

*REMARQUES
SUR LES
PROBLÈMES DE SITUATION.*

Par M. VANDERMONDE.

4 Mai 1771. **Q**UELLES que soient les circonvolutions d'un ou de plusieurs fils dans l'espace, on peut toujours en avoir une expression par le calcul des grandeurs; mais cette expression ne seroit d'aucun usage dans les Arts. L'ouvrier qui fait une *tresse*, un *réseau*, des *nœuds*, ne les conçoit pas par les rapports de grandeur, mais par ceux de situation: ce qu'il y voit, c'est l'ordre dans lequel sont entrelacés les fils. Il seroit donc utile d'avoir un système de calcul plus conforme à la marche de l'esprit de l'ouvrier, une notation qui ne représentât que l'idée qu'il se forme de son ouvrage, & qui pût suffire pour en refaire un semblable dans tous les temps.

Mon objet ici n'est que de faire entrevoir la possibilité d'une pareille notation, & son usage dans les questions sur des tissus de fils. Je me servirai, pour exposer mon idée, d'un Problème qui se rapporte à ce genre, & qui est très-connu, celui de la *marche du cavalier des échecs*, qui a été résolu par M. Euler, *Mémoires de Berlin*, 1759. Le procédé de ce grand Géomètre suppose qu'on a l'échiquier sous les yeux; je le réduis à une simple opération d'Arithmétique, faite sur des nombres qui ne représentent point des quantités, mais des rangs dans l'espace.

Les nombres nombrans, *un*, *deux*, *trois*, &c. ont été les seuls soumis au calcul, jusqu'au moment où Viète parut: il y soumit les nombres généraux, *l'un*, *un autre*, *un troisième*, &c. qu'il désigna par les lettres de l'alphabet; & ce fut l'époque d'une révolution dans les Mathématiques. Quant aux nombres ordinaux, *le premier*, *le second*, *le troisième*, &c. que Léibnitz introduisit dans les calculs ordinaires, & que je propose ici d'appliquer aux recherches sur les Situations, ils ne paroissent pas avoir encore fixé suffisamment l'attention des Géomètres.

Léibnitz promit un *calcul des Situations*, & mourut sans rien publier. C'est un sujet où tout reste à faire, & qui mériteroit bien qu'on s'en occupât.

(1.) Je conçois l'espace partagé en élémens finis & arbitraires, distingués par leur quantième; c'est-à-dire, 1.^o que je conçois un espace plan, partagé par des parallèles en une suite de bandes, puis partagé de nouveau par une autre suite de parallèles qui coupent les premières; & que je distingue les différentes bandes par la dénomination de première, deuxième, troisième, quatrième, &c. dans l'une & dans l'autre division. Je puis désigner alors un point déterminé, comme appartenant à l'un quelconque des parallélogrammes nés de cette double division, en posant simplement l'un au-dessus de l'autre, deux nombres, dont l'un soit le quantième de la première division, & l'autre, celui de la seconde. Ainsi $\frac{3}{4}$, par exemple, appartient au parallélogramme qui est commun à la quatrième bande dans la première division, & à la troisième dans la seconde. *Voyez figure 1.* Je conçois 2.^o un espace solide partagé d'abord par des plans parallèles en une suite de tranches, puis partagé de nouveau par une autre suite de plans parallèles qui coupent les premiers, & enfin partagé une troisième fois par une nouvelle suite de plans parallèles qui coupent les uns & les autres; & je puis désigner par $\frac{1}{3}$, par exemple, un point déterminé, comme appartenant au parallélipipède commun à la troisième tranche dans la première division, à la deuxième tranche dans la seconde, & à la première dans la troisième. *Voyez figure 2.*

(2.) En général, trois nombres assemblés ainsi, c_a^b , désignant un certain lieu dans l'espace, comme compris entre des limites données, une suite de pareilles expressions $c_a^b; c_a^b, c_a^b \dots$ peut servir à assigner une route dans l'espace, ou bien le cours d'un fil; & suivant qu'on aura besoin de plus ou moins de précision, on resterrera plus ou moins les limites, & l'on sous-entendra plus ou moins de passages à travers les parallélipipèdes contigus.

