# *REMARQUES*
## *SUR LES*
# *PROBLÈMES DE SITUATION.*

Par M. VANDERMONDE.

4 Mai 1771.

QUELLES que ſoient les circonvolutions d'un ou de pluſieurs fils dans l'eſpace, on peut toujours en avoir une expreſſion par le calcul des grandeurs; mais cette expreſſion ne ſeroit d'aucun uſage dans les Arts. L'ouvrier qui fait une *treſſe*, un *réſeau*, des *nœuds*, ne les conçoit pas par les rapports de grandeur, mais par ceux de ſituation: ce qu'il y voit, c'eſt l'ordre dans lequel ſont entrelacés les fils. Il ſeroit donc utile d'avoir un ſyſtème de calcul plus conforme à la marche de l'eſprit de l'ouvrier, une notation qui ne repréſentât que l'idée qu'il ſe forme de ſon ouvrage, & qui pût ſuffire pour en refaire un ſemblable dans tous les temps.

Mon objet ici n'eſt que de faire entrevoir la poſſibilité d'une pareille notation, & ſon uſage dans les queſtions ſur des tiſſus de fils. Je me ſervirai, pour expoſer mon idée, d'un Problème qui ſe rapporte à ce genre, & qui eſt très-connu, celui de la *marche du cavalier des échecs*, qui a été réſolu par M. Euler, *Mémoires de Berlin, 1759*. Le procédé de ce grand Géomètre ſuppoſe qu'on a *l'échiquier* ſous les yeux; je le réduis à une ſimple opération d'Arithmétique, faite ſur des nombres qui ne repréſentent point des quantités, mais des rangs dans l'eſpace.

Les nombres nombrans, *un, deux, trois*, &c. ont été les ſeuls ſoumis au calcul, juſqu'au moment où Viète parut: il y ſoumit les nombres généraux, *l'un, un autre, un troiſième*, &c. qu'il déſigna par les lettres de l'alphabet; & ce fut l'époque d'une révolution dans les Mathématiques. Quant aux nombres ordinaux, *le premier, le ſecond, le troiſième*, &c. que Léibnitz introduiſit dans les calculs ordinaires, & que je propoſe ici d'appliquer aux recherches ſur les Situations, ils ne paroiſſent pas avoir encore fixé ſuffiſamment l'attention des Géomètres.

Léibnitz promit un *calcul des Situations*, & mourut sans rien publier. C'est un sujet où tout reste à faire, & qui mériteroit bien qu'on s'en occupât.

(1.) Je conçois l'espace partagé en élémens finis & arbitraires, distingués par leur quantième; c'est-à-dire, 1.° que je conçois un espace plan, partagé par des parallèles en une suite de bandes, puis partagé de nouveau par une autre suite de parallèles qui coupent les premières; & que je distingue les différentes bandes par la dénomination de première, deuxième, troisième, quatrième, &c. dans l'une & dans l'autre division. Je puis désigner alors un point déterminé, comme appartenant à l'un quelconque des parallélogrammes nés de cette double division, en posant simplement l'un au-dessus de l'autre, deux nombres, dont l'un soit le quantième de la première division, & l'autre, celui de la seconde. Ainsi $\overset{3}{4}$, par exemple, appartient au parallélogramme qui est commun à la quatrième bande dans la première division, & à la troisième dans la seconde. *Voyez figure 1.* Je conçois 2.° un espace solide partagé d'abord par des plans parallèles en une suite de tranches, puis partagé de nouveau par une autre suite de plans parallèles qui coupent les premiers, & enfin partagé une troisième fois par une nouvelle suite de plans parallèles qui coupent les uns & les autres; & je puis désigner par ${}^{1}{}^{2}_{3}$, par exemple, un point déterminé, comme appartenant au parallélipipède commun à la troisième tranche dans la première division, à la deuxième tranche dans la seconde, & à la première dans la troisième. *Voyez figure 2.*

(2.) En général, trois nombres assemblés ainsi, ${}^{c}{}^{b}_{a}$, désignant un certain lieu dans l'espace, comme compris entre des limites données, une suite de pareilles expressions ${}^{c}{}^{b}_{a}$, ${}^{c}{}^{b}_{a}$, ${}^{\gamma}{}^{\beta}_{\alpha}$ . . . . . peut servir à assigner une route dans l'espace, ou bien le cours d'un fil; & suivant qu'on aura besoin de plus ou moins de précision, on resserrera plus ou moins les limites, & l'on sous-entendra plus ou moins de passages à travers les parallélipipèdes contigus.

