]. \end{aligned}$$

Soit encore proposé le produit de  $[21110]$  par  $[21101]$ ;  
je fais

$$\begin{array}{ccccccc} 21101 & 01112 & 12110 & 10211 & 11021 \\ 21110 & 21110 & 21110 & 21110 & 21110, \end{array}$$

& je dois conclure

$$\begin{aligned} [21110] \quad [21101] &= [42211] + 5 [22222] \\ &+ [02233] + [21133] + [23311]; \end{aligned}$$

parce qu'en conséquence de l'article XXV,  $[22222]$  ne représente qu'un seul terme.

On calculera d'une manière analogue le produit  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon] \times [abcde]$ ; &c. & ainsi de tous les autres types partiels de

D d d ij

même forme entre eux : les détails ci-dessus doivent suffire pour tous les cas.

Je n'écrirai communément, dans la suite, les caractéristiques I, II, III, &c. que sous un seul des termes, quand leur ordre sera conforme dans tous.

**X X V I I .** On a vu (*article III*) que dans la forme où se présente immédiatement la fonction qui est indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , il reste une quantité dans laquelle il n'est pas indifférent d'échanger les lettres entre elles ; cette quantité est  $a^2b + b^2c + ac^2 - a^2c - ab^2 - bc^2$  ou  $[210] - [201]$  qui dépend du second degré.

On a vu de même (*article XXI*) que dans la forme où se présente immédiatement la fonction qui est indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , il reste la quantité  $2(ab + cd) - (ac + bd + ad + bc) = 2[1100] - [1010]$ , qui dépend du troisième degré, & non du sixième, quoique de la forme  $[\alpha\beta\gamma\delta]$ , parce que dans les valeurs particulières de  $\alpha, \beta, \gamma & \delta$  qui ont lieu,  $[\alpha\beta\gamma\delta] & [\alpha\beta\delta\gamma]$  ne diffèrent point.

Passons au cinquième degré.

**X X V I I I .** Si l'on fait

$$\begin{aligned} (a + r' b + r'' c + r''' d + r^{iv} e)^5 &= \Delta'^5 \\ (a + r'' b + r' c + r^{iv} d + r''' e)^5 &= \Delta''^5 \\ (a + r''' b + r^{iv} c + r' d + r' e)^5 &= \Delta'''^5 \\ (a + r^{iv} b + r'' c + r' d + r'' e)^5 &= \Delta^{iv^5} \end{aligned}$$

on aura (*article VIII*), pour la fonction qui égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , ou  $e$ , ceci

$$\frac{1}{5} [(A) + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{iv}].$$

Élevant les cinquièmes puissances indiquées, en faisant usage du premier système d'équations entre les  $r$  (*article VIII*), on a, si l'on suppose

$$2 [31100] + 3 [12200] = u,$$

$$\begin{aligned} [41000] &+ 2 [30002] + 2^2 [30110] \\ &+ 2 \cdot 3 [12020] + 2^2 3 [21011] = \phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [40100] &+ 2 [30020] + 2^2 [31001] \\ &+ 2 \cdot 3 [10202] + 2^2 3 [20111] = \phi'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [40010] &+ 2 [32000] + 2^2 [30101] \\ &+ 2 \cdot 3 [10220] + 2^2 3 [21110] = \phi''', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [40001] &+ 2 [30200] + 2^2 [31010] \\ &+ 2 \cdot 3 [12002] + 2^2 3 [21101] = \phi''', \end{aligned}$$

$$\Delta' s = (A^5) + 2^2 3 \cdot 5 (ABCDE) + 2 \cdot 5 u' + 5r' \phi' + 5r'' \phi'' + 5r''' \phi''' + 5r^{iv} \phi^{iv}$$

$$\Delta'' s = (A^5) + 2^2 3 \cdot 5 (ABCDE) + 2 \cdot 5 u' + 5r'' \phi' + 5r' \phi'' + 5r^{iv} \phi''' + 5r''' \phi^{iv}$$

$$\Delta''' s = (A^5) + 2^2 3 \cdot 5 (ABCDE) + 2 \cdot 5 u' + 5r''' \phi' + 5r^{iv} \phi'' + 5r' \phi''' + 5r' \phi^{iv}$$

$$\Delta^{iv} s = (A^5) + 2^2 3 \cdot 5 (ABCDE) + 2 \cdot 5 u' + 5r^{iv} \phi' + 5r''' \phi'' + 5r'' \phi''' + 5r'' \phi^{iv}$$

ou, en employant les plus simples valeurs de  $r$ , de l'article XXIII,  
& faisant pour simplifier

$$\begin{aligned} (A^5) &- \frac{s}{z^2} (A^4 B) - \frac{s}{z} (A^3 B^2) - s (A^3 B C) \\ &- \frac{3 \cdot s}{z} (A^2 B^2 C) - 3 \cdot s (A^2 B C D) + 2^2 3 \cdot 5 (ABCDE) = M \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' s \\ \Delta'' s \\ \Delta''' s \\ \Delta^{iv} s \end{array} \right\} = M + \frac{s^2}{z^2} u' + \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{z^2} (\phi' + \phi'' - \phi''' - \phi^{iv}) / \sqrt{3} \\ \frac{s}{z^2} (\phi' - \phi'' + \phi''' - \phi^{iv}) / \sqrt{-s + 2\sqrt{3}} \\ \frac{s}{z^2} (\phi' - \phi'' - \phi''' + \phi^{iv}) / \sqrt{-s - 2\sqrt{3}} \end{array} \right.$$

Or  $u'$  est de la forme  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$  qui dépend (article XXIV)

d'une équation particulière du sixième degré, & l'on va voir que le carré de  $(\phi' + \phi'' - \phi''' - \phi^{IV})$ , ainsi que la quantité qui est indifféremment, ou  $(\phi' - \phi'' + \phi''' - \phi^{IV})^2$ , ou  $(\phi' - \phi'' - \phi''' + \phi^{IV})^2$ , ne renferment que des *types partiels* de cette même forme.

On pourroit le démontrer *à priori*; car

$$\begin{aligned} (\phi' + \phi'' - \phi''' - \phi^{IV})^2 &= \phi'^2 + \phi''^2 + \phi'''^2 + \phi^{IV^2} \\ &- 2(\phi'\phi'' + \phi''\phi^{IV} + \phi'\phi^{IV} + \phi''\phi''') + 2(\phi'\phi'' + \phi''\phi^{IV}); \\ (\phi' - \phi'' + \phi''' - \phi^{IV})^2 &\} = \phi'^2 + \phi''^2 + \phi'''^2 + \phi^{IV^2} - 2(\phi'\phi'' + \phi''\phi^{IV}) \\ (\phi' - \phi'' - \phi''' + \phi^{IV})^2 &\} \end{aligned}$$

$$- \left\{ 2\sqrt{\phi'\phi''' + \phi''\phi^{IV} - \phi'\phi^{IV} - \phi''\phi'''} \right\}^2$$

& les *types partiels* que renferme  $\phi'$ , étant comparés chacun à  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$ , les correspondans de  $\phi''$  feront  $[\alpha\gamma\beta\epsilon\delta]$ ;

ceux de  $\phi'''$  feront  $[\alpha\epsilon\delta\beta\gamma]$ ;

ceux de  $\phi^{IV}$  feront  $[\alpha\delta\epsilon\gamma\beta]$ ;

d'où il suit que  $\phi'\phi''$  sera de la forme  $[\text{abcde}] + [\text{acbed}]$

qui est un *type partiel*,  $\phi''\phi^{IV}$  étant  $[\text{aedbc}] + [\text{adecb}]$ ;

que  $\phi'\phi''' + \phi''\phi^{IV}$  étant de la forme de  $\phi'\phi''$ ,  $\phi'\phi^{IV} + \phi''\phi'''$  fera de celle de  $\phi''\phi^{IV}$ ; &c.

