*MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.**

Par M. VANDERMONDE.

ENTRE les Ouvrages faits depuis quelques années ſur la réſolution générale des Équations, les plus remarquables ſont le Mémoire de M. Euler dans le *Tome IX des nouveaux Commentaires* de Péterſbourg, & celui de M. Bézout, dans le volume de cette Académie pour l'année 1765. Il ſuffit de conſulter ces deux excellens Mémoires pour prendre une idée des progrès des analyſtes en cette matière, & des difficultés de tout genre qui reſtent à ſurmonter. Il m'a paru qu'une partie des difficultés pouvoit être imputée à la nature même des méthodes analytiques, les ſeules dont on ait fait uſage ; & j'ai pris le parti de tenter une autre voie. La méthode que je vais expoſer, ne ſuppoſe l'introduction d'aucune inconnue, & à quelque inſtant que ce

* Ce Mémoire a été lû dans le courant de Novembre 1770, & paraphé par M. de Fouchy le 28 du même mois; mais il m'a fallu attendre l'impreſſion des Mémoires de 1771, parce que je n'avois pas, en 1770, l'honneur d'être de l'Académie. Avant cette époque, il avoit paru un ouvrage intitulé *Meditationes algebraïcæ*, par M. Waring, ouvrage que je ne connoiſſois pas, & où, parmi des recherches très-intéreſſantes ſur les Équations, on trouve des théorèmes analogues à ceux de l'*article V* de ce Mémoire. Depuis, l'illuſtre M. de la Grange a publié dans les deux premiers volumes des nouveaux Mémoires de Berlin, ſous le titre de *Réflexions ſur la réſolution algébrique des Équations*, une analyſe des méthodes de M.rs Tſchirnaüs, Euler & Bézout, terminée par l'expoſé d'une méthode particulière qu'il ſe propoſe d'appliquer aux degrés non réſolus. On remarquera quelques conformités entre cet ouvrage & le mien, dont je ne puis être que flatté. Je dois avertir encore que le premier volume des Mémoires de l'Académie royale de Marine, renfermera des recherches ingénieuſes déjà imprimées & diſtribuées, *ſur la Réſolution des Équations*, par M. de Marguerie; & que, dans le cinquième volume de la Société royale de Turin, on trouvera quelques vues générales, ſans doute très-profondes, ſur cette queſtion par M. le Marquis de Condorcet.

ſoit dans la marche du calcul, on n'a que des équations faciles à vérifier, en y exécutant les opérations indiquées; voilà ſon caractère particulier: c'eſt aux Géomètres à apprécier ſes avantages.

I. On demande les valeurs générales les plus ſimples qui puiſſent ſatisfaire concurremment à une Équation d'un degré déterminé.

II. Développons d'abord, par un exemple, l'état de cette queſtion.

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = (x - a)\,(x - b)$$

eſt une équation identique, & par conſéquent la condition

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0,$$

eſt ſatisfaite en faiſant $x = a$, ou $x = b$; mais

$$\left[\frac{a + b + \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)}}{2}\right]^2 - (a+b)\left[\frac{a + b + \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)}}{2}\right] + ab = 0,$$

eſt auſſi une équation identique, indépendamment de l'extraction de la racine indiquée; d'où il ſuit que ſi l'on n'avoit pas connu cette quantité $\frac{a + b + \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)}}{2}$ & qu'on eut voulu exprimer qu'on la cherchoit, la ſuppoſant x, on eut dû avoir

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0.$$

Or il eſt viſible que cette expreſſion $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)}$ qui ſignifie la quantité dont le carré eſt $a^2 + b^2 - 2ab$, eſt une expreſſion ambiguë, puiſque $a^2 + b^2 - 2ab$ eſt indifféremment le carré d'autant de quantités $r\,(a - b)$ qu'il y a de nombres qui ſatisfont à la condition $r^2 = 1$.

Voilà donc deux manières d'enviſager l'équation

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0;$$

comme équation du ſecond degré, & alors l'inconnue y repréſente une quantité ambiguë; comme produit de deux facteurs du premier degré, alors c'eſt l'équation qui eſt ambiguë, & l'inconnue y eſt ſuſceptible de deux valeurs qui ne le ſont point.

S'il étoit ſimplement queſtion de réſoudre l'équation

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0,$$

il faudroit choiſir le dernier point de vue; mais ſi l'on en demande une racine qui ne ſoit composée que de ſes coëfficiens $(a + b)$ & ab, cette racine ſera ambiguë néceſſairement : car a étant une valeur de x, il faudra qu'on ait

$$a = \textit{fonction}\ [(a + b),\ ab];$$

& comme en échangeant les lettres a & b entr'elles dans $(a + b)$ & dans ab, ces quantités, ainſi que leur fonction quelle qu'elle ſoit, demeurent abſolument les mêmes; l'échange ſuppoſé fait dans les deux membres, on aura encore

$$b = \textit{fonction}\ [(a + b),\ ab].$$

Or ces deux conditions ne peuvent ſubſiſter ſéparément que par l'ambiguité de la fonction.

Cette fonction eſt, par exemple,

$$\tfrac{1}{2}\ [a + b + \sqrt{((a + b)^2 - 4\,ab)}],$$

qui ſe déduit facilement de la valeur ci-deſſus, parce que

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2\,ab.$$

Une quantité de laquelle on ne pourroit dire en aucun ſens qu'elle égale a, ou qu'elle égale b, ne réſoudroit point l'équation propoſée; mais toute quantité de laquelle on peut le dire, en un certain ſens, la réſout : telle eſt, par exemple,

$$\tfrac{1}{2}\left[a + b + \frac{\sqrt{(2\sqrt{-1})} + \sqrt{(-2\sqrt{-1})}}{2}\sqrt{((a + b)^2 - 4\,ab)}\right],$$

qui la réſout effectivement, parce qu'il y a un ſens dans lequel le carré de $\frac{\sqrt{(2\sqrt{-1})} + \sqrt{(-2\sqrt{-1})}}{2}$ égale 1; telle eſt encore $\frac{2\,ab}{a + b + \sqrt{((a + b)^2 - 4\,ab)}}$, qui ne ſatisfait, qu'après la réduction à un dénominateur commun.

De ces trois valeurs générales, la plus ſimple eſt la première; mais l'on demande de plus les valeurs qui ſatisfont concurremment, c'eſt-à-dire, celles dont la ſomme eſt $a + b$, & le produit eſt ab. Il faut pour cela déterminer un ſens dans lequel la fonction ambiguë égale a, par exemple; & trouver, cela poſé, comment elle égale b ; or cela eſt ici très-facile, puiſque

$$\tfrac{1}{2}\ [a + b + \sqrt{((a + b)^2 - 4\,ab)}],$$

n'eſt a, qu'en ſuppoſant que

$$\sqrt{((a + b)^2 - 4ab)} = a - b;$$

d'où il ſuit que c'eſt

$$\tfrac{1}{2}\left[a + b - \sqrt{((a + b) - 4ab)}\right],$$

qui, dans ce ſens, eſt b.

III. Il faut prendre encore le troiſième degré pour exemple.

$$x^3 - (a + b + c)\,x^2 + (ab + ac + bc)\,x - abc = (x - a)\,(x - b)\,(x - c)$$

identiquement: donc, pour réſoudre généralement l'équation du troiſième degré

$$x^3 - (a + b + c)\,x^2 + (ab + ac + bc)\,x - abc = 0,$$

il faut trouver une fonction de

$(a + b + c)$, de $(ab + ac + bc)$ & de abc,

qui égale indifféremment ou a, ou b, ou c.

En réfléchiſſant ſur le ſecond degré, enviſagé de la manière ci-deſſus, & ſur ce qu'on connoiſſoit du troiſième, j'ai été conduit à penſer que cette condition pouvoit être remplie par une fonction de cette forme

$$\tfrac{1}{3}\left[a + b + c + \sqrt[3]{(a + r'b + r''c)^3} + \sqrt[3]{(a + r''b + r'c)^3}\right],$$

où je ſuppoſe les cubes développés, & que r', r'' ſont les valeurs qui ſatisfont, concurremment avec l'unité, à l'équation $r^3 = 1$.

Il eſt aiſé de voir que l'on a $r' + r'' = -1$, $r'r'' = 1$; d'où l'on tire $r'^2 = r''$, $r''^2 = r'$, &c. & l'on trouve que le cube de $a + r'b + r''c$, eſt

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r'(a^2b + b^2c + c^2a) + 3r''(a^2c + b^2a + c^2b);$$

mais cette expreſſion

$$\sqrt[3]{[a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r'(a^2b + b^2c + c^2a) + 3r''(a^2c + b^2a + c^2b)]}$$

qui n'indique autre choſe que la quantité dont elle renferme le cube, eſt une expreſſion ambiguë, puiſque ce cube l'eſt d'autant de quantités $r(a + r'b + r''c)$ qu'il y a de nombres qui ſatisfont à la condition $r^3 = 1$.

Il eſt donc facile de vérifier ſi la fonction ci-deſſus, au moyen des différens ſens dont s'y trouvent ſuſceptibles les deux quantités ambiguës, remplit d'abord cette condition d'être indifféremment ou a, ou b, ou c. Je vois que cela eſt en effet, puiſque

$\tfrac{1}{3}[a$

$$\tfrac{1}{3}[a+b+c+\quad(a+r'b+r''c)+\quad(a+r''b+r'c)]=a.$$
$$\tfrac{1}{3}[a+b+c+r'\,(a+r'b+r''c)+r''\,(a+r''b+r'c)]=c.$$
$$\tfrac{1}{3}[a+b+c+r''\,(a+r'b+r''c)+r'\,(a+r''b+r'c)]=b.$$

Il ne s'agit donc plus que de faire que les deux cubes ne soient fonctions que de $(a+b+c)$, $(ab+ac+bc)$ & de abc: mais comme cela sera impossible tant qu'il ne sera pas indifférent d'y échanger les lettres a, b & c entr'elles, il convient de s'occuper à part de cette seconde condition.

On a $r'=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $r''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; d'où

$$(a+r'b+r''c)^3=a^3+b^3+c^3-\tfrac{3}{2}(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$$
$$+\,6\,abc+\tfrac{3}{2}(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)\sqrt{-3},$$

quantité dont $(a+r''b+r'c)^3$ ne diffère que parce que $\sqrt{-3}$ y est en moins.

Il n'y a là que

$$(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)$$

qui change de valeur si l'on échange les lettres entr'elles. En y écrivant en effet a pour b, & b pour a, on a

$$(a^2c+b^2a+c^2b-a^2b-b^2c-c^2a),$$

& c'est la seule valeur différente de la première, que les échanges de lettres puissent produire: mais nous avons appris ci-devant à faire une quantité qui fut indifféremment l'une des deux, & dans laquelle il fut de plus indifférent d'écrire l'une pour l'autre: u' & u'' étant ces deux quantités, $\frac{1}{2}[u'+u''+\sqrt{(u'-u'')^2}]$ satisfait aux deux conditions; donc supposant

$$a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b=u',$$
$$a^2c+b^2a+c^2b-a^2b-b^2c-c^2a=u'',$$

$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)^2}$ sera indifféremment u' ou u'', & ne changera point de valeur si l'on y échange entr'elles les lettres a, b & c.

Or $(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)$, qui égale $(a-b)\,(a-c)\,(b-c)$, a pour carré

$$a^4b^2+a^4c^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4a^2+c^4b^2$$
$$-\,2\,(a^4bc+b^4ac+c^4ab)-2\,(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)$$
$$+\,2\,(a^3b^2c+a^3c^2b+b^3a^2c+b^3c^2a+c^3a^2b+c^3b^2a)-6\,a^2b^2c^2.$$

Voilà donc la seconde condition de la résolution générale du troisième degré satisfaite. Quant à la troisième & dernière qui est de substituer à toutes ces quantités, dans lesquelles il est indifférent d'échanger les lettres entr'elles, leurs valeurs en.... $(a + b + c)$, $(ab + ac + bc)$ & abc, on verra dans l'instant qu'elle est toujours très-facile à remplir.

IV. On voit dès-à-présent que pour un degré quelconque, la condition essentielle de la résolution générale étant de trouver une fonction de la somme des racines, de la somme de leurs produits deux-à-deux, de la somme de leurs produits trois-à-trois, &c. qui soit indifféremment l'une quelconque de ces racines, cette recherche peut se partager en trois chefs:

1.° *Trouver une fonction des racines, de laquelle on puisse dire, dans un certain sens, qu'elle égale telle de ces racines que l'on voudra.*

2.° *Mettre cette fonction sous une forme telle qu'il soit de plus indifférent d'y échanger les racines entr'elles.*

3.° *Y substituer les valeurs en somme de ces racines, somme de leurs produits deux-à-deux, &c.*

Traitons d'abord ce troisième objet qui est le plus simple.