C'est ainsi, par exemple, qu'en supposant le fil médiocrement flexible & abandonné en liberté, excepté dans les points désignés ci-après, on aura, ce me semble, une expression suffisante de la *tresse*, *fig. 3*, au moyen de la suite

$${}_{2}{}^{3}_{2},\ {}_{1}{}^{2}_{3},\ {}_{2}{}^{1}_{3},\ {}_{1}{}^{1}_{1},\ {}_{2}{}^{2}_{1},\ {}_{1}{}^{3}_{2},\quad {}_{2}{}^{3}_{4},\ {}_{1}{}^{2}_{5},\ {}_{2}{}^{1}_{5},\ {}_{1}{}^{1}_{3},\ {}_{2}{}^{2}_{3},\ {}_{1}{}^{3}_{4}\ldots\ldots$$

On aura de même l'expression d'un système de *mailles de bas*, *fig. 4*, au moyen des suites

$${}_{2}{}^{4}_{1},\ {}_{1}{}^{3}_{1},\ {}_{1}{}^{2}_{1},\ {}_{2}{}^{1}_{1},\ {}_{2}{}^{1}_{2},\ {}_{1}{}^{2}_{2},\ {}_{1}{}^{3}_{2},\ {}_{2}{}^{4}_{2},\quad {}_{2}{}^{4}_{3},\ {}_{1}{}^{3}_{3},\ {}_{1}{}^{2}_{3},\ {}_{2}{}^{1}_{3}\ldots\ldots$$

$${}_{2}{}^{6}_{1},\ {}_{1}{}^{5}_{1},\ {}_{1}{}^{4}_{1},\ {}_{2}{}^{3}_{1},\ {}_{2}{}^{3}_{2},\ {}_{1}{}^{4}_{2}\ldots\ldots$$

$${}_{2}{}^{8}_{1},\ldots\ldots$$

&c.

On doit sentir qu'il ne faudroit pas beaucoup de complication dans des expressions de ce genre, pour qu'il devînt impossible d'y suppléer par un discours ou par un dessin; & je ferai voir ci-dessous, comment, par un procédé mécanique, on pourroit toujours reproduire & se représenter l'espèce de tissu qu'elles indiqueroient.

Voici maintenant un essai de l'usage de cette façon de noter dans les questions auxquelles les circonvolutions de fils peuvent donner lieu.

(3.) Faire parcourir au *cavalier* toutes les cases de l'*échiquier* sans passer deux fois sur la même, se réduit à déterminer une certaine trace du *cavalier* sur l'*échiquier*, ou bien, en supposant une épingle fixée au centre de chaque case, à déterminer le cours d'un fil passé une fois autour de chaque épingle, d'après une loi dont nous allons chercher l'expression. *Voyez fig. 5.*

(4.) $^{b}$ désignant une case quelconque de l'*échiquier*, $a$ & $b$ ne peuvent avoir pour valeur que l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Deux positions immédiatement successives d'une *pièce* du jeu d'*échecs*, étant ${}^{b}_{a} \cdot {}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{a}}$, la *marche* de cette *pièce* est une condition entre $a$ & $\mathrm{a}$, $b$ & $\mathrm{b}$.

La *tour*, par exemple, posée sur la case $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}$, peut aller de-là sur toute case $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{(a + m)}$, ou bien $\genfrac{}{}{0pt}{}{(b + m)}{a}$, $m$ étant un nombre entier positif ou négatif, tel que $a + m$, ou $b + m$ ne soit ni $< 1$, ni $> 8$.

Le *fou* posé aussi sur cette case $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}$, peut aller sur toute case $\genfrac{}{}{0pt}{}{(b + m)}{(a \pm m)}$.

Le *cavalier* peut aller de $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}$ en $\genfrac{}{}{0pt}{}{(b \pm 1)}{(a \pm 2)}$, ou en $\genfrac{}{}{0pt}{}{(b \pm 2)}{(a \pm 1)}$: & ainsi des autres *pièces*.

(5.) Faire parcourir au *cavalier* toutes les cases de l'*échiquier* sans passer deux fois sur la même, c'est donc ranger de suite les soixante-quatre termes

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{4} \ldots\ \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{2}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3} \ldots\ \genfrac{}{}{0pt}{}{3}{1}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{3}{2} \ldots\ \genfrac{}{}{0pt}{}{8}{8}\ldots$$

dans un ordre tel qu'il règne par-tout cette loi entre deux termes contigus, que la différence entre les nombres supérieurs étant 1, la différence entre les inférieurs soit 2, ou la différence entre les nombres supérieurs étant 2, celle entre les inférieurs soit 1. *Voyez l'exemple ci-après, article (11).*

(6.) On pourroit prendre une suite de soixante-quatre termes, tous indéterminés, $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\beta}{\alpha}$, ........... & en imposant un certain nombre de nouvelles conditions, pour diminuer le nombre d'alternatives entre les valeurs à donner aux lettres $a$, $\mathrm{a}$, $\alpha$, ... $b$, $\mathrm{b}$, $\beta$, ... on pourroit traiter ce Problème par analyse; je ne m'occuperai point de cette considération, il suffit qu'on remarque qu'en effet ceci ramène la question à l'analyse ordinaire.