Il suffit d'indiquer ici cette manière de démontrer. En faisant le calcul en entier, on trouvera

$$\begin{aligned} \phi'^2 + \phi''^2 + \phi'''^2 + \phi^{IV^2} &= [82000] \\ + 2^2 [72010] + 2^2 3 [53020] + 2^4 5 [43201] \\ + 2^3 [70111] + 2^3 3 [53002] + 2^4 5 [43012] \\ + 2^2 [64000] + 2^3 [53200] + 2^5 5 [43102] \end{aligned}$$

+ 2^3 [63100]	+ 2^7 [53110]	+ 2^3 5 [43120]
+ 2^2 [63001]	+ 2^4 3 [53011]	+ 2^3 5^2 [43111]
+ 2^4 [62020]	+ 2^3 3^2 [51022]	+ 2^3 3^5 [40222]
+ 2^3 [62011]	+ 2^4 3 [51220]	+ 2^3 3^5^2 [42121]
+ 2^3 [62110]	+ 2^3 5 [52111]	+ 2^3 5 [10333]
+ 2^4 [62101]	+ 2^5 [24040]	+ 2^3 5^2 [03232]
+ 2^3 [54001]	+ 2^5 [04141]	+ 2^4 5^2 [23131]
+ 2^2 [54100]	+ 2^5 [43030]	+ 2^3 3^5^2 [31222]
+ 2^4 [54010]	+ 2^5 [43210]	

$$\phi' \phi'' + \phi''' \phi^{IV} = [81100]$$

+ 2.3 [72001]	+ 2^3 19 [53101]	+ 2^3 5^2 [43021]
+ 2^4 [63010]	+ 2.3^2 7 [51202]	+ 2^3 3.5^2 [42211]
+ 2^4 [62200]	+ 3^5 [24400]	+ 2^3 3.5.7 [03322]
+ 2^4 5 [61111]	+ 2.5.11 [04411]	+ 2^3 5^2 [23311]
+ 5 [55000]	+ 2^3 5 [43300]	+ 2^3 3^5^2 [22222]

$$\begin{aligned} \phi' \phi''' + \phi'' \phi^{IV} \\ + \phi' \phi^{IV} + \phi'' \phi''' = [81010] \end{aligned}$$

+ 2 [73000]	+ 2^4 [54100]	+ 2.5.11 [42013]
+ 2 [70021]	+ 2.7 [52030]	+ 2^3 3.5 [43210]
+ 2^2 [71002]	+ 2^4 [50032]	+ 3.5 [24040]
+ 2^4 [71110]	+ 2^7 [53020]	+ 3^5 [04114]
+ 2 [60040]	+ 2^5 [53011]	+ 2.3.5 [43003]
+ 2 [63100]	+ 2^2 11 [51013]	+ 2^3 5^2 [43111]
+ 2^3 [61030]	+ 2^4 3 [52210]	+ 2.3.5^2 [42022]
+ 2.5 [62002]	+ 2.3.11 [52102]	+ 2^3 3.5^2 [42121]
+ 2.3^2 [61021]	+ 2^3 5 [51121]	+ 2^3 3.5 [13033]
+ 2.11 [62011]	+ 2.3^2 5 [43102]	+ 2^3 5.11 [03232]
+ 2.13 [62110]	+ 2^5 [41032]	+ 2^4 5^2 [23113]
+ 3^2 [54001]	+ 2.5.11 [42130]	+ 2^3 3.5^2 [32221]
+ 13 [51004]		

De cette dernière valeur, où tous les termes sont de la forme  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ , on tirera  $\phi'\phi'' + \phi''\phi'''$ , en ne prenant que le *type partiel*  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon] + [\alpha\gamma\beta\epsilon\delta]$ , &  $\phi'\phi''' + \phi''\phi'''$ , en prenant l'autre  $[\alpha\delta\epsilon\gamma\beta] + [\alpha\epsilon\delta\beta\gamma]$ : ainsi

$$\begin{aligned}\phi'\phi'' + \phi''\phi''' &= [81010] + [80101] \\ &\quad + 2[73000] + 2[70300] \\ &\quad + \text{&c.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi'\phi''' + \phi''\phi''' &= [81001] + [80110] \\ &\quad + 2[70003] + 2[70030] \\ &\quad + \text{&c.}\end{aligned}$$

& calculant  $(\phi'\phi'' + \phi''\phi''' - \phi'\phi''' - \phi''\phi'')$ , on n'y trouvera que des termes de la forme  $[\alpha b c d e]$ .

Il me paraît certain que ces carrés  $(\phi' + \phi'' - \phi''' - \phi''')^2$ ;  $(\phi' - \phi'' + \phi''' - \phi''')^2$  &  $(\phi' - \phi'' - \phi''' + \phi''')^2$  ne dépendront même, ainsi que  $\alpha$ , que de  $[21100]$ , ou de  $[12200]$ ; car on a  $[31100] = (A)[21100] + [12200]$  —  $(A^2B^2C) - (A^2BCD)$ , & il est facile de parvenir à l'équation identique,

$$\begin{aligned}(A^2B^2) + 2^3(A^2B^2C) + 2^33(A^2BCD) + 2^3(A^2B^4) \\ + 2^2(A^2B^3C) + 2^25(A^2B^2C^2) + 2^25(A^2B^2CD) \\ + 2^3(A^2BCDE) + 2^3(A^2B^4C) + 2^4(A^2B^3C^2) \\ + 2.29(A^2B^3CD) + 2.3^3(A^2B^2C^2D) + 2.61 \\ (A^2B^2CDE) + 2.13(A^2B^4C^2) + 2^4(A^2B^3CD) \\ - 2.3(A^2B^3C^3) + 2.13(A^2B^3C^2D) + 2^25 \\ (A^2B^3CDE) + 2.3^25(A^2B^2C^2D^2) + 2.3.23 \\ (A^2B^2C^2DE) + 2.3.3.13(A^2B^2C^3D) + 2^25 \\ (A^2B^2C^2D^2) + 2^2.103(A^2B^2C^2DE) + 2.3.5.13 \\ (A^2B^2C^2D^2E)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A^3 B^2 C^2 D^2 E) = 2^5 \cdot 17 \quad (A^2 B^2 C^2 D^2 E^2) = 2 \\
 & [21100] \quad \{ 2 (A^3 B) = 2^2 (A^2 B^2) + 2 (A^4 B C) \\
 & + 3 (A^3 B^3) = 13 (A^3 B^2 C) = 2^3 3 (A^3 B C D) \\
 & - 2^2 3 \cdot 5 (A^2 B^2 C^2) = 61 (A^2 B^2 C D) + 2^2 7 \\
 & (A^2 B C D E) = 2^2 [12200] \quad \{ (A^3) = 2^2 5 (A^2 B^2 C) \\
 & - 2^2 5 (A^2 B C D) + 2^2 3 \cdot 5 (A B C D E) = 2 [21100]^* \\
 & \{ 2 \cdot 3 (A^3) + 17 (A B) = 2^4 5 (A) [21100] [12200] \\
 & - 2^2 5^2 [12200]^* = \phi^{12} + \phi^{''2} + \phi^{'''2} + \phi^{IV2}
 \end{aligned}$$