V. J'écrirai dans la suite

(A) pour $a + b + c +$ &c. (A^2) pour $a^2 + b^2 + c^2 +$ &c.

(AB) pour $ab + ac +$ &c. (A^2B) pour $a^2b + b^2a + c^2a +$ &c.

$+ bc +$ &c. $\qquad + a^2c + b^2c + c^2b +$ &c.

$+$ &c. $\qquad +$ &c. $+$ &c. $+$ &c.

&c.

En général par $(A^\alpha B^\beta C^\gamma ....)$ j'indiquerai la somme de tous les termes différens qui résulteroient de celui-là, au moyen de toutes les substitutions possibles des petites lettres a, b, c, d, e, &c. dans un ordre quelconque, aux grandes, A, B, C, &c. & j'appellerai ces expressions abrégées, *Types de combinaison* ou simplement *Types.*

Comme le cas où quelques-uns des exposans α, β, γ, &c.

du *Type* $(A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots)$ sont égaux entr'eux, conduit à des considérations particulières, j'adopterai encore, du moins dans cet article, une autre façon de noter, au moyen de laquelle le nombre d'égalités entre ces exposans puisse entrer d'une manière générale dans les expressions que je cherche.

Je fais $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\varepsilon \ldots) = \{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\}$; & si, par exemple, $\alpha = \beta = \gamma$, $\delta = \varepsilon$, j'aurai

$$(A^\alpha B^\alpha C^\alpha D^\delta E^\delta \ldots) = \{\alpha\alpha\alpha\delta\delta\ldots\} = \{\alpha^3\delta^2\ldots\}$$

Ainsi le sens de cette expression $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\ldots\}$ est facile à saisir:

$$(A) = \{1\} \quad (A^2) = \{2\} \quad (A^3B^3) = \{3^2\}$$
$$(AB) = \{1^2\} \quad (A^3) = \{3\} \quad (A^2B^2C^2D) = \{2^3 1\}$$
$$(ABC) = \{1^3\} \quad \&c. \quad \&c.$$

&c.

Les fonctions qui ne changent point de valeur si l'on y échange les lettres entr'elles, étant évidemment des fonctions de *types;* ce qu'on se propose ici se réduit donc à trouver la valeur de $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\ldots\}$ en $\{1\}$, $\{1^2\}$, $\{1^3\}$, $\{1^4\}$, &c.

Les formules suivantes donnent d'abord la valeur de $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\ldots\}$ en sommes de puissances $\{\varpi\}$, $\{\varpi'\}$, &c. puis la valeur en $\{1\}$, $\{1^2\}$, $\{1^3\}$, &c. de ces sommes de puissances.

1.° α, β, γ, &c. demeurant indéterminés, & n, p, q, &c. étant des nombres entiers positifs, ou zéro, si l'on satisfait de toutes les manières possibles à la suite d'équations

$$\begin{aligned} &a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + a'''\varepsilon''' + \ldots\ldots = n, \\ &b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \ldots\ldots = p, \\ &c'\varepsilon' + \ldots\ldots = q, \\ &\&c. \end{aligned}$$

en ne prenant pour a', a'', a'''... b', b''... c'... ε', ε'', ε'''... que des nombres entiers positifs, ou zéro, la valeur de $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\ldots\}$ en sommes de puissances, contiendra tous les différens termes de la forme

$$\{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \ldots\}^{\varepsilon'} \times \{a''\alpha + b''\beta + \ldots\}^{\varepsilon''} \times \{a'''\alpha + \ldots\}^{\varepsilon'''} \ldots$$

qui en peuvent résulter; & le coëfficient numérique du term quelconque

$$\{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \ldots\}^{\epsilon'} \times \{a''\alpha + b''\beta + \ldots\}^{\epsilon''} \times \{a'''\alpha + \ldots\}^{\epsilon'''} \ldots$$

en supposant pour simplifier

$$\begin{array}{ll} a' + b' + c' + \ldots = A', & n + p + q + \ldots = N. \\ a'' + b'' + \ldots = A'', & \epsilon' + \epsilon'' + \epsilon''' + \ldots = E. \\ a''' + \ldots = A''', & \\ \text{\&c.} & \end{array}$$

sera

$$\pm \frac{(1.2.3\ldots\overline{A'-2}.\overline{A'-1})^{\epsilon'}\,(1.2\ldots\overline{A''-1})^{\epsilon''}\,(1.2\ldots\overline{A'''-1})^{\epsilon'''}\ldots\ldots}{(1.2.3\ldots\overline{a'-1}.a')^{\epsilon'}\,(1.2..a'')^{\epsilon''}\,(1.2..a''')^{\epsilon'''}\ldots(1.2..b')^{\epsilon'}\,(1.2..b'')^{\epsilon''}\ldots(1.2..c')^{\epsilon'}\ldots(1.2.3..\epsilon')\,(1.2..\epsilon'')\,(1.2}$$

le signe + ayant lieu si $(N + E)$ est pair & le signe — s'il est impair.

Par exemple,

$$\{\alpha^3\beta^2\} = \frac{1.2.3.4}{1.2.3.1.2}\{3\alpha + 2\beta\} - \frac{1.2.3}{1.2.3}\{3\alpha + \beta\}\{\beta$$

$$- \frac{1.2.3}{1.2.1.2}\{2\alpha + 2\beta\}\{\alpha$$

$$- \frac{1.2.1}{1.2.3.1.2}\{3\alpha\}\{2\beta\}$$

$$- \frac{1.2.1}{1.2}\{2\alpha + \beta\}\{\alpha + \beta$$

$$- \frac{1.2.1}{1.2.1.2}\{\alpha + 2\beta\}\{2\alpha$$

$$+ \frac{1.2}{1.2.3.1.2}\{3\alpha\}\{\beta\}^2$$

$$+ \frac{1.2}{1.2}\{\alpha + \beta\}\{\alpha\}\{\beta\} \quad - \frac{1}{1.2.1.2}\{2\alpha\}\{\alpha\}\{\beta$$

$$+ \frac{1.2}{1.2.1.2}\{\alpha + 2\beta\}\{\alpha\}^2 \quad - \frac{1}{1.2}\{\alpha + \beta\}\{\alpha\}^2$$

$$+ \frac{1.1}{1.2.1.2}\{2\alpha\}\{2\beta\}\{\alpha\} \quad - \frac{1}{1.2.1.2.3}\{2\beta\}\{\alpha\}^3$$

$$+ \frac{1.1}{1.2}\{2\alpha\}\{\alpha + \beta\}\{\beta\}$$

$$+ \frac{1^2}{1.2}\{\alpha + \beta\}^2\{\alpha\} \quad + \frac{1}{1.2.3.1.2}\{\alpha\}^3\{\beta\}^2$$

& si l'on supposoit $\alpha = 2$, $\beta = 1$, on auroit

$$\begin{aligned}
\{2^3\, 1^2\} = 2\{8\} &- \{7\}\{1\} + \tfrac{1}{6}\{6\}\{1\}^2 \\
&- \tfrac{3}{2}\{6\}\{2\} + \{5\}\{2\}\{1\} \\
&- \tfrac{1}{6}\{6\}\{2\} + \tfrac{1}{2}\{4\}\{2\}^2 \\
&- \{5\}\{3\} + \tfrac{1}{4}\{4\}\{2\}^2 \\
&- \tfrac{1}{2}\{4\}^2 + \tfrac{1}{2}\{4\}\{3\}\{1\} \\
&+ \tfrac{1}{2}\{3\}^2\{2\} \\
&- \tfrac{1}{4}\{4\}\{2\}\{1\}^2 + \tfrac{1}{12}\{2\}^3\{1\}^2 \\
&- \tfrac{1}{2}\{3\}\{2\}^2\{1\} \\
&- \tfrac{1}{12}\{2\}^4
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
(A^2B^2C^2DE) = 2(A^8) &- (A^7)(A) + \tfrac{1}{6}(A^6)(A)^2 \\
&- \tfrac{5}{3}(A^6)(A^2) + (A^5)(A^2)(A) \\
&- (A^5)(A^3) + \tfrac{3}{4}(A^4)(A^2)^2 \\
&- \tfrac{1}{2}(A^4)^2 + \tfrac{1}{2}(A^4)(A^3)(A) \\
&+ \tfrac{1}{2}(A^3)^2(A^2) \\
&- \tfrac{1}{4}(A^4)(A^2)(A)^2 + \tfrac{1}{12}(A^2)^3(A)^2 \\
&- \tfrac{1}{2}(A^3)(A^2)^2(A) \\
&- \tfrac{1}{12}(A^2)^4
\end{aligned}$$

2.° Si l'on fait avec les quantités (A), (AB), (ABC) &c. ou $\{1\}$, $\{1^2\}$, $\{1^3\}$ &c. la fonction rationelle & entière la plus générale possible de la dimension ϖ, ou si l'on prend tous les différens termes de la forme $\{1\}^{\varepsilon'}\{1^2\}^{\varepsilon''}\{1^3\}^{\varepsilon'''}$..... qui peuvent résulter des manières possibles de satisfaire à l'équation

$$\varepsilon' + 2\varepsilon'' + 3\varepsilon''' + \ldots\ldots = \varpi,$$

ε', ε'', ε'''.... étant des nombres entiers positifs ou zéro, la valeur de $\{\varpi\}$ contiendra tous ces termes; & le coëfficient numérique du terme quelconque,

$$\{1\}^{\varepsilon'}\{1^2\}^{\varepsilon''}\{1^3\}^{\varepsilon'''}\ldots\ldots;$$

en supposant $\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \dots = E$, sera

$$\pm \frac{\varpi\,(1.2\dots\overline{E-1})}{(1.2\dots\varepsilon')\,(1.2\dots\varepsilon'')\,(1.2\dots\varepsilon''')\dots}$$

le signe + ayant lieu si $(\varpi + E)$ est pair, & le signe — s'il est impair.

Par exemple,

$$\{5\} = \frac{5.1.2.3.4}{1.2.3.4.5}\{1\}^5 - \frac{5.1.2.3}{1.2.3}\{1\}^3\{1^2\} + \frac{5.1.2}{1.2}\{1\}\{1^2\}^2$$
$$+ \frac{5.1.2}{1.2}\{1\}^2\{1^3\} - \frac{5.1}{1}\{1^2\}\{1^3\} - \frac{5.1}{1}\{1\}\{1^4\} + \frac{5}{1}\{1^5\},$$

c'est-à-dire,

$$(A^5) = (A)^5 - 5(A)^3(AB) + 5(A)(AB)^2 + 5(A)^2(ABC)$$
$$- 5(AB)(ABC) - 5(A)(ABCD) + 5(ABCDE).$$

L'inspection des Tables ci-jointes, que je crois faciles à entendre sans explication, & qu'il me paroîtroit intéressant de continuer, pourra suppléer aux détails de procédés qui ne sont pas ici de mon objet *.