C'est ainsi, par exemple, qu'en supposant le fil médiocrement

568 MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
flexible & abandonné en liberté, excepté dans les points désignés ci-après, on aura, ce me semble, une expression suffisante de la tresse, fig. 3, au moyen de la suite

$$2_2^3, 1_3^2, 2_3^1, 1_3^1, 2_1^2, 1_2^3, \quad 2_4^3, 1_5^2, 2_5^1, 1_3^1, 2_3^2, 1_4^3, \dots$$

On aura de même l'expression d'un système de mailles de bas, fig. 4, au moyen des suites

$$2_1^4, 1_1^3, 1_1^2, 2_1^1, 2_2^1, 1_2^2, 1_2^3, 2_2^4, \quad 2_3^4, 1_3^3, 1_3^2, 2_3^1, \dots$$

$$2_1^6, 1_1^5, 1_1^4, 2_1^3, 2_2^3, 1_2^4, \dots$$

$$2_1^8, \dots$$

&c.

On doit sentir qu'il ne faudroit pas beaucoup de complication dans des expressions de ce genre, pour qu'il devint impossible d'y suppléer par un discours ou par un dessin; & je ferai voir ci-dessous, comment, par un procédé mécanique, on pourroit toujours reproduire & se représenter l'espèce de tissu qu'elles indiqueroient.

Voici maintenant un essai de l'usage de cette façon de noter dans les questions auxquelles les circonvolutions de fils peuvent donner lieu.

(3.) Faire parcourir au *cavalier* toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois sur la même, se réduit à déterminer une certaine trace du *cavalier* sur l'échiquier, ou bien, en supposant une épingle fixée au centre de chaque case, à déterminer le cours d'un fil passé une fois autour de chaque épingle, d'après une loi dont nous allons chercher l'expression. Voyez fig. 5.

(4.)^b désignant une case quelconque de l'échiquier, *a* & *b* ne peuvent avoir pour valeur que l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Deux positions immédiatement successives d'une pièce du jeu d'échecs, étant $\frac{b}{a}$. $\frac{b}{a}$, la marche de cette pièce est une condition entre *a* & *a*, *b* & *b*.

La tour, par exemple, posée sur la case $\frac{b}{a}$, peut aller de-là sur toute case $\frac{b}{(a \pm m)}$, ou bien $\frac{(b \pm m)}{a}$, m étant un nombre entier positif ou négatif, tel que $a + m$, ou $b + m$ ne soit ni < 1 , ni > 8 .

Le fou posé aussi sur cette case $\frac{b}{a}$, peut aller sur toute case $\frac{(b \pm m)}{(a \pm m)}$.

Le cavalier peut aller de $\frac{b}{a}$ en $\frac{(b \pm 2)}{(a \pm 1)}$, ou en $\frac{(b \pm 1)}{(a \pm 2)}$: & ainsi des autres pièces.

(5.) Faire parcourir au cavalier toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois sur la même, c'est donc ranger de suite les soixante-quatre termes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ & & & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & & & & & & 8 & 8 \end{array}$$

dans un ordre tel qu'il règne partout cette loi entre deux termes contigus, que la différence entre les nombres supérieurs étant 1, la différence entre les inférieurs soit 2, ou la différence entre les nombres supérieurs étant 2, celle entre les inférieurs soit 1. Voyez l'exemple ci-après, article (11).

(6.) On pourroit prendre une suite de soixante-quatre termes, tous indéterminés, $\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \frac{\beta}{\alpha}, \dots \dots \dots$ & en imposant un certain nombre de nouvelles conditions, pour diminuer le nombre d'alternatives entre les valeurs à donner aux lettres $a, a, \alpha, \dots b, b, \beta, \dots$ on pourroit traiter ce Problème par analyse; je ne m'occuperaï point de cette considération, il suffit qu'on remarque qu'en effet ceci ramène la question à l'analyse ordinaire.

(7.) En cherchant à rapprocher de la forme symétrique, la trace cherchée du cavalier, on facilite la solution: c'est sous ce point de vue que je vais la présenter.

La trace du cavalier seroit une figure symétrique, si, changeant ici dans l'expression de la marche 8 en 1, 7 en 2, 6 en 3,

$\frac{5}{5}$ en $\frac{4}{4}$ & vice versa, soit dans les nombres supérieurs seulement, soit dans les inférieurs, ou à la fois dans les deux, il n'en résultoit aucun changement dans l'expression totale.