Ainsi la somme des carrés de  $\phi'$ ,  $\phi''$ ,  $\phi'''$ , &  $\phi^{IV}$ , ne dépend, comme celle de leurs premières puissances, que de  $[21100]$  & de  $[12200]$ ; & je crois qu'on trouveroit, pour la somme des cubes & celle des quatrièmes puissances, de pareilles équations; d'où, par les articles *V* & *XVI*, on auroit  $(\phi' \phi'' + \phi'' \phi^{IV})$ ,  $(\phi' \phi''' + \phi'' \phi^{IV})$  &  $(\phi' \phi^{IV} + \phi'' \phi''')$  en fonction de  $[21100]$  & de  $[12200]$ : mais je suis convaincu de plus, qu'il existe, entre  $[21100]$  &  $[12200]$ , deux équations qui donneroient, par élimination, s'il étoit nécessaire, celles du sixième degré en  $[21100]$  seul, & en  $[12200]$  seul; & d'où l'on tireroit l'un de ces deux *types partiels* en fonction de l'autre, soit rationnelle, en prenant un avant-dernier résultat de l'élimination, soit irrationnelle mais entière, en résolvant immédiatement. *Voyez celles ci-après*, entre *u* & *w* (*article XXXI*). Ces équations étant des fonctions rationnelles, égales identiquement à zéro, sont faciles à trouver; mais je n'ai pas fait le calcul. Je transcrirai seulement la valeur suivante

$$\begin{aligned}
 & - (A^7 B^2 C) - (A^7 B C D) + 3 \cdot 5 (A^6 B^3 C) + 2 \cdot 7 \\
 & (A^6 B^2 C^2) + 29 (A^6 B^2 C D) + 2 \cdot 3^2 5 (A^6 B C D E) \\
 & + 5 (A^5 B^3) + 3 \cdot 5 (A^5 B^4 C) + 2 \cdot 3 \cdot 5 (A^5 B^3 C^2) \\
 & + 3^2 5 (A^5 B^3 C D) + 2^2 13 (A^5 B^2 C^2 D) + 2^2 13
 \end{aligned}$$

Mémo. 1771.

Eee

$$\begin{aligned}
 & (A^5 B^2 C D E) + 2 \cdot 5 \cdot 7 (A^4 B^3 C^2) + 2 \cdot 5 \cdot 11 \\
 & (A^4 B^4 C D) + 5 \cdot 19 (A^4 B^3 C^3) + 2^3 5 \cdot 7 (A^4 B^3 C^2 D) \\
 & + 3 \cdot 5^2 7 (A^4 B^3 C D E) + 2 \cdot 5 \cdot 43 (A^4 B^2 C^2 D^2) \\
 & + 5 \cdot 149 (A^4 B^2 C^3 D E) + 3 \cdot 5 \cdot 31 (A^3 B^5 C^3 D) \\
 & + 5 \cdot 137 (A^3 B^3 C^2 D^2) + 2 \cdot 3^2 5^2 (A^3 B^3 C^2 D E) \\
 & + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37 (A^3 B^2 C^2 D^2 E) + 2^2 5^2 41 (A^3 B^2 C^2 D^2 E^2) \\
 & + [21100] \{ (A^6) + (A^5 B) - 3 \cdot 5 (A^4 B^2) - 3 \cdot 5 \\
 & (A^4 B C) - 3 \cdot 5 (A^3 B^3) - 5 \cdot 13 (A^3 B^2 C) - 5^3 \\
 & (A^3 B C D) - 2^2 3^2 5 (A^3 B^2 C^2) - 5 \cdot 61 (A^3 B^2 C D) - 5 \\
 & (A^3 B C D E) \} + [12200] \{ 7 (A^5) - 3 \cdot 5 (A^4 B) - 3 \cdot 5 \\
 & (A^3 B^2) - 3 \cdot 5 (A^3 B C) - 2^2 5 \cdot 7 (A^3 B^2 C) - 2 \cdot 5 \cdot 23 \\
 & (A^3 B C D) + 3 \cdot 5 \cdot 71 (A B C D E) \} - 3 \cdot 5 [02211] \\
 & \{ (A^4) - (A^3 B) - 2 (A^3 B^2) + (A^3 B C) - 3^2 \\
 & (A B C D) \} + 2 \cdot 5 [21100]^2 \{ (A^2) + 5 (A B) \} \\
 & + 2 \cdot 5 \cdot 11 (A) [21100] [12200] + 2 \cdot 5 \cdot 13 \\
 & [12200]^2 = \phi' \phi'' + \phi''' \phi''',
 \end{aligned}$$

laquelle fait voir que  $(\phi' + \phi'' - \phi''' - \phi''')^2$  ne dépend que de trois types partielles, de la forme  $[\alpha\beta\beta\delta\delta]$ . Au reste, les recherches que j'ai faites sur l'équation particulière du sixième degré, dont les racines seroient l'expression générale  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ , & les cinq autres quantités qui en résultent, si l'on y échange les lettres  $a, b, c, d, e$ , entre elles, ne m'ayant conduit jusqu'à présent à aucune facilité qui dépendit des égalités  $\gamma = \beta$ ,  $\epsilon = \delta$ , ni des valeurs particulières de ces exposans, toute cette discussion n'a rien ici d'essentiel.

Je n'exposerai mes résultats sur cette équation particulière, qu'après être entré dans quelques détails sur le sixième degré en général. Il faut auparavant dire un mot de l'équation que les Auteurs ont appelé résolvante ou réduite.

**XXIX.** La résolvante du cinquième degré est une équation du quatrième, dont les quatre racines seront  $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$ . Comme il nous est facile de faire la somme des valeurs de ces lettres, la somme de leurs produits deux à deux, &c. nous connoîtrons les coëfficiens de cette équation.

Celui du premier terme étant l'unité, celui du second sera  
 $- z^2 M - z \cdot 5^2 u'$ ,

valeurs données dans l'article précédent.