---

* On étoit sur le point d'imprimer ce Mémoire, lorsqu'il m'est venu en idée de rechercher l'expression générale d'un nombre pris quelque part que ce soit dans ces Tables, ou, ce qui est la même chose, en supposant ce qui précède, celle du coëfficient numérique du terme

$$\{1\}^{D-2a_1-3a_2-4a_3-\dots-\overline{n+1}a_n} \times \{1^2\}^{a_1}\{1^3\}^{a_2}\{1^4\}^{a_3}\dots\{1^{n+1}\}^{a_n},$$

dans la valeur du produit

$$\{\overline{n+1}\}^{a_n}\dots\{4\}^{a_3}\{3\}^{a_2}\{2\}^{a_1}\{1\}^{D-2a_1-3a_2-4a_3-\dots-\overline{n+1}a_n}.$$

J'ai trouvé que si l'on indique ce coëfficient, qui est une Fonction de $a_1, a_2, \dots a_1, a_2$, &c. par

$$\pm F\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \dots a_n \\ a_1, a_2, a_3 \dots a_n \end{pmatrix},$$

le signe + ayant lieu si

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots$$

est un nombre pair, & le signe — s'il est impair, on aura pour déterminer cette Fonction, la formule suivante (en supposant pour simplifier

$$\nu + 1 - 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 - \dots - \overline{\nu+1}\,a_\nu = N,$$
$$\nu - a_1 - 2a_2 - 3a_3 - \dots\dots\dots - \nu a_\nu = \mathrm{N}),$$

	$\{1\}^2$	$\{1^2\}$
$\{2\}=$	1	-2
$\{1^2\}=$		1

	$\{1\}^3$	$\{1\}\{1^2\}$	$\{1^3\}$
$\{3\}=$	1	-3	$+3$
$\{21\}=$		1	-3
$\{1^3\}=$			1

	$\{1\}^4$	$\{1\}^2\{1^2\}$	$\{1^2\}^2$	$\{1\}\{1^3\}$	$\{1^4\}$
$\{4\}=$	1	-4	$+2$	$+4$	-4
$\{31\}=$		1	-2	-1	$+4$
$\{2^2\}=$			1	-2	$+2$
$\{21^2\}=$				1	-4
$\{1^4\}=$					1

	$\{1\}^5$	$\{1\}^3\{1^2\}$	$\{1\}\{1^2\}^2$	$\{1\}^2\{1^3\}$	$\{1^2\}\{1^3\}$	$\{1\}\{1^4\}$	$\{1^5\}$
$\{5\}=$	1	-5	$+5$	$+5$	-5	-5	$+5$
$\{41\}=$		1	-3	-1	$+5$	$+1$	-5
$\{32\}=$			1	-2	-1	$+5$	-5
$\{31^2\}=$				1	-2	-1	$+5$
$\{2^21\}=$					1	-3	$+5$
$\{21^3\}=$						1	-5
$\{1^5\}=$							1

	$\{1\}^6$	$\{1\}^4\{1^2\}$	$\{1\}^2\{1^2\}^2$	$\{1^2\}^3$	$\{1\}^3\{1^3\}$	$\{1\}\{1^2\}\{1^3\}$	$\{1^3\}^2$	$\{1\}^2\{1^4\}$	$\{1^2\}\{1^4\}$	$\{1\}\{1^5\}$	$\{1^6\}$
$\{6\}=$	1	-6	$+9$	-2	$+6$	-12	$+3$	-6	$+6$	$+6$	-6
$\{51\}=$		1	-4	$+2$	-1	$+7$	-3	$+1$	-6	-1	$+6$
$\{42\}=$			1	-2	-2	$+4$	-3	$+2$	$+2$	-6	$+6$
$\{41^2\}=$					1	-3	$+3$	-1	$+2$	$+1$	-6
$\{3^2\}=$				1	*	-3	$+3$	$+3$	-3	-3	$+3$
$\{321\}=$						1	-3	-3	$+4$	$+7$	-12
$\{31^3\}=$								1	-2	-1	$+6$
$\{2^3\}=$							1	*	-2	$+2$	-2
$\{2^21^2\}=$									1	-4	$+9$
$\{21^4\}=$										1	-6
$\{1^6\}=$											1

	$\{1\}^7$	$\{1\}^5\{1^2\}$	$\{1\}^3\{1^2\}^2$	$\{1\}\{1^2\}^3$	$\{1\}^4\{1^3\}$	$\{1\}^2\{1^2\}\{1^3\}$	$\{1^2\}^2\{1^3\}$	$\{1\}\{1^3\}^2$	$\{1\}^3\{1^4\}$	$\{1\}\{1^2\}\{1^4\}$	$\{1^3\}\{1^4\}$	$\{1\}^2\{1^5\}$	$\{1^2\}\{1^5\}$	$\{1\}\{1^6\}$	$\{1^7\}$
$\{7\}=$	1	-7	$+14$	-7	$+7$	-21	$+7$	$+7$	-7	$+14$	-7	$+7$	-7	-7	$+7$
$\{61\}=$		1	-5	$+5$	-1	$+9$	-7	-4	$+1$	-8	$+7$	-1	$+7$	$+1$	-7
$\{52\}=$			1	-3	-2	$+6$	$+3$	-7	$+2$	-4	$+7$	-2	-3	$+7$	-7
$\{51^2\}=$					1	-4	$+2$	$+4$	-1	$+3$	-7	$+1$	-2	-1	$+7$
$\{43\}=$				1	*	-3	-1	$+5$	$+3$	-2	-5	-7	$+7$	$+7$	-7
$\{421\}=$						1	-2	-1	-3	$+8$	-2	$+3$	-4	-8	$+14$
$\{41^3\}=$									1	-3	$+3$	-1	$+2$	$+1$	-7
$\{3^21\}=$							1	-2	*	-1	$+5$	$+4$	-7	-4	$+7$
$\{32^2\}=$								1	*	-2	-1	$+2$	$+3$	-7	$+7$
$\{321^2\}=$										1	-3	-4	$+6$	$+9$	-21
$\{31^4\}=$												1	-2	-1	$+7$
$\{2^31\}=$											1	*	-3	$+5$	-7
$\{2^21^3\}=$													1	-5	$+14$
$\{21^5\}=$														1	-7
$\{1^7\}=$															1

	$\{1\}^8$	$\{1\}^6\{1^2\}$	$\{1\}^4\{1^2\}^2$	$\{1\}^2\{1^2\}^3$	$\{1^2\}^4$	$\{1\}^5\{1^3\}$	$\{1\}^3\{1^2\}\{1^3\}$	$\{1\}\{1^2\}^2\{1^3\}$	$\{1\}^2\{1^3\}^2$	$\{1^2\}\{1^3\}^2$	$\{1\}^4\{1^4\}$	$\{1\}^2\{1^2\}\{1^4\}$	$\{1^2\}^2\{1^4\}$	$\{1\}\{1^3\}\{1^4\}$	$\{1^4\}^2$	$\{1\}^3\{1^5\}$	$\{1\}\{1^2\}\{1^5\}$	$\{1^3\}\{1^5\}$	$\{1\}^2\{1^6\}$	$\{1^2\}\{1^6\}$	$\{1\}\{1^7\}$	$\{1^8\}$
$\{8\}=$	1	-8	$+20$	-16	$+2$	$+8$	-32	$+24$	$+12$	-8	-8	$+24$	-8	-16	$+4$	$+8$	-16	$+8$	-8	$+8$	$+8$	-8
$\{71\}=$		1	-6	$+9$	-2	-1	$+11$	-17	-5	$+8$	$+1$	-10	$+8$	$+9$	-4	-1	$+9$	-8	$+1$	-8	-1	$+8$
$\{62\}=$			1	-4	$+2$	-2	$+8$	*	-9	$+2$	$+2$	-6	-4	$+16$	-4	-2	$+4$	-8	$+2$	$+4$	-8	$+8$
$\{61^2\}=$						1	-5	$+5$	$+5$	-5	-1	$+4$	-2	-9	$+4$	$+1$	-3	$+8$	-1	$+2$	$+1$	-8
$\{53\}=$				1	-2	*	-3	$+6$	$+3$	-7	$+3$	-9	$+8$	$+1$	-4	-3	$+1$	$+7$	$+8$	-8	-8	$+8$
$\{521\}=$							1	-3	-1	$+5$	-3	$+11$	-4	-10	$+8$	$+3$	-8	$+1$	-3	$+4$	$+9$	-16
$\{51^3\}=$											1	-4	$+2$	$+4$	-4	-1	$+3$	-3	$+1$	-2	-1	$+8$
$\{4^2\}=$					1	*	*	-4	$+2$	$+4$	*	$+4$	-4	-8	$+6$	-4	$+8$	-4	$+4$	-4	-4	$+4$
$\{431\}=$								1	-2	-1	*	-1	*	$+10$	-8	$+4$	-10	$+1$	-9	$+16$	$+9$	-16
$\{42^2\}=$									1	-2	*	-2	$+4$	*	-4	$+2$	-4	$+8$	-2	-4	$+8$	-8
$\{421^2\}=$												1	-2	-1	$+4$	-4	$+11$	-9	$+4$	-6	-10	$+24$
$\{41^4\}=$																1	-3	$+3$	-1	$+2$	$+1$	-8
$\{3^22\}=$										1	*	*	-2	-1	$+4$	*	$+5$	-7	-5	$+2$	$+8$	-8
$\{3^21^2\}=$													1	-2	$+2$	*	-1	$+3$	$+5$	-9	-5	$+12$
$\{32^21\}=$														1	-4	*	-3	$+6$	$+5$	*	-17	$+24$
$\{321^3\}=$																	1	-3	-5	$+8$	$+11$	-32
$\{31^5\}=$																			1	-2	-1	$+8$
$\{2^4\}=$															1	*	*	-2	*	$+2$	-2	$+2$
$\{2^31^2\}=$																		1	*	-4	$+9$	-16
$\{2^21^4\}=$																				1	-6	$+20$
$\{21^6\}=$																					1	-8
$\{1^8\}=$																						1

TABLE II. *Mém. de l'Acad. R. des Sc. année 1771, page 374.*

	$\{1\}^9$	$\{1\}^7\{1^2\}$	$\{1\}^5\{1^2\}^2$	$\{1\}^3\{1^2\}^3$	$\{1\}\{1^2\}^4$	$\{1\}^6\{1^3\}$	$\{1\}^4\{1^2\}\{1^3\}$	$\{1\}^2\{1^2\}^2\{1^3\}$	$\{1^2\}^3\{1^3\}$	$\{1\}^3\{1^3\}^2$	$\{1\}\{1^2\}\{1^3\}^2$	$\{1^3\}^3$	$\{1\}^5\{1^4\}$	$\{1\}^3\{1^2\}\{1^4\}$	$\{1\}\{1^2\}^2\{1^4\}$	$\{1\}^2\{1^3\}\{1^4\}$	$\{1^2\}\{1^3\}\{1^4\}$	$\{1\}\{1^4\}^2$	$\{1\}^4\{1^5\}$	$\{1\}^2\{1^2\}\{1^5\}$	$\{1^2\}^2\{1^5\}$	$\{1\}\{1^3\}\{1^5\}$	$\{1^4\}\{1^5\}$	$\{1\}^3\{1^6\}$	$\{1\}\{1^2\}\{1^6\}$	$\{1^3\}\{1^6\}$	$\{1\}^2\{1^7\}$	$\{1^2\}\{1^7\}$	$\{1\}\{1^8\}$	$\{1^9\}$
$\{9\} =$	1	−9	+27	−30	+9	+9	−45	+54	−9	+18	−27	+3	−9	+36	−27	−27	+18	+9	+9	−27	+9	+18	−9	−9	+18	−9	+9	−9	−9	+9
$\{81\} =$		1	−7	+14	−7	−1	+13	−30	+9	−6	+19	−3	+1	−12	+19	+11	−18	−5	−1	+11	−9	−10	+9	+1	−10	+9	−1	+9	+1	−9
$\{72\} =$			1	−5	+5	−2	+10	−5	−5	−11	+13	−3	+2	−8	−1	+20	−4	−9	−2	+6	+5	−18	+9	+2	−4	+9	−2	−5	+9	−9
$\{71^2\} =$						1	−6	+9	−2	+6	−12	+3	−1	+5	−5	−11	+11	+5	+1	−4	+2	+10	−9	−1	+3	−9	+1	−2	−1	+9
$\{63\} =$				1	−3	*	−3	+9	+3	+3	−18	+6	+3	−12	+9	+9	*	−9	−3	+9	−9	*	+9	+3	*	−9	−9	+9	+9	−9
$\{621\} =$							1	−4	+2	−1	+7	−3	−3	+14	−12	−13	+4	+14	+3	−11	+4	+10	−18	−3	+8	*	+3	−4	−10	+18
$\{61^3\} =$													1	−5	+5	+5	−5	−5	−1	+4	−2	−4	+9	+1	−3	+3	−1	+2	+1	−9
$\{54\} =$					1	*	*	−4	−1	+2	+7	−3	*	+4	−3	−13	+2	+11	−4	+7	+1	+2	−11	+9	−18	+9	−9	+9	+9	−9
$\{531\} =$								1	−2	−2	+4	−3	*	−1	+2	+5	−2	−6	+4	−15	+8	+5	+2	−4	+10	*	+10	−18	−10	+18
$\{52^2\} =$										1	−3	+3	*	−2	+6	*	−6	−1	+2	−6	*	+8	+1	−2	+4	−9	+2	+5	−9	+9
$\{521^2\} =$														1	−3	−1	+5	+1	−4	+15	−6	−15	+7	+4	−11	+9	−4	+6	+11	−27
$\{51^4\} =$																			1	−4	+2	+4	−4	−1	+3	−3	+1	−2	−1	+9
$\{4^21\} =$									1	*	−3	+3	*	*	−1	+5	−2	−5	*	+1	−1	−6	+11	−5	+14	−9	+5	−9	−5	+9
$\{432\} =$											1	−3	*	*	−2	−1	+8	−2	*	+5	−6	−2	+2	−5	+4	*	+11	−4	−18	+18
$\{431^2\} =$															1	−2	−1	+5	*	−1	*	+5	−13	+5	−13	+9	−11	+20	+11	−27
$\{42^21\} =$																1	−2	−1	*	−3	+6	+2	−3	+5	−12	+9	−5	−1	+19	−27
$\{421^3\} =$																				1	−2	−1	+4	−5	+14	−12	+5	−8	−12	+36
$\{41^5\} =$																								1	−3	+3	−1	+2	+1	−9
$\{3^3\} =$												1	*	*	*	*	−3	+3	*	*	+3	−3	−3	*	−3	+6	+3	−3	−3	+3
$\{3^221\} =$																	1	−3	*	*	−3	+4	+7	*	+7	−18	−12	+13	+19	−27
$\{3^21^3\} =$																					1	−2	+2	*	−1	+3	+6	−11	−6	+18
$\{32^3\} =$																		1	*	*	*	−2	−1	*	+2	+3	−2	−5	+9	−9
$\{32^21^2\} =$																						1	−4	*	−4	+9	+9	−5	−30	+54
$\{321^4\} =$																									1	−3	−6	+10	+13	−45
$\{31^6\} =$																											1	−2	−1	+9
$\{2^41\} =$																							1	*	*	−3	*	+5	−7	+9
$\{2^31^3\} =$																										1	*	−5	+14	−30
$\{2^21^5\} =$																												1	−7	+27
$\{21^7\} =$																													1	−9
$\{1^9\} =$																														1