(8.) Il s'agiroit donc de trouver seize pas consécutifs du cavalier, ou seize termes de la suite cherchée, qui fussent tels (*Voyez l'exemple ci-dessous*, article 9), qu'il ne s'y trouvât aucun terme commun avec les seize qui en proviendroient, en y changeant 8 en 1, 7 en 2, 6 en 3, 5 en 4, & vice versa, dans les nombres inférieurs, ni aucun enfin avec les seize qui en proviendroient en y faisant le même changement dans les nombres supérieurs, ni aucun enfin avec les seize résultans de ce même changement, fait dans les supérieurs & dans les inférieurs à la fois. On auroit, après la transformation, quatre suites de pas du cavalier, qui comprendroient les soixante-quatre cases de l'échiquier sans aucune répétition, & dont la trace seroit une figure symétrique; & pour résoudre le problème proposé, il resteroit à lier les quatre suites en une seule, où la loi régnât d'un bout à l'autre.

(9.) Pour obtenir les seize termes en question, je commence par écrire dans un ordre quelconque, les soixante-quatre termes

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \end{array}$$

J'en prends d'abord un arbitrairement, comme $\frac{5}{5}$, & j'écris au-dessous les trois termes transformés $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$ & $\frac{4}{3}$. Aucun de ces termes ne devant plus me servir, je les efface tous, des soixante-quatre. Entre les soixante restans, j'en prends arbitrairement un autre qui se lie avec $\frac{5}{5}$ selon la marche du cavalier, comme $\frac{4}{3}$; (la différence entre les nombres supérieurs de ces deux termes étant 1, tandis que la différence entre les inférieurs est 2) j'écris au-dessous de $\frac{4}{3}$ les trois transformés correspondans $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$ & $\frac{5}{2}$; & les effaçant des soixante termes, il m'en reste cinquante-six, sur lesquels je continue le même procédé.

Par-là j'obtiens, par exemple, les quatre suites symétriques

$$\begin{matrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5, & 3, & 4, & 2, & 1, & 3, & 1, & 2, & 3, & 1, & 2, & 4, & 5, & 7, & 8, & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 \\ 5, & 3, & 4, & 2, & 1, & 3, & 1, & 2, & 3, & 1, & 2, & 4, & 5, & 7, & 8, & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4, & 6, & 5, & 7, & 8, & 6, & 8, & 7, & 6, & 8, & 7, & 5, & 4, & 2, & 1, & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 \\ 4, & 6, & 5, & 7, & 8, & 6, & 8, & 7, & 6, & 8, & 7, & 5, & 4, & 2, & 1, & 3 \end{matrix}$$

(10.) La facilité de former ces suites, dépend de l'observation suivante: si, par exemple, on eut pris cette route ci

$$\begin{matrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5, & 3, & 4, & 2, & 1, & 3, & 5, & 4, & 2, & 1, & 3, & 2, & 1 \end{matrix}$$

on eut été arrêté, parce que $\frac{1}{1}$ ne se lie qu'avec $\frac{2}{2}$ ou $\frac{3}{3}$ qui sont déjà dans la suite; mais il étoit facile d'apercevoir que $\frac{2}{3}$, l'un des termes moyens, & le terme extrême $\frac{1}{1}$ se liant entre eux, l'ordre de la suite pouvoit être changé, sans que la loi cettâit d'avoir lieu, en écrivant les sept derniers termes dans l'ordre inverse, ce qui amenoit comme ci-dessus

$$\begin{matrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5, & 3, & 4, & 2, & 1, & 3, & 5, & 4, & 2, & 1, & 3, & 2, & 1 \end{matrix}$$

où rien n'arrête plus.

En général, lorsqu'un terme extrême se lie avec un terme moyen, en écrivant dans l'ordre inverse tous les termes depuis celui-ci exclusivement jusqu'à ce terme extrême, on change la suite sans changer la loi.

Au moyen de cela, il est facile d'obtenir des suites où les deux termes extrêmes se lient, ou, ce qui est la même chose, des routes rentrantes sur elles-mêmes; telles sont celles de l'article précédent.

Il est facile aussi de lier deux suites entre elles, puisqu'il ne s'agit que d'amener pour termes extrêmes dans l'une & dans l'autre, des termes qui se lient. Voyez le Mémoire de M. Euler, cité précédemment.