Si l'on fait

$$\begin{aligned} (A^1B) + z (A^1B^2) + z^2 (A^1BC) + z \cdot 3 (A^1B^2C) \\ + z^2 \cdot 3 (A^1BCD) - 2u' = \phi' + \phi'' + \phi''' + \phi'''' = \Phi, \\ (A^1) + z^2 \cdot 3 \cdot 5 (ABCDE) + z \cdot 5 u' = \Psi, \\ \& \phi' \phi'' + \phi''' \phi'''' = V \text{ dont la valeur en types partiels de la} \\ \text{forme } [\alpha \beta \gamma \delta \epsilon] \text{ se trouve ci-dessus, le coëfficient du troisième} \\ \text{terme sera} \end{aligned}$$

$$z \cdot 3 \Psi^2 - 3 \cdot 5 \Phi \Psi + 5^2 \Phi^2 - 5^3 V.$$

Si l'on fait encore

$$\phi'^2 \phi'''' + \phi''^2 \phi''' + \phi'''^2 \phi' + \phi''''^2 \phi'' = U$$

que l'on trouvera n'être aussi composé que de types partiels de la forme  $[\alpha \beta \gamma \delta \epsilon]$ , le coëfficient du quatrième terme sera

$$- z^2 \Psi^3 + 3 \cdot 5 \Phi \Psi^2 - 2 \cdot 5^2 \Phi^2 \Psi + z \cdot 5^3 V \Psi + 5^3 \Phi^3 - 5^4 \Phi V - 5^4 U.$$

Le cinquième & dernier terme est enfin

$$(A^4) - (A^1B) + (A^1B^2) + z (A^1BC) - (ABCD) - 5 [21100].$$

Il y a cinq autres équations pareilles, qu'on tireroit de celle-ci, en y échangeant de toutes les manières les lettres  $a, b, c, d, e$  entre elles; d'où il suit que le produit de ces six équations seroit une équation complète du 24.<sup>e</sup> degré, qui n'auroit pour coëfficients que des fonctions rationnelles de ceux de la proposée.

Pour faire usage de cette équation du 24.<sup>e</sup> degré, il faudroit l'avoir en dégager le facteur irrationnel qui est la résolvante ci-

404 MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE  
 dessus, & l'on voit que cette décomposition dépend, en dernière analyse, de la facilité d'obtenir  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$  en types.

XXX. Si l'on fait

$$(a + b + \overline{g'c + d} + \overline{g''e + f})^3 = \Delta'^3$$

$$(a + c + \overline{g'b + e} + \overline{g'd + f})^3 = \Delta''^3$$

$$(a + d + \overline{g'b + f} + \overline{g''c + e})^3 = \Delta'''^3$$

$$(a + e + \overline{g'c + f} + \overline{g''b + d})^3 = \Delta^{IV^3}$$

$$(a + f + \overline{g'd + e} + \overline{g''b + c})^3 = \Delta^{V^3}$$

on aura (article XIV), pour la fonction qui égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , ou  $e$ , ou  $f$ , ceci

$$\frac{1}{6} [(A) + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{IV} + \Delta^{V}].$$

Élevant les troisièmes puissances indiquées, si l'on suppose

$$ab(a+b) + cd(c+d) + ef(e+f).$$

$$+ 2(a+b)(c+d)(e+f) = u'$$

$$(a+b)(c+d)[(a+b)-(c+d)] \\ - (a+b)(e+f)[(a+b)-(e+f)] \\ + (c+d)(e+f)[(c+d)-(e+f)] = w'$$

$$\text{ou bien } u' = [210000] + 2[101010] + 2[101001]$$

$$w' = [201000] + [200100] + 2[111000]$$

$$- [200010] - [200001] - 2[110010],$$

on a

$$\Delta'^3 = (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^3}{2} \cdot u' + \frac{3}{2} w' - 3.$$

$u'$  dépend du quinzième degré, ainsi que  $w'^3$ : mais si l'on suppose que  $u''$  &  $w''$  sont ce que deviennent  $u'$  &  $w'$ , si l'on y écrit

$a c \& a + c$  pour  $a b \& a + b$ ,

$b e \& b + e$  pour  $c d \& c + d$ ,

$d f \& d + f$  pour  $e f \& e + f$ ,

que  $u'''$  &  $w'''$  sont ce que deviennent les mêmes  $u'$  &  $w'$  si l'on y écrit

$a d \& a + d$  pour  $a b \& a + b$ ,

$b f \& b + f$  pour  $c d \& c + d$ ,

$c e \& c + e$  pour  $e f \& e + f$ ,

&c. ou bien, en regardant les termes de  $u'$  &  $w'^2$  comme déduits du type partiel

$$[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta] + [\alpha\beta\epsilon\zeta\delta\gamma] + [\alpha\beta\delta\gamma\zeta\epsilon] + [\alpha\beta\zeta\epsilon\gamma\delta]$$

$$+ [\alpha\beta\gamma\delta\zeta\epsilon] + [\alpha\beta\zeta\epsilon\delta\gamma] + [\alpha\beta\delta\gamma\epsilon\zeta] + [\alpha\beta\epsilon\zeta\gamma\delta]$$

si l'on suppose pour  $u''$  &  $w'^2$  les correspondans  $[\alpha\delta\beta\zeta\gamma\epsilon] + \text{etc.}$

$$\text{pour } u'' \& w'^2 \dots \dots \dots [\alpha\gamma\epsilon\beta\zeta\delta] + \text{etc.}$$

$$\text{pour } u^v \& w^{v2} \dots \dots \dots [\alpha\zeta\delta\epsilon\beta\gamma] + \text{etc.}$$

$$\text{pour } u^v \& w^{v2} \dots \dots \dots [\alpha\epsilon\zeta\gamma\delta\beta] + \text{etc.}$$

ce qui donne

$$\Delta'''^3 = (A^3) - \frac{3}{2} (A^2 B) - 3 (ABC) + \frac{3^2}{2} u'' + \frac{3}{2} w'' V - 3,$$

$$\Delta'''^3 = (A^3) - \frac{3}{2} (A^2 B) - 3 (ABC) + \frac{3^2}{2} u''' + \frac{3}{2} w''' V - 3,$$

$$\Delta^{v3} = (A^3) - \frac{3}{2} (A^2 B) - 3 (ABC) + \frac{3^2}{2} u^v + \frac{3}{2} w^v V - 3,$$

$$\Delta^v3 = (A^3) - \frac{3}{2} (A^2 B) - 3 (ABC) + \frac{3^2}{2} u^v + \frac{3}{2} w^v V - 3,$$

les coefficients des équations du cinquième degré qui auront pour racines  $u'$ ,  $u''$ ,  $u'''$ ,  $u^v$ ,  $w'^2$ ,  $w''^2$ ,  $w'''^2$ ,  $w^{v2}$ , dépendront d'équations particulières du sixième degré, puisqu'il y a en  $u$  &  $w^2$  six pareilles équations du cinquième degré, qui résultent des échanges des lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ , entre elles; comme le prouvent les Tables suivantes,

$ab$	$cd$	$ef$
$ac$	$fc$	$db$
$ad$	$bf$	$ce$
$ac$	$eb$	$fd$
$af$	$de$	$bc$

$ab$	$cf$	$de$
$ad$	$ec$	$fb$
$af$	$be$	$cd$
$ac$	$db$	$ef$
$ae$	$fd$	$bc$

$ab$	$ce$	$fd$
$af$	$dc$	$eb$
$ac$	$bd$	$cf$
$ac$	$fb$	$de$
$ad$	$ef$	$bc$

$ab$	$cd$	$fe$
$af$	$ec$	$db$
$ad$	$be$	$cf$
$ac$	$fb$	$ed$
$ae$	$df$	$bc$

$ab$	$ee$	$df$
$ad$	$fc$	$eb$
$ae$	$bf$	$cd$
$ac$	$db$	$fe$
$af$	$ed$	$bc$

$ab$	$cf$	$ed$
$ae$	$dc$	$fb$
$af$	$bd$	$ce$
$ac$	$cb$	$df$
$ad$	$fe$	$bc$

dont les applications me paroissent sensibles.