(7.) En cherchant à rapprocher de la forme symétrique, la trace cherchée du *cavalier*, on facilite la solution: c'est sous ce point de vue que je vais la présenter.

La trace du *cavalier* seroit une figure symétrique, si, changeant ici dans l'expression de sa *marche* 8 en 1, 7 en 2, 6 en 3, 5 en 4 *& vice verſâ,* ſoit dans les nombres ſupérieurs ſeulement, ſoit dans les inférieurs, ou à la fois dans les deux, il n'en réſultoit aucun changement dans l'expreſſion totale.

(8.) Il s'agiroit donc de trouver ſeize pas conſécutifs du *cavalier*, ou ſeize termes de la ſuite cherchée, qui fuſſent tels *(Voyez l'exemple ci-deſſous,* article *9),* qu'il ne s'y trouvât aucun terme commun avec les ſeize qui en proviendroient, en y changeant 8 en 1, 7 en 2, 6 en 3, 5 en 4, *& vice verſâ,* dans les nombres inférieurs, ni aucun enfin avec les ſeize qui en proviendroient en y faiſant le même changement dans les nombres ſupérieurs, ni aucun enfin avec les ſeize réſultans de ce même changement, fait dans les ſupérieurs & dans les inférieurs à la fois. On auroit, après la transformation, quatre ſuites de pas du *cavalier,* qui comprendroient les ſoixante-quatre caſes de l'*échiquier* ſans aucune répétition, & dont la trace ſeroit une figure ſymétrique; & pour réſoudre le problème propoſé, il reſteroit à lier les quatre ſuites en une ſeule, où la loi régnât d'un bout à l'autre.

(9.) Pour obtenir les ſeize termes en queſtion, je commence par écrire dans un ordre quelconque, les ſoixante-quatre termes

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 & 3 & \ldots & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 & 2 & 3 & \ldots & 1 & 2 & \ldots & 8. \end{array}$$

J'en prends d'abord un arbitrairement, comme ${}^{5}_{5}$, & j'écris au-deſſous les trois termes transformés ${}^{4}_{5}$, ${}^{5}_{4}$ & ${}^{4}_{4}$. Aucun de ces termes ne devant plus me ſervir, je les efface tous, des ſoixante-quatre. Entre les ſoixante reſtans, j'en prends arbitrairement un autre qui ſe lie avec ${}^{5}_{5}$ ſelon la *marche* du *cavalier,* comme ${}^{4}_{3}$; (la différence entre les nombres ſupérieurs de ces deux termes étant 1, tandis que la différence entre les inférieurs eſt 2) j'écris au-deſſous de ${}^{4}_{3}$ ſes trois transformés correſpondans ${}^{5}_{3}$, ${}^{4}_{6}$ & ${}^{5}_{6}$; & les effaçant des ſoixante termes, il m'en reſte cinquante-ſix, ſur leſquels je continue le même procédé.

Par-là j'obtiens, par exemple, les quatre ſuites ſymétriques

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\
5, & 3, & 4, & 2, & 1, & 3, & 1, & 2, & 3, & 1, & 2, & 4, & 5, & 7, & 8, & 6.
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
4 & 5 & 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 \\
5, & 3, & 4, & 2, & 1, & 3, & 1, & 2, & 3, & 1, & 2, & 4, & 5, & 7, & 8, & 6.
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\
4, & 6, & 5, & 7, & 8, & 6, & 8, & 7, & 6, & 8, & 7, & 5, & 4, & 2, & 1, & 3.
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
4 & 5 & 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 \\
4, & 6, & 5, & 7, & 8, & 6, & 8, & 7, & 6, & 8, & 7, & 5, & 4, & 2, & 1, & 3.
\end{array}$$

(10.) La facilité de former ces ſuites, dépend de l'obſervation ſuivante: ſi, par exemple, on eut pris cette route-ci

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\
5, & 3, & 4, & 2, & 1, & 3, & 5, & 4, & 2, & 1, & 3, & 2, & 1
\end{array}$$

on eut été arrêté, parce que $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}$ ne ſe lie qu'avec $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{2}$ ou $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}$ qui ſont déjà dans la ſuite; mais il étoit facile d'apercevoir que $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}$, l'un des termes moyens, & le terme extrême $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}$ ſe liant entre eux, l'ordre de la ſuite pouvoit être changé, ſans que la loi ceſſât d'avoir lieu, en écrivant les ſept derniers termes dans l'ordre inverſe, ce qui amenoit comme ci-deſſus

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\
5, & 3, & 4, & 2, & 1, & 3, & 1, & 2, & 3, & 1, & 2, & 4, & 5
\end{array}$$

où rien n'arrête plus.

En général, lorſqu'un terme extrême ſe lie avec un terme moyen, en écrivant dans l'ordre inverſe tous les termes depuis celui-ci excluſivement juſqu'à ce terme extrême, on change la ſuite ſans changer la loi.