	$\{1\}^{10}$	$\{1\}^{8}\{1^2\}$	$\{1\}^{6}\{1^2\}^{2}$	$\{1\}^{4}\{1^2\}^{3}$	$\{1\}^{2}\{1^2\}^{4}$	$\{1^2\}^{5}$	$\{1\}^{7}\{1^3\}$	$\{1\}^{5}\{1^2\}\{1^3\}$	$\{1\}^{3}\{1^2\}^{2}\{1^3\}$	$\{1\}\{1^2\}^{3}\{1^3\}$	$\{1\}^{4}\{1^3\}^{2}$	$\{1\}^{2}\{1^2\}\{1^3\}^{2}$	$\{1^2\}^{2}\{1^3\}^{2}$	$\{1\}\{1^3\}^{3}$
$\{\overline{10}\}=$	1	−10	+35	−50	+25	−2	+10	−60	+100	−40	+25	−60	+15	+10
$\{91\}=$		1	−8	+20	−16	+2	−1	+15	−46	+31	−7	+33	−15	−7
$\{82\}=$			1	−6	+9	−2	−2	+12	−12	−8	−13	+28	+1	−10
$\{81^2\}=$							1	−7	+14	−7	+7	−21	+7	+7
$\{73\}=$				1	−4	+2	*	−3	+12	−2	+3	−24	+6	+11
$\{721\}=$								1	−5	+5	−1	+9	−7	−4
$\{71^3\}=$														
$\{64\}=$					1	−2	*	*	−4	+8	+2	*	−9	+2
$\{631\}=$									1	−3	−2	+6	+3	−7
$\{62^2\}=$											1	−4	+2	+4
$\{621^2\}=$														
$\{61^4\}=$														
$\{5^2\}=$						1	*	*	*	−5	*	+5	+5	−5
$\{541\}=$										1	*	−3	−1	+5
$\{532\}=$												1	−2	−1
$\{531^2\}=$														
$\{52^21\}=$														
$\{521^3\}=$														
$\{51^5\}=$														
$\{4^22\}=$													1	−2
$\{4^21^2\}=$														
$\{43^2\}=$														1
$\{4321\}=$														
$\{431^3\}=$														
$\{42^3\}=$														
$\{42^21^2\}=$														
$\{421^4\}=$														
$\{41^6\}=$														
$\{3^31\}=$														
$\{3^22^2\}=$														
$\{3^221^2\}=$														
$\{3^21^4\}=$														
$\{32^31\}=$														
$\{32^21^3\}=$														
$\{321^5\}=$														
$\{31^7\}=$														
$\{2^5\}=$														
$\{2^41^2\}=$														
$\{2^31^4\}=$														
$\{2^21^6\}=$														
$\{21^8\}=$														
$\{1^{10}\}=$														

	$\{1\}^{6}\{1^4\}$	$\{1\}^{4}\{1^2\}\{1^4\}$	$\{1\}^{2}\{1^2\}^{2}\{1^4\}$	$\{1^2\}^{3}\{1^4\}$	$\{1\}^{3}\{1^3\}\{1^4\}$	$\{1\}\{1^2\}\{1^3\}\{1^4\}$	$\{1^3\}^{2}\{1^4\}$	$\{1\}^{2}\{1^4\}^{2}$	$\{1^2\}\{1^4\}^{2}$	$\{1\}^{5}\{1^5\}$	$\{1\}^{3}\{1^2\}\{1^5\}$	$\{1\}\{1^2\}^{2}\{1^5\}$	$\{1\}^{2}\{1^3\}\{1^5\}$	$\{1^2\}\{1^3\}\{1^5\}$
$\{\overline{10}\}=$	−10	+50	−60	+10	−40	+60	−10	+15	−10	+10	−40	+30	+30	−20
$\{91\}=$	+1	−14	+33	−10	+13	−42	+10	−6	+10	−1	+13	−21	−12	+20
$\{82\}=$	+2	−10	+4	+6	+24	−28	+10	−11	+2	−2	+8	+2	−22	+4
$\{81^2\}=$	−1	+6	−9	+2	−13	+26	−10	+6	−6	+1	−5	+5	+12	−12
$\{73\}=$	+3	−15	+18	−10	+12	+3	−11	−15	+10	−3	+12	−9	−9	−1
$\{721\}=$	−3	+17	−23	+4	−16	+21	+1	+17	−12	+3	−14	+12	+13	−3
$\{71^3\}=$	1	−6	+9	−2	+6	−12	+3	−6	+6	−1	+5	−5	−5	+5
$\{64\}=$	*	+4	−12	+10	−8	+12	−2	+9	−14	−4	+16	−18	−6	+20
$\{631\}=$	*	−1	+3	*	+5	−15	+13	−3	+4	+4	−19	+18	+15	−19
$\{62^2\}=$	*	−2	+8	−4	*	−8	−4	−1	+10	+2	−8	+4	+10	−4
$\{621^2\}=$		1	−4	+2	−1	+7	−3	+1	−6	−4	+19	−17	−19	+15
$\{61^4\}=$										1	−5	+5	+5	−5
$\{5^2\}=$	*	*	+5	−5	−5	−5	+5	+5	+5	*	−5	+10	+10	−15
$\{541\}=$	*	*	−1	*	+5	*	−8	−8	+4	*	+1	−1	−12	+10
$\{532\}=$	*	*	−2	+4	−1	+5	+1	+1	−12	*	+5	−13	−4	+17
$\{531^2\}=$			1	−2	−2	+4	−3	+2	+2	*	−1	+2	+3	−4
$\{52^21\}=$					1	−3	+3	−1	+2	*	−3	+9	+2	−13
$\{521^3\}=$											1	−3	−1	+5
$\{51^5\}=$														
$\{4^22\}=$	*	*	*	−2	*	+4	+2	−3	+2	*	*	+2	+2	−12
$\{4^21^2\}=$				1	*	−3	+3	+3	−3	*	*	−1	+2	+1
$\{43^2\}=$	*	*	*	*	*	−3	−1	+3	+2	*	*	+3	−3	+1
$\{4321\}=$						1	−3	−3	+4	*	*	−3	+4	+5
$\{431^3\}=$												1	−2	−1
$\{42^3\}=$								1	−2	*	*	*	−2	+4
$\{42^21^2\}=$													1	−2
$\{421^4\}=$														
$\{41^6\}=$														
$\{3^31\}=$							1	*	−2	*	*	*	*	−1
$\{3^22^2\}=$									1	*	*	*	*	−2
$\{3^221^2\}=$														1
$\{3^21^4\}=$														
$\{32^31\}=$														
$\{32^21^3\}=$														
$\{321^5\}=$														
$\{31^7\}=$														
$\{2^5\}=$														
$\{2^41^2\}=$														
$\{2^31^4\}=$														
$\{2^21^6\}=$														
$\{21^8\}=$														
$\{1^{10}\}=$														

	$\{1\}\{1^4\}\{1^5\}$	$\{1^5\}^{2}$	$\{1\}^{4}\{1^6\}$	$\{1\}^{2}\{1^2\}\{1^6\}$	$\{1^2\}^{2}\{1^6\}$	$\{1\}\{1^3\}\{1^6\}$	$\{1^4\}\{1^6\}$	$\{1\}^{3}\{1^7\}$	$\{1\}\{1^2\}\{1^7\}$	$\{1^3\}\{1^7\}$	$\{1\}^{2}\{1^8\}$	$\{1^2\}\{1^8\}$	$\{1\}\{1^9\}$	$\{1^{10}\}$
$\{\overline{10}\}=$	−20	+5	−10	+30	−10	−20	+10	+10	−20	+10	−10	+10	+10	−10
$\{91\}=$	+11	−5	+1	−12	+10	+11	−10	−1	+11	−10	+1	−10	−1	+10
$\{82\}=$	+20	−5	+2	−6	−6	+20	−10	−2	+4	−10	+2	+6	−10	+10
$\{81^2\}=$	−11	+5	−1	+4	−2	−11	+10	+1	−3	+10	−1	+2	+1	−10
$\{73\}=$	+20	−5	+3	−9	+10	−1	−10	−3	−1	+11	+10	−10	−10	+10
$\{721\}=$	−31	+10	−3	+11	−4	−10	+20	+3	−8	−1	−3	+4	+11	−20
$\{71^3\}=$	+11	−5	+1	−4	+2	+4	−10	−1	+3	−3	+1	−2	−1	+10
$\{64\}=$	−4	−5	+4	−6	−2	−4	+14	−10	+20	−10	+10	−10	−10	+10
$\{631\}=$	−7	+10	−4	+15	−8	−4	−4	+4	−10	−1	−11	+20	+11	−20
$\{62^2\}=$	−8	+5	−2	+6	*	−8	−2	+2	−4	+10	−2	−6	+10	−10
$\{621^2\}=$	+18	−15	+4	−15	+6	+15	−6	−4	+11	−9	+4	−6	−12	+30
$\{61^4\}=$	−5	+5	−1	+4	−2	−4	+4	+1	−3	+3	−1	+2	+1	−10
$\{5^2\}=$	−15	+10	+5	−15	+5	+10	−5	−5	+10	−5	+5	−5	−5	+5
$\{541\}=$	+23	−15	−5	+18	−8	−7	−4	+11	−31	+20	−11	+20	+11	−20
$\{532\}=$	+10	−15	−5	+15	−4	−19	+20	+5	−3	−1	−12	+4	+20	−20
$\{531^2\}=$	−12	+10	+5	−19	+10	+15	−6	−5	+13	−9	+12	−22	−12	+30
$\{52^21\}=$	−1	+10	+5	−17	+4	+18	−18	−5	+12	−9	+5	+2	−21	+30
$\{521^3\}=$	+1	−5	−5	+19	−8	−19	+16	+5	−14	+12	−5	+8	+13	−40
$\{51^5\}=$			1	−4	+2	+4	−4	−1	+3	−3	+1	−2	−1	+10
$\{4^22\}=$	+4	+5	*	−6	+10	+4	−14	+6	−12	+10	−6	+2	+10	−10
$\{4^21^2\}=$	−8	+5	*	+1	−1	−3	+9	−6	+17	−15	+6	−11	−6	+15
$\{43^2\}=$	−8	+5	*	−3	−4	+13	−2	+3	+1	−11	−10	+10	+10	−10
$\{4321\}=$	*	−5	*	+7	−8	−15	+12	−12	+21	+3	+26	−28	−42	+60
$\{431^3\}=$	+5	−5	*	−1	*	+5	−8	+6	−16	+12	−13	+24	+13	−40
$\{42^3\}=$	*	−5	*	+2	−4	*	+10	−2	+4	−10	+2	+6	−10	+10
$\{42^21^2\}=$	−1	+5	*	−4	+8	+3	−12	+9	−23	+18	−9	+4	+33	−60
$\{421^4\}=$				1	−2	−1	+4	−6	+17	−15	+6	−10	−14	+50
$\{41^6\}=$								1	−3	+3	−1	+2	+1	−10
$\{3^31\}=$	+5	−5	*	*	+4	−7	+2	*	−4	+11	+7	−10	−7	+10
$\{3^22^2\}=$	−1	+5	*	*	+2	+3	−9	*	−7	+6	+7	+1	−15	+15
$\{3^221^2\}=$	−3	+5	*	*	−4	+6	*	*	+9	−24	−21	+28	+33	−60
$\{3^21^4\}=$					1	−2	+2	*	−1	+5	+7	−13	−7	+25
$\{32^31\}=$	1	−5	*	*	*	−3	+8	*	+5	−2	−7	−8	+31	−40
$\{32^21^3\}=$						1	−4	*	−5	+12	+14	−12	−46	+100
$\{321^5\}=$									1	−3	−7	+12	+15	−60
$\{31^7\}=$											1	−2	−1	+10
$\{2^5\}=$		1	*	*	*	*	−2	*	*	+2	*	−2	+2	−2
$\{2^41^2\}=$							1	*	*	−4	*	+9	−16	+25
$\{2^31^4\}=$										1	*	−6	+20	−50
$\{2^21^6\}=$												1	−8	+35
$\{21^8\}=$													1	−10
$\{1^{10}\}=$														1

VI. Cherchons maintenant les moyens généraux de faire un fonction des racines, de laquelle il soit vrai en un certain sens qu'elle égale telle de ces racines qu'on voudra.