Les coëfficients de ces équations du cinquième degré se déduiront du *type partiel* suivant,

$$\begin{aligned}
 & [\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta] + [\alpha\epsilon\beta\delta\zeta\gamma] + [\alpha\zeta\epsilon\delta\gamma\beta] + [\alpha\gamma\zeta\delta\beta\epsilon] \\
 & + [\beta\gamma\alpha\zeta\delta\epsilon] + [\epsilon\beta\alpha\gamma\delta\zeta] + [\zeta\epsilon\alpha\beta\delta\gamma] + [\gamma\zeta\alpha\epsilon\delta\beta] \\
 & + [\gamma\alpha\beta\epsilon\zeta\delta] + [\beta\alpha\epsilon\zeta\gamma\delta] + [\epsilon\alpha\zeta\gamma\beta\delta] + [\zeta\alpha\gamma\beta\epsilon\delta] \\
 & + [\delta\epsilon\zeta\alpha\beta\gamma] + [\delta\beta\epsilon\alpha\gamma\zeta] + [\delta\gamma\beta\alpha\zeta\epsilon] + [\delta\zeta\gamma\alpha\epsilon\beta] \\
 & + [\epsilon\zeta\delta\gamma\alpha\beta] + [\beta\delta\epsilon\zeta\alpha\gamma] + [\gamma\beta\delta\epsilon\alpha\zeta] + [\zeta\gamma\delta\beta\alpha\epsilon] \\
 & + [\zeta\delta\epsilon\beta\gamma\alpha] + [\epsilon\delta\beta\gamma\zeta\alpha] + [\beta\delta\gamma\zeta\epsilon\alpha] + [\gamma\delta\zeta\epsilon\beta\alpha]
 \end{aligned}$$

qui devient un *type complet*, lorsqu'on a  $\zeta = \epsilon = \delta$ .

Ajoutons que l'on a les équations identiques

$$\begin{aligned}
 & [210000] = (A) (ab + cd + ef) \\
 & + (a + b) (c + d) (e + f) - (ABC), \text{ &} \\
 & w^4 = 4 [ab + cd + ef - (AB)]^2 \\
 & - 4 (a + b) (c + d) (e + f) [27 (a + b) (c + d) (e + f) + (A)^2] \\
 & + [9 (a + b) (c + d) (e + f) - (A) (ab + cd + ef - (AB))]^2
 \end{aligned}$$

& qu'il me paroît certain qu'il existe deux équations entre  $(ab + cd + ef) & (a + b)(c + d)(e + f)$ , analogues à celles entre  $u & w$  de l'article qui suit.

XXXI. Si l'on emploie la forme de l'article XV, on aura  
 $(a + b + c - d - e - f)^2 = (A^2) - 2(AB)$   
 $+ 4(ab + ac + bc + de + df + ef)$ .  
 Soit  $ab + ac + bc + de + df + ef = u'$ : comme en échangeant entre elles les lettres  $a, b, c, d, e, f$ , de toutes les manières, il s'y fait neuf changemens, soient  $u', u'', u''', u''''$ , &c., ces dix valeurs; chacun des dix carrés dépendra de l'une d'elles; & si l'on calcule les coëfficiens de l'équation du dixième degré dont elles sont les racines, on trouvera, cette équation étant

$$u^{10} + a_1 u^9 + a_2 u^8 + a_3 u^7 + \&c. = 0,$$

&

$$x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx + t = 0$$

étant la proposée,

$$a_1 = -2^3 p, \quad a_2 = 2 \cdot 3 p^2 - 2 \cdot 3 r,$$

$$a_3 = -2^2 p^3 - 3q^2 + 2 \cdot 13pr + 2 \cdot 3 \cdot 11s,$$

$$a_4 = -p^4 - 2 \cdot 3 \cdot 7p^3r + 2^3 3^2 qf \\ + 3^2 pq^2 + r^2 - 2^3 3^4 ps$$

$$a_5 = -3^2 p^3 q^2 - 2 \cdot 3^2 pr^3 + 2 \cdot 3 \cdot 107 p^3t \\ + 2 \cdot 3 \cdot 5 p^2 r - 2^3 3 \cdot 5 p q f + 2 \cdot 3 \cdot 19 rs \\ + 2^2 3 q^2 r - 3 \cdot 4^2 f^2$$

$$a_6 = 3 p^3 q^3 + 2^2 3 r^3 + 2 \cdot 3 \cdot 23 q^2 s \\ + 3 q^4 + 2^2 37 p^2 q f - 2 \cdot 241 p r t \\ - 2^3 p^4 r - 2 \cdot 3 \cdot 23 q^2 f + 3 \cdot 43 t^2 \\ - 2^3 5 p q^2 r + 521 p f^2 \\ + 7^2 p^2 r^3 - 2^2 5 p^4 t$$