Au moyen de cela, il eſt facile d'obtenir des ſuites où les deux termes extrêmes ſe lient, ou, ce qui eſt la même choſe, des routes rentrantes ſur elles-mêmes; telles ſont celles de l'article précédent.

Il eſt facile auſſi de lier deux ſuites entre elles, puiſqu'il ne s'agit que d'amener pour termes extrêmes dans l'une & dans l'autre, des termes qui ſe lient. *Voyez le Mémoire de* M. Euler, *cité précédemment.*

(11.) Des quatre ſuites de l'*article 9*, la première ſe lie avec la quatrième, & par conſéquent auſſi, la ſeconde avec la troiſième. L'union faite, on a les deux ſuites réſultantes,

5 4 2 1 3 2 1 3 1 2 4 3 1 2 4 3 4 5 7 8 6 7 8 6 8 7 5 6 8 7 5 6
5, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 6, 4, 6, 5, 7, 8, 6, 8, 7, 6, 8, 7, 5, 4, 2, 1, 3.

4 5 7 8 6 7 8 6 8 7 5 6 8 7 5 6 5 4 2 1 3 2 1 3 1 2 4 3 1 2 4 3
5, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 6, 4, 6, 5, 7, 8, 6, 8, 7, 6, 8, 7, 5, 4, 2, 1, 3.

qui ſont encore ſymétriques entr'elles, & rentrantes ſur elles-mêmes.

En les réuniſſant, il faut altérer un peu la ſymétrie; mais ſi, par exemple, on intercale la ſeconde ſuite entre les termes $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{4}$ & $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}$ de la première, la ſuite totale demeure rentrante, & ſatisfait par conſéquent, à partir de telle caſe qu'on voudra. *Voyez* figure 5, *la forme de la trace du* cavalier *ſur l'échiquier, déterminée par cette ſuite.*

(12.) Si l'on propoſoit de diſpoſer un fil dans l'eſpace, ſuivant une loi analogue à celle qui a lieu ici ſur le plan, le procédé ſeroit de la même facilité.

Je ſuppoſe, par exemple, que la queſtion ſe réduiſe à ranger de ſuite les ſoixante-quatre termes

$1^{1}_{1}$ $2^{1}_{1}$ $3^{1}_{1}$...... $1^{1}_{2}$ $2^{1}_{2}$...... $1^{1}_{3}$.......... $4^{4}_{4}$

$1^{2}_{1}$ $2^{2}_{1}$...... $1^{2}_{2}$......

$1^{3}_{1}$......

&c.

dans un ordre tel, qu'il règne par-tout cette loi entre les nombres homologues de deux termes contigus, que les uns (les ſupérieurs, par exemple) diffèrent de deux unités; les autres, (par exemple, les nombres latéraux) diffèrent d'une unité, & que les troiſièmes ne diffèrent point. J'emploie la ſymétrie, de même que ci-deſſus.

Son ſymptôme eſt ici, qu'en changeant 1 en 4, 2 en 3, *&* *vice verſâ*, ſoit dans les nombres inférieurs, ſoit dans les ſupérieurs, ſoit dans les latéraux, ou bien dans deux quelconques à la fois, ou dans tous, l'expreſſion totale reſte la même.

(13.) Je cherche donc huit termes, entre leſquels règne la loi preſcrite, & qui ſoient tels, qu'en y faiſant les différentes transformations de l'article précédent, il n'en réſulte que des termes nouveaux. Comme la manière de procéder eſt parfaitement analogue à celle du Problème ci-deſſus, je ne ferai qu'expoſer mon réſultat.

Je trouve les huit ſuites

$$4^3_1,\ 3^3_3,\ 3^1_2,\ 1^1_1,\ 1^2_3,\ 1^4_2,\ 2^4_4,\ 3^2_4.$$

$$4^3_4,\ 3^3_2,\ 3^1_3,\ 1^1_4,\ 1^2_2,\ 1^4_3,\ 2^4_1,\ 3^2_1.$$

$$4^2_1,\ 3^2_3,\ 3^4_2,\ 1^4_1,\ 1^3_3,\ 1^1_2,\ 2^1_4,\ 3^3_4.$$

$$1^3_1,\ 2^3_3,\ 2^1_2,\ 4^1_1,\ 4^2_3,\ 4^4_2,\ 3^4_4,\ 2^2_4.$$

$$4^2_4,\ 3^2_2,\ 3^4_3,\ 1^4_4,\ 1^3_2,\ 1^1_3,\ 2^1_1,\ 3^3_1.$$

$$1^3_4,\ 2^3_2,\ 2^1_3,\ 4^1_4,\ 4^2_2,\ 4^4_3,\ 3^4_1,\ 2^2_1.$$

$$1^2_1,\ 2^2_3,\ 2^4_2,\ 4^4_1,\ 4^3_3,\ 4^1_2,\ 3^1_4,\ 2^3_4.$$

$$1^2_4,\ 2^2_2,\ 2^4_3,\ 4^4_4,\ 4^3_2,\ 4^1_3,\ 3^1_1,\ 2^3_1.$$

Je vois qu'elles ſe lient deux à deux, la première avec la ſixième, la ſeconde avec la quatrième, la ſeptième avec la cinquième, & la huitième avec la troiſième.