Je dis d'abord que la fonction

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{n}\Big[a + b + c + \&c. &+ \sqrt[n]{(a + r'b + r''c + r'''d + \ldots)^n} \\ &+ \sqrt[n]{(a + r'^2 b + r''^2 c + \ldots)^n} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \sqrt[n]{(a + r'^{n-1} b + r''^{n-1} c + \ldots)^n}\Big]\end{aligned}$$

égale ou a, ou b, ou c, ou d, &c. indifféremment, en supposant les puissances n développées, & que r', r'', r''' &c. sont les valeurs qui résolvent concurremment avec l'unité l'équation $r^n = 1$.

Les exemples mettront cette proposition dans tout son jour. Ajoutons seulement que lorsque n est un nombre premier $2m + 1$, pour obtenir les valeurs rigoureuses de r en supposant

$r^n - 1 = r^{2m+1} - 1 = 0 = (r - 1)(r^2 + x'r + 1)(r^2 + x''r + 1)(r^2 + x'''r + 1)\ldots$

on a l'équation

$$\left.\begin{aligned} &x^m - x^{m-1} + \overline{m-2}\,x^{m-3} - \frac{\overline{m-3}.\overline{m-4}}{1.2}x^{m-5} + \&c. \\ &- \overline{m-1}\,x^{m-2} + \frac{\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2}x^{m-4} - \frac{\overline{m-3}.\overline{m-4}.\overline{m-5}}{1.2.3}x^{m-6}\end{aligned}\right\} = 0,$$

dont les racines sont x', x'', x''' &c. & qui est toujours facile à résoudre, comme on le verra ci-après par le calcul du cas où $m = 5$. Si n n'est pas un nombre premier, les simplifications sont encore plus grandes, & s'offrent sans peine.

$$F\begin{pmatrix} a1, a2\ldots a\nu\ldots an \\ \mathrm{a}1, \mathrm{a}2\ldots \mathrm{a}\nu\ldots \mathrm{a}n\end{pmatrix} = \ldots +$$

$$\frac{\overline{\nu+1}.\overline{N+1}.\overline{N+2}.\overline{N+3}\ldots N}{(1.2.3\ldots\alpha 1)(1.2.3\ldots\alpha 2)\ldots(1.2.3\ldots\alpha\nu)}\,F\begin{pmatrix} \overline{a1-\alpha 1}, \overline{a2-\alpha 2}, \ldots \overline{a\nu-\alpha\nu}, a\overline{\nu+1}, a\overline{\nu+2}\ldots an \\ \mathrm{a}1, \quad \mathrm{a}2, \quad \ldots \overline{\mathrm{a}\nu-1}, \mathrm{a}\overline{\nu+1}, \mathrm{a}\overline{\nu+2}\ldots \mathrm{a}n\end{pmatrix} + \ldots$$

formule d'où l'on tirera n équations en donnant à ν successivement pour valeur les nombres 1, 2, 3.... n; le second membre de chacune de ces équations étant la somme d'autant de termes que le terme quelconque en peut fournir en prenant pour $\alpha 1, \alpha 2\ldots\alpha\nu$, ou zéro ou des nombres entiers positifs, tels que $N >$ ou au plus $= 0$.

En considérant cette formule comme une équation aux différences finies à plusieurs variables, dans laquelle la différence de chaque variable soit égale à l'unité, je parviens à intégrer & à satisfaire aux conditions, par un procédé particulier dont je me propose de rendre compte dans l'un des volumes suivans.

Les applications au ſecond & au troiſième degré ſe trouve ci-deſſus: paſſons au quatrième.

VII. Comme $r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1)$, les racines $r^4 = 1$ ſont $1, -1 = r', \sqrt{-1} = r'', -\sqrt{-1} = r'''$ & il faut prouver que

$$\tfrac{1}{4}[a + b + c + d + \sqrt[4]{(a - b + c\sqrt{-1} - d\sqrt{-1})} \\ + \sqrt[4]{(a+b-c-d)^4} \\ + \sqrt[4]{(a - b - c\sqrt{-1} + d\sqrt{-1})^4}]$$

égale indifféremment ou a, ou b, ou c, ou d, en ſuppoſant carrés-carrés développés: mais cela poſé, l'expreſſion indiqu renferme les quatre valeurs ſuivantes:

$$\tfrac{1}{4}[a+b+c+d+\quad(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})+(a+b-c-d)+\quad(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})]$$
$$\tfrac{1}{4}[a+b+c+d-\quad(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})+(a+b-c-d)-\quad(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})]$$
$$\tfrac{1}{4}[a+b+c+d+\sqrt{-1}(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})-(a+b-c-d)-\sqrt{-1}(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})]$$
$$\tfrac{1}{4}[a+b+c+d-\sqrt{-1}(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})-(a+b-c-d)+\sqrt{-1}(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})]$$

Donc, &c.

VIII. $r^5 - 1 = (r - 1)(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1$

Or ſi l'on avoit les quatre équations,

$$1 + r' + r'' + r''' + r^{\text{IV}} = 0,$$
$$r'r'' = 1, \qquad r'''r^{\text{IV}} = 1,$$
$$r''r''' = r';$$

d'où l'on déduit

$$r'r''' = r^{\text{IV}}, \quad r''r^{\text{IV}} = r''',$$
$$r'r^{\text{IV}} = r'',$$
$$r'^2 = r''', \quad r''^2 = r^{\text{IV}}, \quad r'''^2 = r'', \quad r^{\text{IV}2} = r', \text{ \&c.}$$

on trouveroit pour déterminer ou r', ou r'', ou r''', ou r^{IV}, r éta l'une quelconque de ces quatre quantités, l'équation

$$r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0.$$

Donc les valeurs qui réſolvent concurremment avec l'unité l'équ tion $r^5 = 1$ & qui ſont r', r'', r''', & r^{IV}, ſatisfont aux qua équations que j'avois d'abord ſuppoſées & à celles qui s'en d duiſent; donc

$$\tfrac{1}{5}\Big[a + b + c + d + e + \sqrt[5]{(a + r' b + r'' c + r''' d + r^{IV} e)^5}$$
$$+ \sqrt[5]{(a + r''' b + r^{IV} c + r'' d + r' e)^5}$$
$$+ \sqrt[5]{(a + r^{IV} b + r''' c + r' d + r'' e)^5}$$
$$+ \sqrt[5]{(a + r'' b + r' c + r^{IV} d + r''' e)^5}\Big]$$

en ſuppoſant les cinquièmes puiſſances développées, renferme les cinq valeurs

$$\tfrac{1}{5}[a+b+c+d+e$$
$$+ (a+r'b+r''c+r'''d+r^{IV}e) + (a+r'''b+r^{IV}c+r''d+r'e) + (a+r^{IV}b+r'''c+r'd+r''e) + (a+r''b+r'c+r^{IV}d$$

$$\tfrac{1}{5}[a+b+c+d+e$$
$$+ r'(a+r'b+r''c+r'''d+r^{IV}e) + r'''(a+r'''b+r^{IV}c+r''d+r'e) + r^{IV}(a+r^{IV}b+r'''c+r'd+r''e) + r''(a+r''b+r'c+r^{IV}d$$

$$\tfrac{1}{5}[a+b+c+d+e$$
$$+ r''(a+r'b+r''c+r'''d+r^{IV}e) + r^{IV}(a+r'''b+r^{IV}c+r''d+r'e) + r'''(a+r^{IV}b+r'''c+r'd+r''e) + r'(a+r''b+r'c+r^{IV}d$$

$$\tfrac{1}{5}[a+b+c+d+e$$
$$+ r'''(a+r'b+r''c+r'''d+r^{IV}e) + r''(a+r'''b+r^{IV}c+r''d+r'e) + r'(a+r^{IV}b+r'''c+r'd+r''e) + r^{IV}(a+r''b+r'c+r^{IV}d$$

$$\tfrac{1}{5}[a+b+c+d+e$$
$$+ r^{IV}(a+r'b+r''c+r'''d+r^{IV}e) + r'(a+r'''b+r^{IV}c+r''d+r'e) + r''(a+r^{IV}b+r'''c+r'd+r''e) + r'''(a+r''b+r'c+r^{IV}d$$

Les cinquièmes puiſſances indiquées ſont faciles à exécuter au moyen du ſyſtème d'équations entre le produit de deux quelconques des valeurs de r, & une troiſième, tel qu'il eſt ci-deſſus ; mais il faut obſerver que les mêmes lettres continuant d'indiquer les mêmes nombres, & les trois équations

$$1 + r' + r'' + r''' + r^{IV} = 0, \quad r'r'' = 1, \quad r'''r^{IV} = 1,$$

ayant lieu, on pourroit, à cauſe de l'ambiguité de ces nombres, ſuppoſer $r'' r''' = r^{IV}$; d'où l'on déduiroit

$r' r''' = r''$, $r' r^{IV} = r'''$, $r'' r^{IV} = r'$, $r'^2 = r^{IV}$, $r''^2 = r'''$, $r'''^2 = r'$, $r^{IV\,2} = r''$; ſecond ſyſtème d'équations qui eſt vrai, ainſi que le premier, ſans l'être en même temps, & duquel on concluroit les mêmes choſes que ci-deſſus, quoique dans le développement des cinquièmes puiſſances, il conduiſe à d'autres valeurs.

IX. Comme $r^6 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + r + 1)(r^2 - r + 1)$, les ſix valeurs de r dans l'équation $r^6 = 1$ ſont

$1, -1, \rho', \rho'', -\rho', -\rho''$; ρ' & ρ'' étant les valeurs qui résolvent concurremment avec l'unité l'équation $\rho^3 = 1$, ce qui (*art. III*) donne $\rho' + \rho'' = -1$, $\rho'\rho'' = 1$, $\rho'^2 = \rho''$, $\rho''^2 = \rho'$; &c. & il faut prouver que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}[a+b+c+d+e+f &+ \sqrt[6]{(a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f)^6} \\ &+ \sqrt[6]{(a+b+\rho''c+\rho''d+\rho'e+\rho'f)^6} \\ &+ \sqrt[6]{(a-b+c-d+e-f)^6} \\ &+ \sqrt[6]{(a+b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f)^6} \\ &+ \sqrt[6]{(a-b+\rho''c-\rho''d+\rho'e-\rho''f)^6}]\end{aligned}$$

égale indifféremment ou a, ou b, ou c, ou d, ou e, ou f, en supposant les sixièmes puissances développées : mais alors la fonction renferme les six valeurs

$$\tfrac{1}{6}[a+b+c+d+e+f \left.\begin{matrix}+\\-\\+\rho'\\-\rho'\\+\rho''\\-\rho''\end{matrix}\right\}(a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f)$$

$$\left.\begin{matrix}+\\+\\+\rho''\\+\rho''\\+\rho'\\+\rho'\end{matrix}\right\}(a+b+\rho''c+\rho''d+\rho'e+\rho'f) \left.\begin{matrix}+\\-\\+\\-\\+\\-\end{matrix}\right\}(a-b+c-d+e-f)$$

$$\left.\begin{matrix}+\\+\\+\rho'\\+\rho'\\+\rho''\\+\rho''\end{matrix}\right\}(a+b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f) \left.\begin{matrix}+\\-\\+\rho''\\-\rho''\\+\rho'\\-\rho'\end{matrix}\right\}(a-b+\rho''c-\rho''d+\rho'e-\rho'f)] = \left\{\begin{matrix}a\\b\\c\\f\\e\\d\end{matrix}\right.$$

donc, &c.