$$\begin{array}{l}
 a_7 = - z \cdot 3 \cdot p \cdot q^4 \\
 \quad + z^2 \cdot 11 \cdot p^3 \cdot q^3 \cdot r \\
 \quad - z^4 \cdot 3 \cdot p^3 \cdot r^2 \\
 \quad - z \cdot q^5 \cdot r^2 \\
 \quad - z^4 \cdot 5 \cdot p \cdot r^3 \\
 \quad - z^4 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot q \cdot f
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 - z^2 \cdot 3^2 \cdot q^3 \cdot f \\
 + z \cdot 5 \cdot 47 \cdot p \cdot q \cdot r \cdot f \\
 - z \cdot 449 \cdot p^3 \cdot f^2 \\
 + z \cdot 47 \cdot r \cdot f^3 \\
 + z^6 \cdot 5 \cdot p^4 \cdot t \\
 - z \cdot 3 \cdot 61 \cdot p \cdot q^2 \cdot t
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 + z^4 \cdot 47 \cdot p^3 \cdot r \cdot t \\
 + z^4 \cdot 5 \cdot r^2 \cdot t \\
 - z \cdot 3^2 \cdot 19 \cdot q \cdot f \cdot t \\
 - z^2 \cdot 3 \cdot p \cdot t^2 \\
 - z^2 \cdot 3 \cdot p \cdot t^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 a_8 = 3 \cdot p^3 \cdot q^4 \\
 \quad - z^4 \cdot p^3 \cdot q^2 \cdot r \\
 \quad - z \cdot 3 \cdot q^4 \cdot r \\
 \quad + z^4 \cdot p^4 \cdot r^2 \\
 \quad + z \cdot 3^2 \cdot p \cdot q^2 \cdot r^2 \\
 \quad + z^3 \cdot 11 \cdot p^3 \cdot r^3 \\
 \quad + z^4 \cdot r^4 \\
 \quad + z^4 \cdot p^4 \cdot q \cdot f
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 + z^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot p \cdot q^3 \cdot f \\
 - z^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot p^2 \cdot q \cdot r \cdot f \\
 - z^3 \cdot 3 \cdot q \cdot r^2 \cdot f \\
 + z^2 \cdot 197 \cdot p^3 \cdot f^2 \\
 + 3 \cdot 17 \cdot q^3 \cdot f^2 \\
 - z \cdot 3 \cdot 41 \cdot p \cdot r \cdot f^3 \\
 - z^6 \cdot p^3 \cdot t \\
 + z^4 \cdot 3^2 \cdot p^2 \cdot q^2 \cdot t
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 - z^9 \cdot p^3 \cdot r \cdot t \\
 - z \cdot 3 \cdot q^3 \cdot r \cdot t \\
 - z^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p \cdot r^2 \cdot t \\
 + z^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot p \cdot q \cdot f \cdot t \\
 + 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot f^2 \cdot t \\
 + z^2 \cdot 3 \cdot p^3 \cdot t^2 \\
 + z^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot r \cdot t^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 a_9 = - q^6 \\
 \quad + z \cdot 7 \cdot p \cdot q^4 \cdot r \\
 \quad - z^5 \cdot p^3 \cdot q^2 \cdot r^2 \\
 \quad - z^5 \cdot p^3 \cdot r^3 \\
 \quad + z^3 \cdot q^3 \cdot r^3 \\
 \quad - z^5 \cdot p \cdot r^4 \\
 \quad - z^6 \cdot p^2 \cdot q^3 \cdot f \\
 \quad + z^6 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot q \cdot r \cdot f \\
 \quad - z \cdot 3 \cdot q^3 \cdot r \cdot f \\
 \quad + z^3 \cdot 5 \cdot p \cdot q \cdot r^2 \cdot f
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 - z^5 \cdot 11 \cdot p^4 \cdot f^2 \\
 - z \cdot 43 \cdot p \cdot q^3 \cdot f^2 \\
 + z^3 \cdot 3^2 \cdot p^3 \cdot r \cdot f^2 \\
 - z^3 \cdot r^2 \cdot f^2 \\
 - z \cdot 7 \cdot q \cdot f^3 \\
 - z^3 \cdot 3 \cdot p^1 \cdot q^3 \cdot t \\
 + z^2 \cdot 3 \cdot q^6 \cdot t \\
 + z^7 \cdot p^4 \cdot r \cdot t \\
 + z^3 \cdot p \cdot q^3 \cdot r \cdot t \\
 + z^3 \cdot 7 \cdot p^3 \cdot r^2 \cdot t
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 + z^5 \cdot r^3 \cdot t \\
 - z^6 \cdot 11 \cdot p^2 \cdot q \cdot f \cdot t \\
 + z^3 \cdot 3 \cdot q \cdot r \cdot f \cdot t \\
 - z^4 \cdot 7 \cdot p \cdot f^2 \cdot t \\
 - z^7 \cdot p^3 \cdot t^2 \\
 - z^4 \cdot 3 \cdot q^3 \cdot t^2 \\
 - z^8 \cdot p \cdot r \cdot t^2 \\
 + z^6 \cdot t^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 a_{10} = p \cdot q^6 \\
 \quad - z^3 \cdot p^3 \cdot q^4 \cdot r
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 + z^6 \cdot p^5 \cdot f^2 \\
 + z^2 \cdot 3^2 \cdot p^2 \cdot q^3 \cdot f^2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 - z^5 \cdot p \cdot r^3 \cdot t \\
 + z^6 \cdot 3 \cdot p^3 \cdot q \cdot f \cdot t
 \end{array}$$

+

$$\begin{array}{lll}
 + z^4 p^3 q^2 r^2 & - z^6 p^1 r f^2 & - z^4 p q r f t \\
 + q^6 r^2 & + z^2 q^3 r f^2 & + z^4 3 p^2 f^2 t \\
 - z^3 p q^2 r^3 & + z^3 p r^2 f^2 & - z^3 r f^2 t \\
 + z^4 p^2 r^4 & + z^2 3 p q f^3 & + z^4 3 p q^2 t^2 \\
 + z^4 p^3 q^3 f & + f^4 & + z^7 p^2 r t^2 \\
 - z^6 p^4 q r f & - z^2 3 p q^4 t & + z^4 r^3 t^3 \\
 + z^2 p q^3 r f & - z^6 p^3 r^2 t & - z^6 p t^3 \\
 - z^4 p^2 q r^2 f & - z^3 q^2 r^2 t &
 \end{array}$$

& l'on aura

$$\begin{aligned}
 u = \frac{1}{2} [ & \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u' - p} + \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u'' - p} + \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u''' - p} + \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{IV} - p} + \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^V - p} \\
 & - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{VI} - p} - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{VII} - p} - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{VIII} - p} - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^X - p} - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^X - p} ] \\
 & - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{XI} - p} - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{XII} - p} - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{XIII} - p} - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{XIV} - p} - \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{u^{XV} - p} ] .
 \end{aligned}$$

Si l'on veut n'employer qu'une valeur de  $u$ , on aura

$$x^2 - x^2 \sqrt{u - p} + Ax - \frac{1}{2} (w + \sqrt{w^2 - 4t}) = 0,$$

en supposant

$$A^2 - 2A + r + \sqrt{u - p} (w^2 - 4t) = 0$$

& les deux équations citées précédemment,

$$\begin{aligned}
 &Tw + q^3 - (u - p)(u^2 - 4r)(w + q) + 4(u - p)^2 (uw + zf) = 0 \\
 & \quad (u^2 - 4r)(w + q)^2 + 16(u - p)^3 (w^2 - 4t) \\
 & \quad + 4(u - p)(w + q)(uw + zf) - (u - p)(u^2 - 4r)^2 = 0
 \end{aligned}$$

où la valeur de  $w$  en fonction des racines est  $abc + def$ .

XXXII. C'est donc à l'équation du dixième degré ci-dessus que l'on parvient, par la supposition que la proposée du sixième est le produit de deux du troisième. C'est de même à celles du

quinzième degré de l'*article XXX*, qu'on arrive en la supposant le produit de trois du second : ainsi les motifs d'option entre le procédé de cet *article XXX*, & celui de l'*article XXXI*, dépendent de la nature des racines, dans les cas particuliers ; quoique celui-ci se ramène facilement au premier ; car si l'on fait

$$\begin{aligned} ac + ae + ce + bd + bf + df &= u', \\ ac + af + cf + bd + be + de &= u'', \\ ad + ae + de + bc + bf + cf &= u''' \\ ad + af + df + bc + be + ce &= u''', \end{aligned}$$

les coefficients de l'équation qui aura ces quatre racines, se déduiront du même *type partiel* que  $u'$  &  $u''$  de l'*article XXX*. Celui du second terme, par exemple, sera

$$-z(AB) + z(ab + cd + ef),$$

& ainsi des autres.

Il faut appliquer ces réflexions à l'équation dont les six racines seraient

$$\begin{gathered} [\alpha\beta\gamma\delta\epsilon], [\alpha\beta\epsilon\gamma\delta], [\alpha\beta\delta\epsilon\gamma], \\ [\alpha\beta\gamma\epsilon\delta]], [\alpha\beta\delta\gamma\epsilon]], [\alpha\beta\epsilon\delta\gamma]]. \end{gathered}$$

Mais nous dirons un mot auparavant de certaines équations plus simples qui ont de l'affinité avec elle.