(11.) Des quatre suites de l'article 9, la première se lie

Cccc ij

avec la quatrième , & par conséquent aussi , la seconde avec la troisième . L'union faite , on a les deux suites résultantes ,

$$5\ 4\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 4\ 3\ 1\ 2\ 4\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 6\ 7\ 8\ 6\ 8\ 7\ 5\ 6\\ 5,3,4,2,1,3,1,2,3,1,2,4,5,7,8,6,4,6,5,7,8,6,8,7,6,8,7,5,4,2,1,3,$$

$$4\ 5\ 7\ 8\ 6\ 7\ 8\ 6\ 8\ 7\ 5\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 4\ 3\ 1\ 2\ 4\ 3\\ 5,3,4,2,1,3,1,2,3,1,2,4,5,7,8,6,4,6,5,7,8,6,8,7,6,8,7,5,4,2,1,3,$$

qui sont encore symétriques entr'elles , & rentrantes sur elles-mêmes .

En les réunissant , il faut altérer un peu la symétrie ; mais si , par exemple , on intercale la seconde suite entre les termes $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{2}$ de la première , la suite totale demeure rentrante , & satisfait par conséquent , à partir de telle case qu'on voudra . *Voyez figure 5 , la forme de la trace du cavalier sur l'échiquier , déterminée par cette suite .*

(12 .) Si l'on proposoit de disposer un fil dans l'espace , suivant une loi analogue à celle qui a lieu ici sur le plan , le procédé seroit de la même facilité .

Je suppose , par exemple , que la question se réduise à ranger de suite les soixante-quatre termes

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \dots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{1} & \dots & & \frac{2}{1} & \dots & \\ \frac{3}{1} & \dots & & & \dots & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \end{array} \quad \frac{4}{2}$$

&c.

dans un ordre tel , qu'il règne par - tout cette loi entre les nombres homologues de deux termes contigus , que les uns (les supérieurs , par exemple) diffèrent de deux unités ; les autres , (par exemple , les nombres latéraux) diffèrent d'une unité , & que les troisièmes ne diffèrent point . J'emploie la symétrie , de même que ci-dessus .

Son symptôme est ici , qu'en changeant 1 en 4 , 2 en 3 , & vice versa , soit dans les nombres inférieurs , soit dans les supérieurs ; soit dans les latéraux , ou bien dans deux quelconques à la fois ; ou dans tous , l'expression totale reste la même .

(13.) Je cherche donc huit termes, entre lesquels règne la loi prescrite, & qui soient tels, qu'en y faisant les différentes transformations de l'article précédent, il n'en résulte que des termes nouveaux. Comme la manière de procéder est parfaitement analogue à celle du Problème ci-dessus, je ne ferai qu'exposer mon résultat.

Je trouve les huit suites

$$\begin{smallmatrix} 4^3, & 3^3, & 3^1, & 1^1, & 1^2, & 1^4, & 2^4, & 3^2 \\ 1_1, & 3_3, & 3_2, & 1_1, & 1_3, & 1_2, & 2_4, & 3_4 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 4^3, & 3^3, & 3^1, & 1^1, & 1^2, & 1^4, & 2^4, & 3^2 \\ 4_4, & 3_2, & 3_3, & 1_4, & 1_2, & 1_3, & 2_1, & 3_1 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 4^3, & 3^3, & 3^4, & 1^4, & 1^3, & 1^1, & 2^1, & 3^3 \\ 4_1, & 3_3, & 3_2, & 1_1, & 1_3, & 1_2, & 2_4, & 3_4 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 1^3, & 2^3, & 2^1, & 4^1, & 4^2, & 4^4, & 3^4, & 2^2 \\ 1_1, & 2_3, & 2_2, & 4_1, & 4_3, & 4_2, & 3_4, & 2_4 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 4^2, & 3^2, & 3^4, & 1^4, & 1^3, & 1^1, & 2^1, & 3^3 \\ 4_4, & 3_2, & 3_3, & 1_4, & 1_2, & 1_3, & 2_1, & 3_4 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 1^3, & 2^3, & 2^1, & 4^1, & 2^2, & 4^4, & 3^4, & 2^2 \\ 1_2, & 2_2, & 2_3, & 4_4, & 4_2, & 4_3, & 3_1, & 2_1 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 1^2, & 2^2, & 2^4, & 4^4, & 4^3, & 4^1, & 3^1, & 2^3 \\ 1_1, & 2_3, & 2_2, & 4_1, & 4_3, & 4_2, & 3_4, & 2_4 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 1^2, & 2^2, & 2^4, & 4^4, & 4^3, & 4^1, & 3^1, & 2^3 \\ 1_4, & 2_2, & 2_3, & 4_4, & 4_2, & 4_3, & 3_1, & 2_1 \end{smallmatrix}$$