X. $r^7 - 1 = (r-1)(r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$; or si l'on avoit les six équations

$$1 + r' + r'' + r''' + r^{\text{IV}} + r^{\text{V}} + r^{\text{VI}} = 0,$$

$$r'r'' = 1, \quad r'''r^{\text{IV}} = 1, \quad r^{\text{V}}r^{\text{VI}} = 1,$$

$$r''r''' = r', \quad r^{\text{IV}}r^{\text{V}} = r';$$

d'où l'on déduit

$$r'r''' = r^{\text{V}};\quad r''r^{\text{IV}} = r^{\text{VI}},\quad r'''r^{\text{V}} = r^{\text{IV}},\quad r^{\text{IV}}r^{\text{VI}} = r''',$$
$$r'r^{\text{IV}} = r'',\quad r''r^{\text{V}} = r''',\quad r'''r^{\text{VI}} = r'';$$
$$r'r^{\text{V}} = r^{\text{VI}},\quad r''r^{\text{VI}} = r^{\text{V}},$$
$$r'r^{\text{VI}} = r^{\text{IV}},$$

$$r'^2 = r''',\quad r''^2 = r^{\text{IV}},\quad r'''^2 = r^{\text{VI}},$$
$$r^{\text{IV}2} = r^{\text{V}},\quad r^{\text{V}2} = r'';\quad r^{\text{VI}2} = r',\ \&c.$$

on trouveroit $r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$; r étant l'une quelconque des six quantités : donc les valeurs imaginaires de $\sqrt[7]{1}$ satisfont à toutes ces équations; donc

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{7}[a+b+c+d+e+f+g &+ \sqrt[7]{(a+r'b+r''c+r'''d+r^{\text{IV}}e+r^{\text{V}}f+r^{\text{VI}}g)^7}\\ &+ \sqrt[7]{(a+r'''b+r^{\text{IV}}c+r^{\text{VI}}d+r^{\text{V}}e+r''f+r'g)^7}\\ &+ \sqrt[7]{(a+r^{\text{V}}b+r^{\text{VI}}c+r''d+r'e+r'''f+r^{\text{IV}}g)^7}\\ &+ \sqrt[7]{(a+r^{\text{VI}}b+r^{\text{V}}c+r'd+r''e+r^{\text{IV}}f+r'''g)^7}\\ &+ \sqrt[7]{(a+r^{\text{IV}}b+r'''c+r^{\text{V}}d+r^{\text{VI}}e+r'f+r''g)^7}\\ &+ \sqrt[7]{(a+r''b+r'c+r^{\text{IV}}d+r'''e+r^{\text{VI}}f+r^{\text{V}}g)^7}]\end{aligned}$$

en supposant les septièmes puissances développées, renferme les sept valeurs

$$\tfrac{1}{7}[a+b+c+d+e+f+g \quad \left.\begin{matrix}+\\+r'\\+r''\\+r'''\\+r^{\text{IV}}\\+r^{\text{V}}\\+r^{\text{VI}}\end{matrix}\right\}(a+r'b+r''c+r'''d+r^{\text{IV}}e+r^{\text{V}}f+r^{\text{VI}}g)$$

$$\left.\begin{matrix}+\\+r'''\\+r^{\text{IV}}\\+r^{\text{VI}}\\+r^{\text{V}}\\+r''\\+r'\end{matrix}\right\}(a+r'''b+r^{\text{IV}}c+r^{\text{VI}}d+r^{\text{V}}e+r''f+r'g)\quad \left.\begin{matrix}+\\+r^{\text{V}}\\+r^{\text{VI}}\\+r''\\+r'\\+r'''\\+r^{\text{IV}}\end{matrix}\right\}(a+r^{\text{V}}b+r^{\text{VI}}c+r''d+r'e+r'''f+r^{\text{IV}}g)$$

$$\left.\begin{matrix} + \\ + r^{VI} \\ + r^{V} \\ + r' \\ + r'' \\ + r^{IV} \\ + r''' \end{matrix}\right\}(a + r^{VI}b + r^{V}c + r'd + r''e + r^{IV}f + r'''g) \left.\begin{matrix} + \\ + r^{IV} \\ + r''' \\ + r^{V} \\ + r^{VI} \\ + r' \\ + r'' \end{matrix}\right\}(a + r^{IV}b + r'''c + r^{V}d + r^{VI}e + r'f + r''g)$$

$$\left.\begin{matrix} + \\ + r'' \\ + r' \\ + r^{IV} \\ + r''' \\ + r^{VI} \\ + r^{V} \end{matrix}\right\}(a + r''b + r'c + r^{IV}d + r'''e + r^{VI}f + r^{V}g)] = \left\{\begin{matrix} a \\ c \\ b \\ e \\ d \\ g \\ f \end{matrix}\right.$$

XI. Ce procedé eſt uniforme; & pour un nombre premier n quelconque, $r', r'', r'''\ldots$ étant les valeurs imaginaires de $\sqrt[n]{1}$, on aura toujours un ſyſtème d'équations analogue aux précédens, en ſuppoſant les $(n - 1)$ équations

$$1 + r' + r'' + r''' + \ldots = 0,$$

$$r'r'' = 1, \quad r'''r^{IV} = 1, \quad r^{V}r^{VI} = 1, \quad r^{VII}r^{VIII} = 1, \&c.$$

$$r''r''' = r', \quad r^{IV}r^{V} = r', \quad r^{VI}r^{VII} = r', \&c.$$

qui donneront toutes les autres. Ce ſyſtème ſuffira pour élever ſans embarras les puiſſances indiquées, & ſatisfaire par conſéquent à l'objet qui nous occupe ici, puiſque les valeurs rigoureuſes de toutes les racines de l'unité ſont faciles à obtenir ſucceſſivement, comme on le verra.

XII. Il y a, lorſque n n'eſt pas un nombre premier, des ſimplifications dans la forme générale ci-deſſus, qui ſe préſentent au premier coup-d'œil; par exemple,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}[a + b + c + d \quad & + \sqrt[4]{(a - b + c\sqrt{-1} - d\sqrt{-1})^4} \\ & + \sqrt{(a + b - c - d)^2} \\ & + \sqrt[4]{(a - b - c\sqrt{-1} + d\sqrt{-1})^4}] \end{aligned}$$

renferme les quatre valeurs de l'*article VII*.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}\big[a+b+c+d+e+f &+ \sqrt[6]{(a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f)^6}\\ &+ \sqrt[3]{(a+b+\rho''c+\rho''d+\rho'e+\rho'f)^3}\\ &+ \sqrt{(a-b+c-d+e-f)^2}\\ &+ \sqrt[3]{(a+b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f)^3}\\ &+ \sqrt[6]{(a-b+\rho''c-\rho''d+\rho'e-\rho'f)^6}\big]\end{aligned}$$

renferme les ſix valeurs de l'*article IX;* &c.

Mais il exiſte encore pour ces cas, des formes particulières plus ſimples.

XIII. On peut, par exemple, faire une quantité qui ait indifféremment l'une de quatre valeurs déterminées, ſans élever d'autres puiſſances que des carrés, & par conſéquent ſans employer d'imaginaires, car

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\big[a+b+c+d &+ \sqrt{(a+b-c-d)^2}\\ &+ \sqrt{(a+c-b-d)^2}\\ &+ \sqrt{(a+d-b-c)^2}\big]\end{aligned}$$

renferme les quatre valeurs

$$\tfrac{1}{4}\big[a+b+c+d \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\-\end{matrix}\right\}(a+b-c-d) \left.\begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix}\right\}(a+c-b-d) \left.\begin{matrix}+\\-\\-\\+\end{matrix}\right\}(a+d-b-c)\big] = \left\{\begin{matrix}a.\\b.\\c.\\d.\end{matrix}\right.$$

XIV. On peut faire une quantité qui ſoit indifféremment l'une de ſix, ſans élever d'autres puiſſances que cinq différens cubes; car ρ' & ρ'' étant les valeurs imaginaires de $\sqrt[3]{1}$.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}\big[a+b+c+d+e+f &+ \sqrt[3]{(a+b+\rho'\overline{c+d}+\rho''\overline{e+f})^3}\\ &+ \sqrt[3]{(a+c+\rho'\overline{b+e}+\rho''\overline{d+f})^3}\\ &+ \sqrt[3]{(a+d+\rho'\overline{b+f}+\rho''\overline{c+e})^3}\\ &+ \sqrt[3]{(a+e+\rho'\overline{c+f}+\rho''\overline{b+d})^3}\\ &+ \sqrt[3]{(a+f+\rho'\overline{d+e}+\rho''\overline{b+c})^3}\big]\end{aligned}$$

renferme les ſix valeurs

$$\tfrac{1}{6}\Big[a+b+c+d+e+f \left.\begin{matrix}+\\+\\+\rho''\\+\rho''\\+\rho'\\+\rho'\end{matrix}\right\}(a+b+\rho'\overline{c+d}+\rho''\overline{e+f})$$

$$\left.\begin{matrix}+\\+\rho''\\+\\+\rho'\\+\rho''\\+\rho'\end{matrix}\right\}(a+e+\rho'\overline{b+c}+\rho''\overline{d+f}) \left.\begin{matrix}+\\+\rho''\\+\rho'\\+\\+\rho'\\+\rho''\end{matrix}\right\}(a+d+\rho'\overline{b+f}+\rho''\overline{c+e})$$

$$\left.\begin{matrix}+\\+\rho'\\+\rho''\\+\rho'\\+\\+\rho''\end{matrix}\right\}(a+e+\rho'\overline{c+f}+\rho''\overline{b+d}) \left.\begin{matrix}+\\+\rho'\\+\rho'\\+\rho''\\+\rho''\\+\end{matrix}\right\}(a+f+\rho'\overline{d+e}+\rho''\overline{b+c})\Big] = \left\{\begin{matrix}a.\\b.\\c.\\d.\\e.\\f.\end{matrix}\right.$$

XV. Veut-on ſavoir ſi, ſans élever d'autres puiſſances que cinq différens carrés, l'on pourroit faire encore une quantité qui fût indifféremment l'une de ſix? voici le moyen de s'en aſſurer.

Il faut que chaque lettre, excepté a, ſe trouve dans la ſomme des quantités radicales, deux fois en plus & trois fois en moins, pour ſatisfaire au cas où tous les radicaux auront le ſigne $+$ comme ici

$$\tfrac{1}{6}[a+b+c+d+e+f+(a+b+c-d-e-f)$$
$$+(a+b+d-c-e-f)+(a+c+f-b-d-e)$$
$$+(a+d+e-b-c-f)+(a+e+f-b-c-d)]=a;$$

mais quand on diſpoſera les ſignes $+$ & $-$ au-devant des radicaux, de la manière qu'il faudra pour avoir dans tous, $+1$ pour coëfficient d'une des lettres autre que a, il faudra que les coëfficiens $+1$ & -1 continuent de ſe mi-partir pour toutes les autres lettres, dont la ſomme doit être zéro; il faut donc que deux lettres quelconques ne ſoient pas trois fois de même ſigne dans les cinq quantités radicales: or ces conditions ſont impoſſibles à remplir.

Au reste, ce qui est impossible si l'on veut se borner à cinq carrés, n'a rien que de facile si on en éleve dix, car

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{12}[&2(a+b+c+d+e+f) + \sqrt{(a+b+c-d-e-f)^2}\\ &+\sqrt{(a+b+d-c-e-f)^2} + \sqrt{(a+b+e-c-d-f)^2}\\ &+\sqrt{(a+b+f-c-d-e)^2} + \sqrt{(a+c+d-b-e-f)^2}\\ &+\sqrt{(a+c+e-b-d-f)^2} + \sqrt{(a+c+f-b-d-e)^2}\\ &+\sqrt{(a+d+e-b-c-f)^2} + \sqrt{(a+d+f-b-c-e)^2}\\ &+\sqrt{(a+e+f-b-c-d)^2}]\end{aligned}$$

renferme les six valeurs a, b, c, d, e, f.

XVI. On peut faire une quantité qui ait indifféremment l'une de huit valeurs déterminées, sans élever d'autres puissances que sept différens carrés, car

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{8}[a+b+c+d+e+f+g+h &+\sqrt{(a+b+c+d-e-f-g-h)^2}\\ &+\sqrt{(a+b+e+f-c-d-g-h)^2}\\ &+\sqrt{(a+b+g+h-c-d-e-f)^2}\\ &+\sqrt{(a+c+e+h-b-d-f-g)^2}\\ &+\sqrt{(a+c+f+g-b-d-e-h)^2}\\ &+\sqrt{(a+d+e+g-b-c-f-h)^2}\\ &+\sqrt{(a+d+f+h-b-c-e-g)^2}]\end{aligned}$$

renferme les huit valeurs a, b, c, d, e, f, g, h.