**XXXIII.** L'équation qui auroit les six racines

$$\begin{gathered} a^\alpha b^\beta c^\gamma, a^\gamma b^\alpha c^\beta, a^\beta b^\gamma c^\alpha, \\ a^\alpha b^\gamma c^\beta, a^\beta b^\alpha c^\gamma, a^\gamma b^\beta c^\alpha, \end{gathered}$$

par exemple, conduit par les procédés des articles *XXX* & *XXXI*, à des équations du premier degré ; & si l'on fait  $a^\alpha b^\beta c^\gamma = u'$ , &c. on aura

$$\begin{aligned} u^2 - \Phi u + \Psi &= 0, \\ \Phi &= (A^\alpha B^\beta C^\gamma) \Phi + [(A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\beta} C^{\gamma}) \\ &+ (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{\beta}) + (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\gamma} C^{\beta+\gamma})] \Phi \\ &- [(A^{\alpha+2\beta} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+\beta+\gamma})] \end{aligned}$$

$$+ 2 (A^{\alpha} + \beta + \gamma B^{\alpha} + \beta + \gamma C^{\alpha} + \beta + \gamma)] = 0;$$

$$\Psi^3 - (A^{z\alpha} B^{\beta+z\gamma} C^{\beta+z\gamma}) \Psi^2$$

$$+ (A^{z\alpha+\beta+z\gamma} B^{z\alpha+\beta+z\gamma} C^{z\beta+z\gamma}) \Psi$$

$$- (A^{z\alpha+z\beta+z\gamma} B^{z\alpha+z\beta+z\gamma} C^{z\alpha+z\beta+z\gamma}) = 0;$$

ou bien

$$u^3 - \Gamma u^2 + \Lambda u - (A^{\alpha+\beta+\gamma} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0,$$

$$\Gamma^3 - (A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}) \Gamma + [(A^{z\alpha} B^{\beta+z\gamma} C^{\beta+z\gamma})$$

$$+ (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\beta} C^{z\gamma}) + (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{z\beta})] = 0;$$

$$\Lambda^3 - (A^{\alpha} + \beta B^{\alpha} + \gamma C^{\beta} + \gamma) \Lambda$$

$$+ [(A^{z\alpha} + z\beta B^{\alpha} + \beta + z\gamma C^{\alpha} + \beta + z\gamma)$$

$$+ (A^{z\alpha} + \beta + \gamma B^{z\alpha} + \beta + \gamma C^{z\beta} + z\gamma)$$

$$+ (A^{z\alpha+z\gamma} B^{\alpha} + z\beta + \gamma C^{\alpha+z\beta+\gamma})] = 0.$$

Dans le cas d'une substitution de valeurs déterminées pour  $\alpha$ ,  $\beta$  &  $\gamma$ , il ne faut pas oublier nos suppositions. Si, par exemple,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ , on aura

$$\Gamma^3 - (A^2 B) \Gamma + [(A^3 BC) + (A^3 B^1) + 3 (A^2 B^2 C^1)] = 0;$$

parce que  $(A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{z\beta})$  représente trois termes, & que  $(A^2 B^2 C^1)$  n'en représente qu'un.

L'équation dont les six racines seroient

$$[\alpha \beta \gamma \delta], [\alpha \delta \beta \gamma], [\alpha \gamma \delta \beta],$$

$$[\alpha \beta \delta \gamma], [\alpha \gamma \beta \delta], [\alpha \delta \gamma \beta],$$

traitée par le procédé de l'article XXXI, conduit à une équation du dixième degré, résoluble en deux facteurs rationnels, l'un du quatrième degré, & l'autre du sixième; mais traitée par celui de l'article XXX, elle conduit à une équation du premier: ainsi en y supposant  $[\alpha \beta \gamma \delta] = u'$ , &c. &

$$u^2 - \Phi u + \Psi = 0,$$

Fff ij

les coëfficiens des équations du troisième degré en  $\Phi$  &  $\Psi$  sont des *types*; ce qu'il est facile de prouver *a priori*, puisque  $[\alpha\beta\gamma\delta] + [\alpha\beta\delta\gamma]$  est un *type partiel*, & dépend du troisième degré, & que  $[\alpha\beta\gamma\delta] \times [\alpha\beta\delta\gamma]$  est de la forme  $[\text{abcd}] + [\text{abdc}]$ .

XXXIV. Il faut observer au sujet de l'équation dont les six racines seroient  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ , &c. qu'elle devient du troisième degré, comme les deux de l'article précédent, si l'on y fait  $a = b$ , ou  $a = c$ , ou  $b = c$ , &c.

Il faut observer encore que, si au lieu du premier système d'équations entre les valeurs de  $r$  (*article VIII*), on eût employé le second, on eût eu  $[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta]$  au lieu de  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ ; & que dans les dispositions des lettres  $a, b, c, d, e$ , qui aimèneroient par le premier système,  $[\alpha\beta\epsilon\gamma\delta]$  &  $[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma]$ , on auroit par le second,  $[\alpha\beta\delta\gamma\epsilon]$  &  $[\alpha\beta\epsilon\delta\gamma]$ .

Les coëfficiens de l'équation qui auroit ces six racines, sont faciles à obtenir en *types*: car au moyen des remarques de l'*article XXVI*, on cherchoit la somme des carrés de ces racines, la somme de leurs cubes, &c. ce qui n'exige que de calculer un seul des carrés, ou un seul des cubes; & on en concluroit par l'*article V*, la somme de leurs produits deux à deux; trois à trois, &c. La solution générale du cinquième degré se trouveroit ramenée par-là, à des recherches sur une équation particulière du sixième, dont les coëfficiens seroient des fonctions rationnelles de ceux de la proposée: substituant alors dans les équations du 15.<sup>e</sup> & du 10.<sup>e</sup> degré d'où dépend généralement le sixième, lesquelles se calculeroient de la même manière; & si elles ne se réduissoient pas, substituant de nouveau dans celles d'où dépendent généralement le 15.<sup>e</sup> & le 10.<sup>e</sup> degré, &c. il faudroit, si le cinquième degré est résoluble généralement, qu'on arrivât en dernière analyse à des équations qui eussent des facteurs

rationnels, du quatrième degré au plus; & que dans l'usage à faire des racines de ces facteurs égalés à zéro, on ne fut obligé de passer que par des équations d'un degré moindre que le cinquième. Mais nous pouvons suivre le fil de ces recherches, sans calculer les équations même, en substituant constamment leurs racines pour  $a, b, c, d, e, f, \&c.$  dans les différentes formes élémentaires de quantités qui sont indifféremment l'une de six, de dix, de quinze, &c. car le nombre de changemens produits par les différentes substitutions possibles d'une lettre pour l'autre, nous donnera toujours le nouvel état de la difficulté; & si quelque chose nous empêche d'épuiser successivement par ce moyen toutes les possibilités, ce ne sera que la longueur des calculs.

Il s'agit d'abord de substituer nos six racines dans les articles *XXX* & *XXXI*.

1.<sup>o</sup> Si, dans l'article *XXX*, on fait cette substitution dans l'ordre suivant,

$$[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon] \text{ pour } a$$

$$[\alpha\beta\gamma\delta] \text{ pour } b$$

$$[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma] \text{ pour } c$$

$$[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta] \text{ pour } d$$

$$[\alpha\beta\epsilon\delta\gamma] \text{ pour } e$$

$$[\alpha\beta\delta\gamma\epsilon] \text{ pour } f$$

on trouvera que  $u'$  &  $w^2$  de cet article *XXX* ne dépendent plus du quinzième degré, mais dépendent du cinquième: l'équation qui a pour racines,  $u', u'', u''', u^{IV}$  &  $u^V$ , devient entièrement rationnelle, & les autres valeurs de  $u$  dépendent du 10.<sup>e</sup> degré.