J'écris les quatre nouvelles ſuites réſultantes de cette liaiſon,

$$1^3_4,\ 2^3_2,\ 2^1_3,\ 4^1_4,\ 4^2_2,\ 4^4_3,\ 3^4_1,\ 2^2_1,\ 4^3_1,\ 3^3_3,\ 3^1_2,\ 1^1_1,\ 1^2_3,\ 1^4_2,\ 2^4_4,\ 3^2_4.$$

$$1^3_1,\ 2^3_3,\ 2^1_2,\ 4^1_1,\ 4^2_3,\ 4^4_2,\ 3^4_4,\ 2^2_4,\ 4^3_4,\ 3^3_2,\ 3^1_3,\ 1^1_4,\ 1^2_2,\ 1^4_3,\ 2^4_1,\ 3^2_1.$$

$$4^2_4,\ 3^2_2,\ 3^4_3,\ 1^4_4,\ 1^3_2,\ 1^1_3,\ 2^1_1,\ 3^3_1,\ 1^2_1,\ 2^2_3,\ 2^4_2,\ 4^4_1,\ 4^3_3,\ 4^1_2,\ 3^1_4,\ 2^3_4.$$

$$4^2_1,\ 3^2_3,\ 3^4_2,\ 1^4_1,\ 1^3_3,\ 1^1_2,\ 2^1_4,\ 3^3_4,\ 1^2_4,\ 2^2_2,\ 2^4_3,\ 4^4_4,\ 4^3_2,\ 4^1_3,\ 3^1_1,\ 2^3_1.$$

qui ſont ſymétriques & rentrantes ſur elles-mêmes. J'obſerve que le ſecond terme $2^3_2$ de la première ſe lie avec le ſixième $4^4_2$ de la ſeconde, & par conſéquent auſſi, le ſecond de la troiſième, avec le ſixième de la quatrième. Je réunis ces ſuites deux à deux, ce qui me donne

$2_3^1, 4_4^1, 4_2^2, 4_3^4, 3_1^4, 2_1^2, 4_1^3, 3_3^3, 3_2^1, 1_1^1, 1_3^2, 1_2^4, 2_4^4, 3_4^2, 1_4^3, 2_2^3, 4_2^4, 3_4^4, 2_4^2, 4_4^3, 3_2^3, 3_3^1, 1_4^1, 1_2^2, 1_3^4, 2_1^4, 3_1^2, 1_1^3, 2_3^3,$

$3_3^4, 1_4^4, 1_2^3, 1_3^1, 2_1^1, 3_1^3, 1_1^2, 2_3^2, 2_2^4, 4_1^4, 4_3^3, 4_2^1, 3_4^1, 2_4^3, 4_4^2, 3_2^2, 1_2^1, 2_4^1, 3_4^3, 1_4^2, 2_2^2, 2_3^4, 4_4^4, 4_2^3, 4_3^1, 3_1^1, 2_1^3, 4_1^2, 3_3^2,$

Ces deux ſuites ſont encore rentrantes ſur elles-mêmes, & ſymétriques entre elles: & comme le dernier terme $4_3^2$ de la première ſe lie avec le premier $3_3^4$ de la ſeconde, & le dernier $1_3^3$ de celle-ci, avec le premier $2_3^1$ de la première; en les réuniſſant, j'ai une ſuite totale, ſymétrique & rentrante, qui ſatisfait à la queſtion propoſée.

(14.) Pour ſe repréſenter la forme décrite par cette ſuite, on pourroit diſpoſer quatre rangées de chacune quatre tiges verticales, percées de quatre trous ſur leur longueur, & il faudroit paſſer le fil dans ces trous: eſpèce de conſtruction qui peut convenir à toutes ſortes de cas.

(15.) Après avoir ſuppoſé un fil plus ou moins tendu entre deux points déſignés, on peut ſuppoſer une toile plus ou moins tendue entre trois ou pluſieurs fils déſignés; on peut conſidérer les fils comme les arêtes d'une ſurface, & les toiles comme ſes différens hèdres, & définir par-là la forme d'un corps. Je n'ajoute ceci que pour mieux faire ſentir l'utilité & l'étendue du travail à faire en cette partie. Je me ſuis livré à ce travail à différentes repriſes; mais avant de communiquer ces recherches à l'Académie, je leur voudrois un enſemble qu'elles n'ont point encore.

Pl. I

Fig. 1.