XVII. On peut faire une quantité qui soit indifféremment l'une de neuf, sans élever d'autres puissances que huit différens cubes, car ρ' & ρ'' étant les valeurs imaginaires de $\sqrt[3]{1}$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{9}[&a+b+c+d+e+f+g+h+k\\ &+\sqrt[3]{(a+b+c+\rho'\overline{d+e+f}+\rho''\overline{g+h+k})^3}\\ &+\sqrt[3]{(a+b+c+\rho'\overline{g+h+k}+\rho''\overline{d+e+f})^3}\\ &+\sqrt[3]{(a+d+g+\rho'\overline{b+f+k}+\rho''\overline{c+e+h})^3}\\ &+\sqrt[3]{(a+d+g+\rho'\overline{c+e+h}+\rho''\overline{b+f+k})^3}\\ &+\sqrt[3]{(a+f+h+\rho'\overline{b+e+g}+\rho''\overline{c+d+k})^3}\\ &+\sqrt[3]{(a+f+h+\rho'\overline{c+d+k}+\rho''\overline{b+e+g})^3}\\ &+\sqrt[3]{(a+e+k+\rho'\overline{c+f+g}+\rho''\overline{b+d+h})^3}\\ &+\sqrt[3]{(a+e+k+\rho'\overline{b+d+h}+\rho''\overline{c+f+g})^3}]\end{aligned}$$

renferme les neuf valeurs $a, b, c, d, e, f, g, h, k$.

XVIII. En général, on trouvera toujours les formes de cette eſpèce, en prenant dans la première, ſimplifiée comme dans l'*article XII,* les radicaux de même dénomination, en y échangeant les lettres entre elles de toutes les manières, puis faiſant une ſomme de tous ces réſultats; car chaque forme élémentaire ſe compoſe toujours de cette ſomme, & ſouvent, de différentes portions de cette ſomme.

Les modifications qui paroiſſent multiplier le nombre de formes des racines, ne ſont que des complications des formes élémentaires; comme lorſque l'on prend deux ou pluſieurs termes de la racine, & qu'on élève leur ſomme à une certaine puiſſance, pour la mettre enſuite ſous le radical de même expoſant que cette puiſſance; lorſqu'on fait le produit de deux termes, pour le diviſer enſuite par l'un d'eux, &c. &c. & je dis que pour le quatrième degré par exemple, il n'y a de formes eſſentiellement différentes, que les deux des *articles VII* ou *XII* & *XIII;* que pour le ſixième, il n'y a que les trois des *articles IX* ou *XII, XIV* & *XV,* &c. car la différence eſſentielle eſt dans le degré des radicaux néceſſaires.

Sans entrer dans de plus longues diſcuſſions à ce ſujet, parce que l'objet des formes particulières eſt moins de faciliter les ſolutions générales, que d'en ſimplifier les réſultats, nous nous contenterons de remarquer qu'au moyen de tout ce qui précède, notre queſtion principale ſe trouve réduite au ſecond des trois chefs que nous y avions diſtingués *(article IV)*; c'eſt-à-dire à transformer en fonction de *types (article V)* la quantité de laquelle on peut dire qu'elle égale telle des racines que l'on voudra.

Reprenons un inſtant le troiſième degré.

XIX. On a vu *(articles III & V)* que la quantité qui eſt indifféremment ou a, ou b, ou c, ſe préſente immédiatement ſous la forme

$$\tfrac{1}{3}\Big[(A)+\sqrt[3]{\big((A^3)-\tfrac{3}{2}(A^2B)+6(ABC)+\tfrac{3}{2}(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}\big)}$$
$$+\sqrt[3]{\big((A^3)-\tfrac{3}{2}(A^2B)+6(ABC)-\tfrac{3}{2}(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}\big)}\Big],$$

& que pour avoir le tout en fonction de *types*, il ne s'agit que de prendre, au lieu de

$$(a-b)\ (a-c)\ (b-c),$$

la racine

la racine de ſon carré

$$(A^4B^2) - 2(A^4BC) - 2(A^3B^3) + 2(A^3B^2C) - 6(A^2B^2C^2).$$

Les Tables de l'article V donnent le ſurplus, & l'équation propoſée étant

$$Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$$

ſi l'on fait

$$\left.\begin{matrix}\Delta' \\ \Delta''\end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\,[-2N^3 + 3^2 MNP - 3^3 M^2Q$$

$$\left.\begin{matrix}+ \\ -\end{matrix}\right\} 3M\sqrt{-3(N^2P^2 - 2^2MP^3 - 2^2N^3Q + 2.3^2MNPQ - 3^3M^2Q^2)}],$$

la formule de réſolution ſera

$$x = \frac{1}{3M}\left[-N \left.\begin{matrix} + \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\end{matrix}\right\}\Delta' \left.\begin{matrix} + \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\end{matrix}\right\}\Delta''\right]$$

formule connue & la plus ſimple poſſible, comme le prouvent les obſervations ſuivantes.

XX. On doit toujours pouvoir diſtinguer les différentes racines l'une de l'autre, dans la valeur générale qui les renferme toutes, uniquement en y multipliant chaque radical par les différentes racines de l'unité, de même expoſant que ce radical; d'où il ſuit que la formule générale du troiſième degré ne peut pas ne renfermer que des radicaux ſeconds : l'addition des radicaux dans la ſomme des valeurs qui réſolvent concurremment doit donner zéro; ainſi il y faut des radicaux troiſièmes.

Il faut que dans chaque radical tout ſoit zéro quand $a = b = c$ puiſqu'alors on doit trouver $x = \frac{1}{3}(A) = -\frac{N}{3M}$ ſans aucune ambiguïté.

Il faut que a^3, b^3 & c^3 y aient le même coëfficient, puiſque a^3 par exemple, eſt de la même difficulté que a à obtenir en *types*..... &c.

Comme toutes ces conditions exigent que l'on ait ſous les radicaux, les nombres imaginaires dont le cube eſt 1, on voit qu'il eſt impoſſible d'éviter dans la ſolution du troiſième degré, ce qu'on appelle le *cas irréductible.*

Il ſera facile d'étendre & de généraliſer ces remarques.

XXI. Nous avons prouvé *(article XIII)* que

$$\tfrac{1}{4}[(A) + \sqrt{(a+b-c-d)^2} + \sqrt{(a+c-b-d)^2} + \sqrt{(a+d-b-c)^2}]$$

renferme les quatre valeurs a, b, c, d, ſi l'on y ſuppoſe les carrés développés. Ces carrés ſont, ſavoir,

$$\left.\begin{matrix}(a+b-c-d)^2\\(a+c-b-d)^2\\(a+d-b-c)^2\end{matrix}\right\} = (A^2) - 2\,(AB) + 4\left\{\begin{matrix}ab+cd\\ac+bd\\ad+bc\end{matrix}\right.$$

$$= (A^2) - \tfrac{2}{3}\,(AB) + \tfrac{4}{3}\left\{\begin{matrix}2(ab+cd)-(ac+bd)-(ad+bc),\\2(ac+bd)-(ad+bc)-(ab+cd),\\2(ad+bc)-(ab+cd)-(ac+bd),\end{matrix}\right.$$

En échangeant les lettres entre elles, de toutes les manières poſſibles; dans

$$2\,(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc)$$

on ne trouve que les trois valeurs

$$\begin{aligned}2(ab+cd)-(ac+bd)-(ad+bc)&=u'\\2(ac+bd)-(ad+bc)-(ab+cd)&=u''\\2(ad+bc)-(ab+cd)-(ac+bd)&=u''';\end{aligned}$$

mais par l'article III

$$\sqrt[3]{(ab+cd+r'\overline{ac+bd}+r''\overline{ad+bc})^3}$$

$$+\sqrt[3]{(ab+cd+r''\overline{ac+bd}+r'\overline{ad+bc})^3},$$

en y ſuppoſant les cubes développés, ſera indifféremment ou u', ou u'', ou u'''. Le premier de ces cubes eſt

$$(A^3B^3) - \tfrac{3}{2}(A^3B^2C) + 6(A^3BCD) + 6(A^2B^2C^2) - 3(A^2B^2CD)$$
$$+ \tfrac{3}{2}(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\sqrt{-3};$$

l'autre n'en diffère que parce que $\sqrt{-3}$ y eſt en moins: or comme le carré du produit des différences entre les racines eſt une fonction de *types*, la ſolution ne dépend plus que des propoſitions de l'article V.

L'équation propoſée étant

$$Mx^4 + Nx^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

&

$$\left.\begin{matrix}\Delta'\\ \Delta''\end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\Big(2P^3 - 3^2NPQ + 3^3MQ^2 + 3^3N^2R - 2^3 3^2 MPR$$

$$\left.\begin{matrix}+\\ -\end{matrix}\right\} 3\sqrt{-3}\left[\begin{matrix} N^2P^2Q^2 & -2^2N^2P^3R & -3^3N^4R^2 \\ -2^2MP^3Q^2 & +2^4MP^4R & +2^4 3^2 MN^2PR^2 \\ -2^2N^3Q^3 & +2.3^2N^3PQR & -2^7M^2P^2R^2 \\ +2.3^2MNPQ^3 & -2^4 5 MNP^2QR & -2^6 3 M^2NQR^2 \\ -3^3M^2Q^4 & -2.3MN^2Q^2R & +2^8M^3R^3 \\ & +2^4 3^2 M^2PQ^2R & \end{matrix}\right]\Big)$$

$$\left.\begin{matrix}u'\\ u''\\ u'''\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} + \\ \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\end{matrix}\right\}\Delta' \left.\begin{matrix} + \\ \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} \\ \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\end{matrix}\right\}\Delta''$$

ou bien u', u'' & u''' étant les trois racines de l'équation

$$u^3 * + 3(-P^2 + 3NQ - 2^2 3 MR)u$$
$$+ (-2P^3 + 3^2NPQ - 3^3MQ^2 - 3^3N^2R + 2^3 3^2 MPR) = 0,$$

on a

$$x = \frac{1}{2^2M}\Big[-N \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\-\end{matrix}\right\} \sqrt{\tfrac{1}{3}(3N^2 - 2^3MP + 2^2Mu')}$$

$$\left.\begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix}\right\} \sqrt{\tfrac{1}{3}(3N^2 - 2^3MP + 2^2Mu'')} \left.\begin{matrix}+\\-\\-\\+\end{matrix}\right\} \sqrt{\tfrac{1}{3}(3N^2 - 2^3MP + 2^2Mu''')}\Big],$$

& ſi au lieu des deux derniers radicaux, on prend la racine du carré de leur ſomme, le tout ne dépendra que de u'.