Ainsi la résolution générale du cinquième degré est ramenée par-là, à la résolution d'une, ou, si l'on veut, de plusieurs équations particulières de ce même cinquième degré: mais les racines de ces équations particulières se déduisent des mêmes *types partiels* que les racines de la proposée, c'est-à-dire de  $[a\ b\ c\ d\ e]$ , &c.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 11 & V & 111 & 111 \\ 1 & 11 & 111 & V & 111 \\ 1 & 11 & 111 & 111 & V \end{array}$$

2.<sup>e</sup> Si l'on fait les substitutions analogues, dans l'article XXXI, on trouve dix valeurs de  $u$ , lesquelles se déduisent des mêmes types partiels que les autres quantités dépendantes du dixième degré, dont je viens de parler; (leur forme est  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ , &c.)

& l'équation du 126.<sup>e</sup> degré où l'on arrive en faisant une quantité qui soit l'une de dix, sans éléver d'autres puissances que des carrés, se résout, pour ce cas, en six facteurs rationnels du sixième degré dont les racines se déduisent des types partiels  $[\text{abcde}]$ , &c. d'où l'on est parti, & en six facteurs rationnels du quinzième degré dont les racines se déduisent des mêmes types partiels que les sommes ou les produits deux à deux des précédents, c'est-à-dire de  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ , &c. Enfin, l'équation du

945.<sup>e</sup> degré où l'on arrive en faisant une quantité qui soit l'une de dix, avec des radicaux cinquièmes seulement, n'a, pour ce cas, aucun facteur d'un degré inférieur au cinquième, & ses racines se déduisent toutes de quelque une des formes ci-dessus.

Voilà tout ce que le calcul m'a appris sur cet objet, & je n'ai pas assez de foi aux conjectures dans une matière aussi épingleuse, pour oser m'y livrer ici. J'ajouterai seulement que je n'ai trouvé aucun type partiel composé de cinq lettres, qui dépendit du quatrième degré, ni du troisième; & que je suis convaincu qu'il n'en existe pas: mais il y en a un qui dépend du second degré; c'est

$$\begin{aligned} & [\alpha\beta\gamma\delta\epsilon] + [\alpha\beta\delta\epsilon\gamma] + [\alpha\beta\epsilon\gamma\delta] \\ & + [\alpha\gamma\beta\epsilon\delta] + [\alpha\gamma\epsilon\delta\beta] + [\alpha\gamma\delta\beta\epsilon] \\ & + [\alpha\delta\epsilon\beta\gamma] + [\alpha\delta\beta\gamma\epsilon] + [\alpha\delta\gamma\epsilon\beta] \\ & + [\alpha\epsilon\delta\gamma\beta] + [\alpha\epsilon\gamma\beta\delta] + [\alpha\epsilon\beta\delta\gamma] \end{aligned}$$

d'où l'on déduit en général, que dans le cas des valeurs particulières de  $a, b, c, d, e, f$ , ci-dessus, le type partiel

$$[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta] + [\beta\gamma\alpha\zeta\delta\epsilon] + [\gamma\alpha\beta\epsilon\zeta\delta]$$

$$\begin{aligned}
 & + [\alpha\zeta\delta\gamma\beta] + [\zeta\epsilon\alpha\beta\delta\gamma] + [\epsilon\alpha\zeta\gamma\beta\delta] \\
 & + [\delta\zeta\gamma\alpha\epsilon\beta] + [\zeta\gamma\delta\beta\alpha\epsilon] + [\gamma\delta\zeta\epsilon\beta\alpha] \\
 & + [\delta\beta\epsilon\alpha\gamma\zeta] + [\beta\epsilon\delta\zeta\alpha\gamma] + [\epsilon\delta\beta\gamma\zeta\alpha]
 \end{aligned}$$

dépend du second degré, comme celui de l'*article XXX*, dont il fait partie, dépend du premier.

Au reste, il ne suffit peut-être pas, pour prononcer sur la possibilité de la résolution générale, de se borner à la simple recherche de la forme des résultats ; parce que dans tel cas où l'on fait *à priori* devoir arriver à la forme  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ , il faut savoir de plus, par exemple, si l'on n'aura pas dans tous les termes, les égalités  $\epsilon = d = c$ , qui font de ce *type partiel*, un *type complet*; il faut savoir si ceux des termes où l'on n'auroit pas  $\epsilon = d = c$ , ne seroient pas compris sous la forme  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon] + 2[\alpha\beta\delta\gamma\epsilon]$ , dont les égalités  $\gamma = \beta$ ,  $\epsilon = \delta$ , font encore un *type complet*; &c. car les valeurs particulières des exposants, leurs rapports déterminés dans la suite de *types partiels* conformes d'où l'on sera parti, peuvent faire que ces égalités aient lieu, à cette période du calcul.

**XXXV.** Dans les cas particuliers où l'on a des équations entre les racines, la méthode que nous venons d'exposer peut servir à résoudre, sans passer par les formules générales de résolution.

L'équation  $r'' - 1 = 0$  nous en fournira un exemple : elle conduit (*article VI*) à celle-ci,

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0,$$

dont les racines étant  $a, b, c, d, e$ , on aura par une suite très-simple de l'*article XI*.

$$\begin{aligned}
 a^2 &= -b + 2 & b^2 &= -d + 2 & c^2 &= -e + 2 & d^2 &= -\epsilon + 2 \\
 ab &= -a - c & bc &= -a - e & cd &= -a - d & de &= -a - b \\
 ac &= -b - d & bd &= -b - e & ce &= -b - c & & \\
 ad &= -c - e & be &= -c - d & & & e^2 &= -a + 2 \\
 ae &= -d - c, & & & & & &
 \end{aligned}$$

& tous les types partiels de la forme [abcde] auront une valeur purement rationnelle; ainsi, en prenant par-tout dans l'article XXVIII [ $\alpha\beta\epsilon\delta\gamma$ ] au lieu de [ $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ ], on trouvera

$$\alpha' = 6; \beta' = 26, \gamma' = -18, \delta' = -51, \epsilon' = 4.$$

On a aussi  $(A^3) = 16, (ABCDE) = 1, (A) = 1$ ; d'où

$$x = \frac{1}{5} [1 + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{iv}]$$

en substituant les valeurs

$$\Delta' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}} (89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})$$

$$\Delta'' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}} (89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})$$

$$\Delta''' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}} (89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})$$

$$\Delta^{iv} = \sqrt[5]{\frac{11}{4}} (89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})$$

XXXVI. Comme pour résoudre l'équation

$$\left. \begin{array}{l} x^m - \frac{x^{m-1}}{m-1} \\ \vdots \end{array} \right\} + \text{etc.} = 0;$$

il n'est question au plus que de déterminer (article VI) la quantité qui est indifféremment l'une de ses racines, & nullement de faire qu'il soit indifférent d'y échanger ces racines entre elles, cette résolution nous sera toujours très-facile.

Ainsi, des trois conditions distinctes de la résolution générale des Équations (article IV), la première (article VI) & la troisième (article V) font toujours rigoureusement en notre pouvoir; & nous avons pour remplir la seconde, une marche directe & uniforme (article XXXIV) qui n'a de difficulté que par la longueur inévitable.