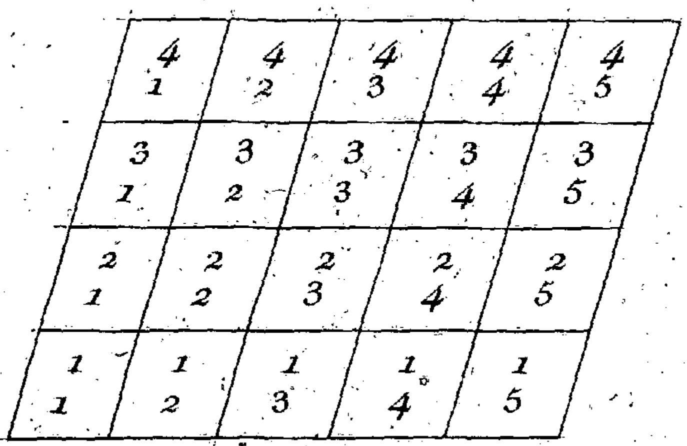



Fig. 5.

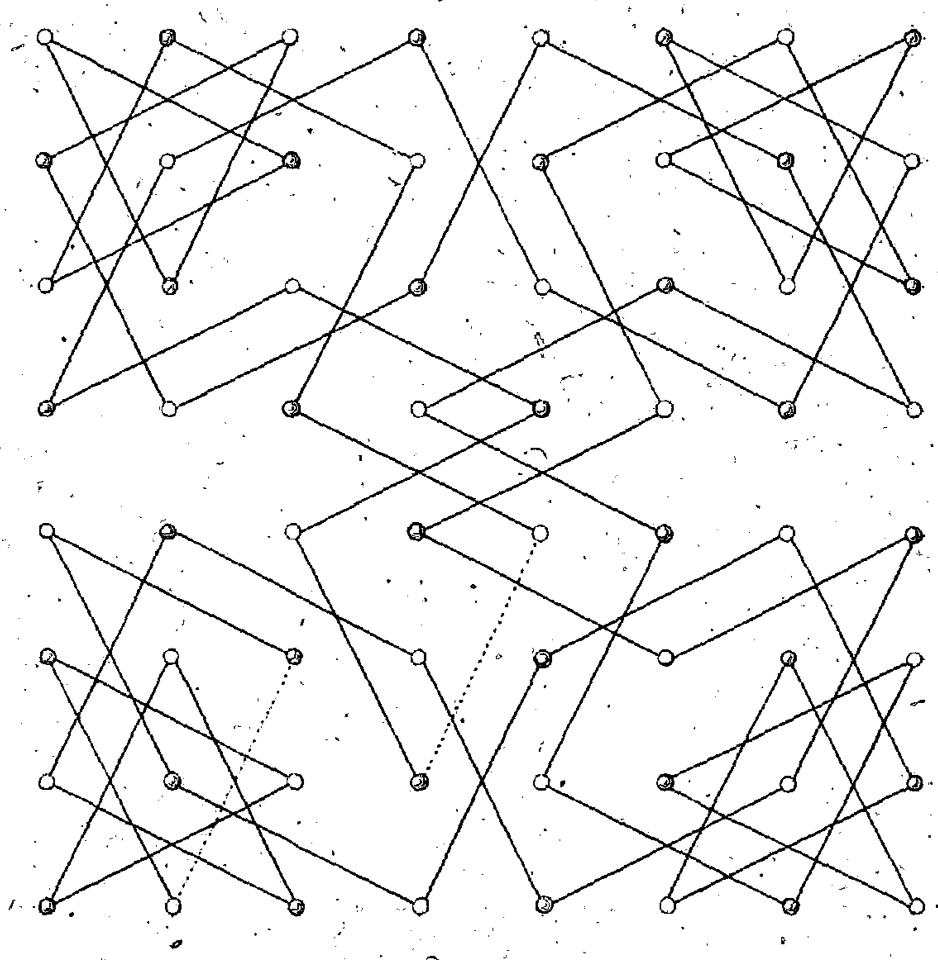
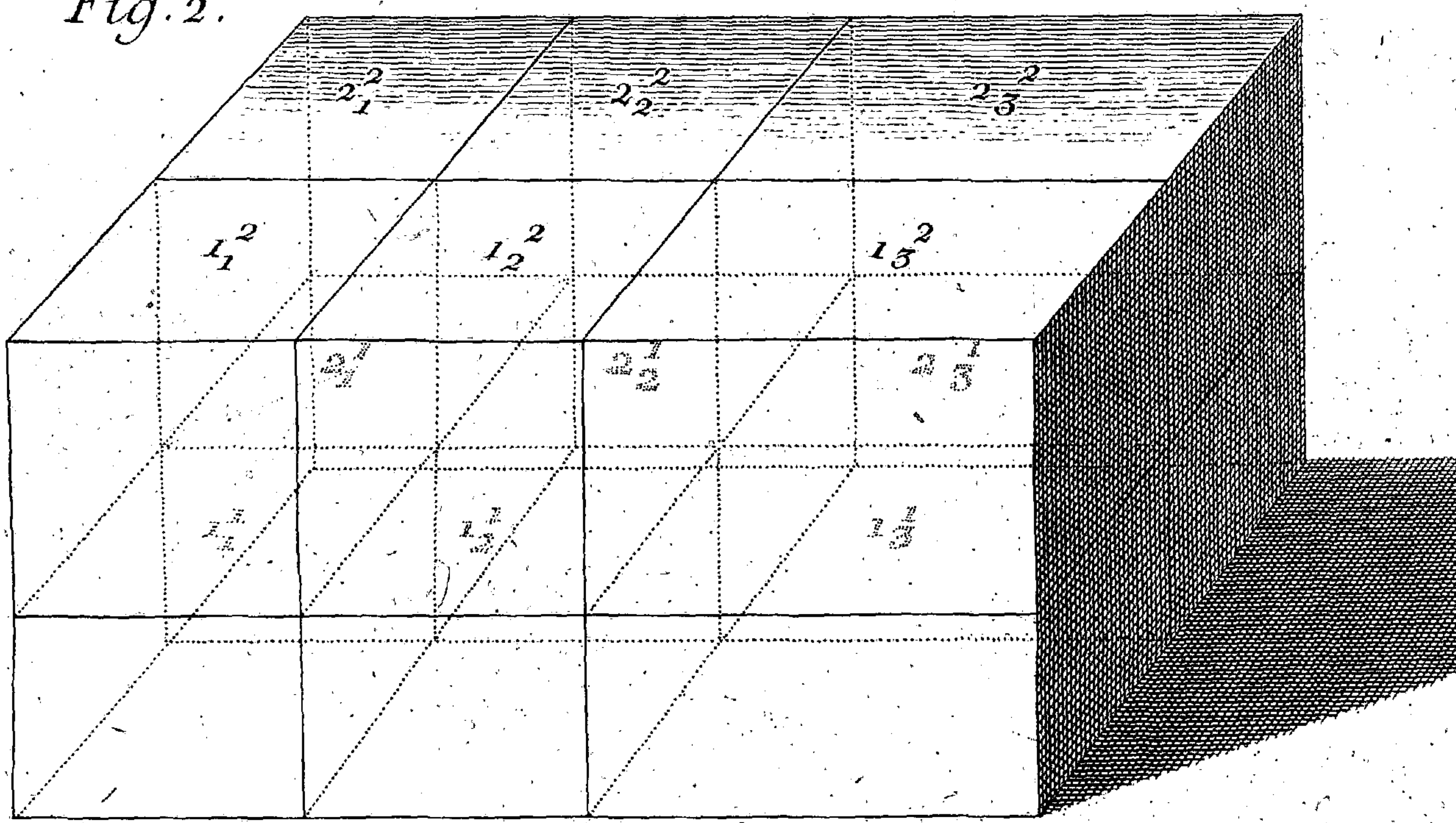