Je vois qu'elles se lient deux à deux, la première avec la sixième, la seconde avec la quatrième, la septième avec la cinquième, & la huitième avec la troisième.

J'écris les quatre nouvelles suites résultantes de cette liaison,

$$\begin{smallmatrix} 1^3, & 2^3, & 2^1, & 4^1, & 4^2, & 4^4, & 3^4, & 2^2, & 4^3, & 3^3, & 3^1, & 1^1, & 1^2, & 1^4, & 2^4, & 3^2 \\ 1_4, & 2_2, & 2_3, & 4_1, & 4_3, & 4_2, & 3_4, & 2_4, & 4_3, & 4_2, & 3_2, & 3_3, & 1^1, & 1_4, & 1_2, & 2_1, & 3_4 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 1^3, & 2^3, & 2^1, & 4^1, & 4^2, & 4^4, & 3^4, & 2^2, & 4^3, & 3^3, & 3^1, & 1^1, & 1^2, & 1^4, & 2^4, & 3^2 \\ 1_1, & 2_3, & 2_2, & 4_1, & 4_3, & 4_2, & 3_4, & 2_4, & 4_3, & 4_2, & 3_2, & 3_3, & 1_4, & 1_2, & 2_1, & 3_4 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 4^2, & 3^2, & 3^4, & 1^4, & 1^3, & 1^1, & 2^1, & 3^3, & 1^1, & 2^2, & 2^4, & 4^4, & 4^3, & 4^1, & 3^1, & 2^3 \\ 4_4, & 3_2, & 3_3, & 1_4, & 1_2, & 1_3, & 2_1, & 3_1, & 1_1, & 2_3, & 2_2, & 4_1, & 4_3, & 4_2, & 3_4, & 2_4 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix} 4^2, & 3^2, & 3^4, & 1^4, & 1^3, & 1^1, & 2^1, & 3^3, & 1^1, & 2^2, & 2^4, & 4^4, & 4^3, & 4^1, & 3^1, & 2^3 \\ 4_1, & 3_3, & 3_2, & 1_1, & 1_3, & 1_2, & 2_4, & 3_4, & 1_4, & 2_2, & 2_3, & 4_3, & 4_2, & 4_1, & 3_1, & 2_1 \end{smallmatrix}$$

qui sont symétriques & rentrantes sur elles-mêmes. J'observe que le second terme 2^3 de la première se lie avec le sixième 4^4 de la seconde, & par conséquent aussi, le second de la troisième,

Ces deux suites sont encore rentrantes sur elles-mêmes, & métriques entre elles : & comme le dernier terme $\frac{4}{3}$ de la première se lie avec le premier $\frac{3}{4}$ de la seconde, & le dernier $\frac{3}{4}$ de celle-ci, avec le premier $\frac{2}{3}$ de la première ; en les unissant, j'ai une suite totale, symétrique & rentrante, qui répond à la question proposée.

(14.) Pour se représenter la forme décrite par cette suite, on pourroit disposer quatre rangées de chacune quatre tiges verticales, percées de quatre trous sur leur longueur, & il faudroit passer le fil dans ces trous: espèce de construction qui peut convenir à toutes sortes de cas.

(15.) Après avoir supposé un fil plus ou moins tendu entre deux points désignés, on peut supposer une toile plus ou moins tendue entre trois ou plusieurs fils désignés; on peut considérer les fils comme les arêtes d'une surface, & les toiles comme ses différens hédres, & définir par-là la forme d'un corps. Je n'ajoute ceci que pour mieux faire sentir l'utilité & l'étendue du travail à faire en cette partie. Je me suis livré à ce travail à différentes reprises; mais avant de communiquer ces recherches à l'Académie, je leur voudrois un ensemble qu'elles n'ont point encore.