Fig. 2.



Pl. II.

Fig. 3.

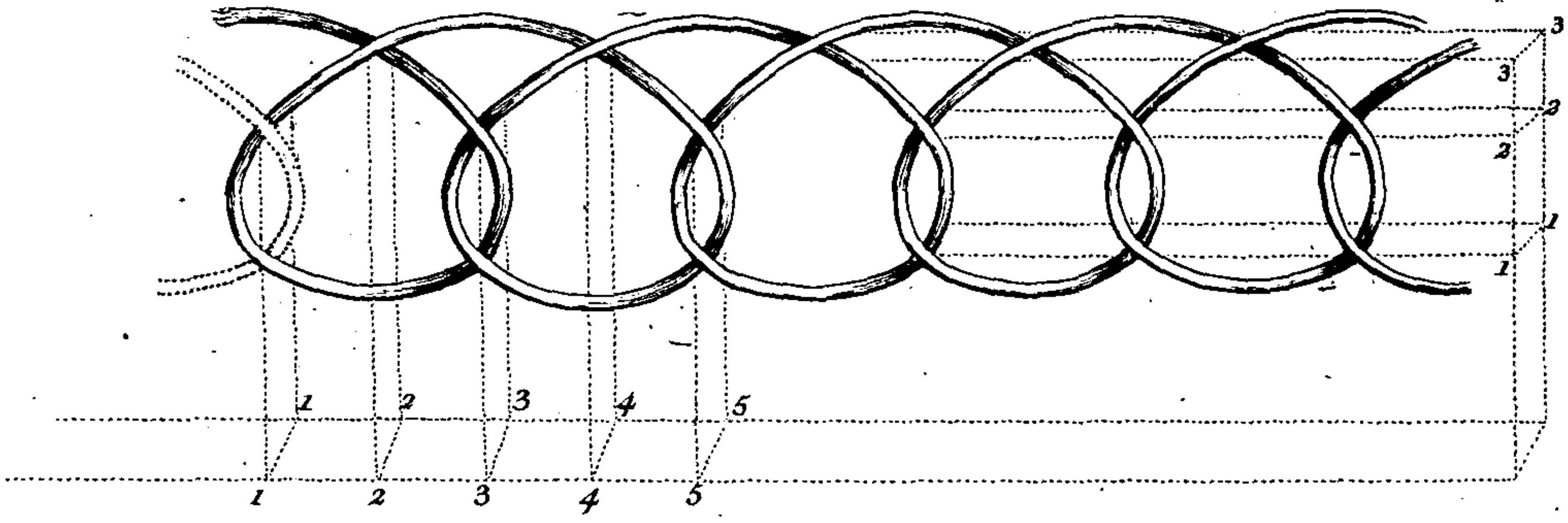
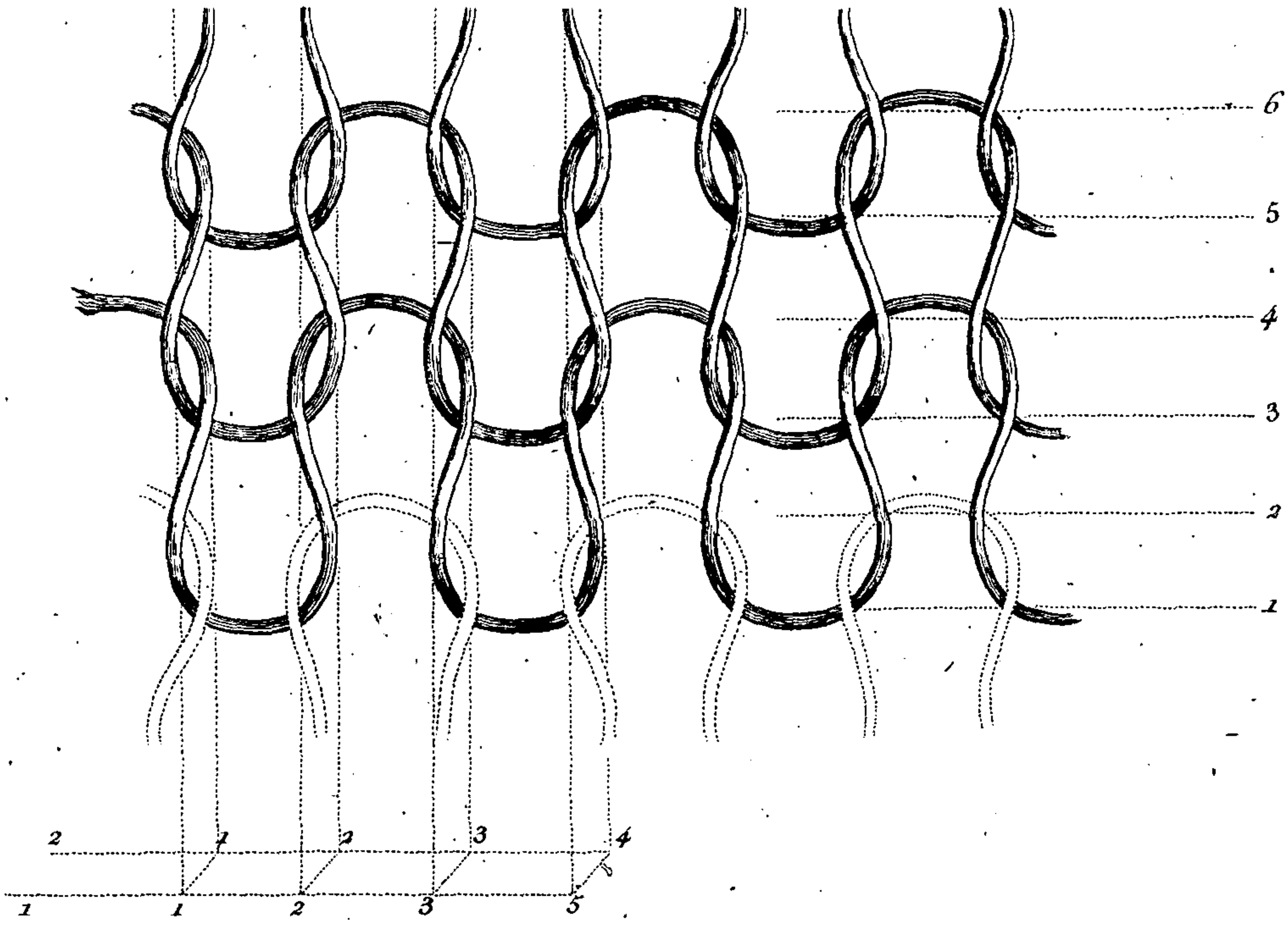



Fig. 4.




Fossier del.

Y. le G.