XXII. Si nous prenons la forme de l'article XII, ſavoir,

$$\tfrac{1}{4}[(A) + \sqrt[4]{(a - b + c\sqrt{-1} - d\sqrt{-1})^4}$$
$$+ \sqrt{(a + b - c - d)^2} + \sqrt[4]{(a - b - c\sqrt{-1} + d\sqrt{-1})^4}]$$

nous aurons $(a + b - c - d)^2$ par l'article précédent; & quant aux deux quatrièmes puissances, si l'on fait

$$\Phi = 3^2(A^4) - 2^2 3(A^3B) - 2.37(A^2B^2)$$
$$+ 2^2 23(A^2BC) - 2^3 3.23(ABCD) - 2^2[3(A^2) - 2(AB)]u + 2^2 7u^2,$$

u ayant la même valeur que dans l'article précédent, on aura

$$\left.\begin{matrix}(a - b + c\sqrt{-1} - d\sqrt{-1})^4 \\ (a - b - c\sqrt{-1} + d\sqrt{-1})^4\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3^2}\Phi \left.\begin{matrix}+ \\ -\end{matrix}\right\} 2^2(a - b)(c - d)[(a - b)^2 - (c - d)^2]\sqrt{-1};$$

or faisant

$$\Psi = 2^2(A^2B^2) - 2^2(A^2BC) + 2^3 3(ABCD) - u^2$$

on a

$$[(a - b)(c - d)]^2 = \tfrac{1}{3}\Psi$$

$$[(a - b)^2 - (c - d)^2]^2 = \frac{1}{3^2}(\Phi + 2^2 3\Psi);$$

d'où, au moyen des propositions de l'article V, résulte la formule suivante, Φ & Ψ étant, savoir,

$$\Phi = 3^2N^4 - 2^4 3MN^2P - 2^5M^2P^2 + 2^5 3^2M^2NQ - 2^7 3^2M^3R$$
$$- 2^2M(3N^2 - 2^3MP)u + 2^2 7M^2u^2$$

$$\Psi = 2^2P^2 - 2^2 3NQ + 2^4 3MR - u^2$$

$$x = \frac{1}{2^2M}\Big[-N \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\-\end{matrix}\right\} \sqrt{\tfrac{1}{3}(3N^2 - 2^3MP + 2^2Mu)}$$

$$\left.\begin{matrix}+\\-\\-\sqrt{-1}\\+\sqrt{-1}\end{matrix}\right\} \sqrt[4]{\frac{1}{3^2}(\Phi + 2^2M\sqrt{-3\Psi(\Phi + 2^2 3M^2\Psi)})}$$

$$\left.\begin{matrix}+\\-\\+\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}\end{matrix}\right\} \sqrt[4]{\frac{1}{3^2}(\Phi - 2^2M\sqrt{-3\Psi(\Phi + 2^2 3M^2\Psi)})}\Big];$$

XXIII. Pour l'équation

$$r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0,$$

par exemple, qui renferme les valeurs imaginaires de $\sqrt[5]{1}$; on aura, par la première formule,

$$r = \tfrac{1}{4}\Big[-1 \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{5} \left.\begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{-5+2\sqrt{5}} \left.\begin{matrix}+\\-\\-\\+\end{matrix}\right\}\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\Big],$$

& par la ſeconde,

$$r = \tfrac{1}{4}\Big[-1 \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{5} \left.\begin{matrix}+\\-\\-\sqrt{-1}\\+\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\sqrt[4]{5(-3+4\sqrt{-1})} \left.\begin{matrix}+\\-\\+\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\sqrt[4]{5(-3-4\sqrt{-1})}\Big].$$

XXIV. Avant de paſſer au cinquième degré, il faut expliquer une nouvelle notation abrégée qui rendra nos expreſſions plus conciſes, & nous fournira des procédés de calcul plus expéditifs que ceux de l'algèbre. Cette notation convient à certaines quantités d'une forme ſyſtématique dans leſquelles ſe réſolvent celles que j'appelle *types*, & auxquelles ſe réduit toujours immédiatement la fonction qui eſt indifféremment telle des racines que l'on voudra.

J'appellerai *Types partiels*, les expreſſions abrégées de ces quantités. Ce ſont des ſuites de termes faiſant partie du développement d'un même *type*, dont la propriété fondamentale eſt que ſi, dans un certain échange entre les lettres, il réſulte d'un terme, un autre terme qui ſoit de la ſuite, il ne réſulte des autres, aucun terme qui n'y ſoit pas compris; de manière que cet échange n'y produiſe aucun changement: & qu'au contraire, s'il en réſulte un terme qui n'y ſoit pas compris, aucun des réſultans ne le ſoit.

Je ſuppoſe, par exemple,

$$[\underset{\text{II}}{\alpha}\underset{\text{III}}{\beta}\underset{\text{I}}{\gamma}] = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\alpha} c^{\beta} + a^{\beta} b^{\gamma} c^{\alpha},$$

c'eſt-à-dire que $[\underset{\text{II}}{\alpha}\underset{\text{III}}{\beta}\underset{\text{I}}{\gamma}]$ repréſente la ſomme de tous les termes différens que l'on peut former en conſervant toujours a, b & c, dans l'ordre alphabétique, prenant au premier terme pour expoſans reſpectifs de ces lettres, les nombres α, β & γ dans l'ordre même où ils ſont écrits, & concluant enſuite chaque terme, du précédent, en y empruntant les expoſans ſucceſſifs dans l'ordre qui ſuit, le *dernier*, le *premier*, le *ſecond*; ordre de ſucceſſion ſuffiſamment indiqué par celui des caractériſtiques I, II, III, dans l'expreſſion $[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}]$, & d'où l'on ne déduit ici que trois termes, puiſqu'en continuant toujours, on retomberoit dès le quatrième, ſur le premier.

Il ſuit de-là que

$$[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\beta}] = a^{\alpha} b^{\gamma} c^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} c^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\beta} c^{\alpha},$$

& que par conſéquent, en ne ſuppoſant dans le développement du *type* $(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma})$ que a, b & c, on a

$$(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}) = [\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}] + [\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\beta}].$$

Il eſt facile de conclure ſemblablement

$$[\underset{\mathrm{III}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\beta}\,\underset{\mathrm{II}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}] = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} + a^{\delta} b^{\gamma} c^{\alpha} d^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} c^{\delta} d^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\delta} c^{\beta} d^{\alpha}$$

$$[\underset{\mathrm{IV}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}\,\underset{\mathrm{II}}{\beta}\,\underset{\mathrm{III}}{\gamma}] = a^{\alpha} b^{\delta} c^{\beta} d^{\gamma} + a^{\delta} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\alpha} + a^{\beta} b^{\gamma} c^{\alpha} d^{\delta} + a^{\gamma} b^{\alpha} c^{\delta} d^{\beta}$$

$$[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}] = a^{\alpha} b^{\gamma} c^{\delta} d^{\beta} + a^{\delta} b^{\alpha} c^{\beta} d^{\gamma} + a^{\beta} b^{\delta} c^{\gamma} d^{\alpha} + a^{\gamma} b^{\beta} c^{\alpha} d^{\delta}$$

$$[\underset{\mathrm{III}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\beta}\,\underset{\mathrm{II}}{\delta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}] = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\delta} d^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\delta} c^{\alpha} d^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} c^{\gamma} d^{\delta} + a^{\delta} b^{\gamma} c^{\beta} d^{\alpha}$$

$$[\underset{\mathrm{IV}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{II}}{\beta}\,\underset{\mathrm{III}}{\delta}] = a^{\alpha} b^{\gamma} c^{\beta} d^{\delta} + a^{\gamma} b^{\beta} c^{\delta} d^{\alpha} + a^{\beta} b^{\delta} c^{\alpha} d^{\gamma} + a^{\delta} b^{\alpha} c^{\gamma} d^{\beta}$$

$$[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\delta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}] = a^{\alpha} b^{\delta} c^{\gamma} d^{\beta} + a^{\gamma} b^{\alpha} c^{\beta} d^{\delta} + a^{\beta} b^{\gamma} c^{\delta} d^{\alpha} + a^{\delta} b^{\beta} c^{\alpha} d^{\gamma}$$

d'où il ſuit qu'en ne ſuppoſant dans le développement du *type* $(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta})$ que a, b, c & d, on a

$$(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta}) = [\underset{\mathrm{III}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\beta}\,\underset{\mathrm{II}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}] + [\underset{\mathrm{IV}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}\,\underset{\mathrm{II}}{\beta}\,\underset{\mathrm{III}}{\gamma}] + [\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}]$$
$$+ [\underset{\mathrm{III}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\beta}\,\underset{\mathrm{II}}{\delta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}] + [\underset{\mathrm{IV}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{II}}{\beta}\,\underset{\mathrm{III}}{\delta}] + [\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\delta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}].$$

Il faut obſerver, avant d'aller plus loin, que dans les loix que j'ai priſes ici, j'avois une intention particulière. Les deux portions $[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}]$ & $[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\beta}]$ du *type* $(A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma})$ ſont telles qu'elles ne font que ſe convertir réciproquement l'une en l'autre par les échanges qu'on peut faire dans la valeur de chacune, entre les lettres a, b & c; j'ai de même assujetti à cette propriété les six portions dans lesquelles j'ai partagé $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$: ainsi, il faut, pour obtenir en *types* la quantité $[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}]$, faire une fonction qui ait indifféremment l'une de ces deux valeurs $[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}]$ & $[\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\beta}]$, & de même, pour obtenir en *types* la quantité $[\underset{\mathrm{III}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\beta}\,\underset{\mathrm{II}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}]$, il faut faire une fonction qui ait indifféremment l'une des six valeurs

$$[\underset{\mathrm{III}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\beta}\,\underset{\mathrm{II}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}],\quad [\underset{\mathrm{IV}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}\,\underset{\mathrm{II}}{\beta}\,\underset{\mathrm{III}}{\gamma}],\quad [\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}],$$
$$[\underset{\mathrm{III}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\beta}\,\underset{\mathrm{II}}{\delta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}],\quad [\underset{\mathrm{IV}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{II}}{\beta}\,\underset{\mathrm{III}}{\delta}]\ \&\ [\underset{\mathrm{II}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{IV}}{\delta}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}].$$

Ce n'est que pour satisfaire à cette vue particulière, qu'il a fallu partager le *type* $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$ en portions où les caractéristiques I, II, III & IV se trouvassent dans un ordre différent.

En suivant ce procédé, on aura

$$[\underset{\mathrm{V}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}\,\underset{\mathrm{IV}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{I}}{\delta}\,\underset{\mathrm{II}}{\varepsilon}] = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon + a^\delta b^\varepsilon c^\beta d^\gamma e^\alpha + a^\gamma b^\alpha c^\varepsilon d^\beta e^\delta$$
$$+ a^\beta b^\delta c^\alpha d^\varepsilon e^\gamma + a^\varepsilon b^\gamma c^\delta d^\alpha e^\beta$$

$$[\underset{\mathrm{V}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\varepsilon}\,\underset{\mathrm{IV}}{\delta}\,\underset{\mathrm{I}}{\beta}\,\underset{\mathrm{II}}{\gamma}] = a^\alpha b^\varepsilon c^\delta d^\beta e^\gamma + a^\beta b^\gamma c^\varepsilon d^\delta e^\alpha + a^\delta b^\alpha c^\gamma d^\varepsilon e^\beta$$
$$+ a^\varepsilon b^\beta c^\alpha d^\gamma e^\delta + a^\gamma b^\delta c^\beta d^\alpha e^\varepsilon$$

$$[\underset{\mathrm{V}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{IV}}{\beta}\,\underset{\mathrm{I}}{\varepsilon}\,\underset{\mathrm{II}}{\delta}] = a^\alpha b^\gamma c^\beta d^\varepsilon e^\delta + a^\varepsilon b^\delta c^\gamma d^\beta e^\alpha + a^\beta b^\alpha c^\delta d^\gamma e^\varepsilon$$
$$+ a^\gamma b^\varepsilon c^\alpha d^\delta e^\beta + a^\delta b^\beta c^\varepsilon d^\alpha e^\gamma$$

$$[\underset{\mathrm{V}}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\delta}\,\underset{\mathrm{IV}}{\varepsilon}\,\underset{\mathrm{I}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{II}}{\beta}] = a^\alpha b^\delta c^\varepsilon d^\gamma e^\beta + a^\gamma b^\beta c^\delta d^\varepsilon e^\alpha + a^\varepsilon b^\alpha c^\beta d^\delta e^\gamma$$
$$+ a^\delta b^\gamma c^\alpha d^\beta e^\varepsilon + a^\beta b^\varepsilon c^\gamma d^\alpha e^\delta$$

La somme de ces quatre *types partiels* est encore un *type partiel*, qui, à cause de l'enchaînement entre les exposans $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, peut être noté ainsi $[\underset{\substack{\mathrm{I}\\ \mathrm{V}}}{\alpha}\,\underset{\substack{\mathrm{IV}\\ \mathrm{III}}}{\beta}\,\underset{\substack{\mathrm{V}\\ \mathrm{IV}}}{\gamma}\,\underset{\substack{\mathrm{III}\\ \mathrm{I}}}{\delta}\,\underset{\substack{\mathrm{II}\\ \mathrm{II}}}{\varepsilon}]$, en concevant que le premier ordre de caractériſtiques détermine, non une ſuite de ſimples termes, mais une ſuite de *types partiels* de la forme $\underset{\mathrm{V\,III\,IV\,I\,II}}{[\mathrm{a\,b\,c\,d\,e}]}$, forme indiquée par le ſecond ordre de caractériſtiques. Cependant à cauſe des difficultés de l'impreſſion, je ſubſtituerai ici, à cette notation qui m'eſt familière, la ſuivante qui peut ſuffire pour ce Mémoire: je ferai

$$\underset{*\,\mathrm{III\,IV\,II\,I}}{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]} = \underset{\mathrm{V\,III\,IV\,I\,II}}{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]} + \underset{\mathrm{V\,III\,IV\,I\,II}}{[\alpha\varepsilon\delta\beta\gamma]} + \underset{\mathrm{V\,III\,IV\,I\,II}}{[\alpha\gamma\beta\varepsilon\delta]} + \underset{\mathrm{V\,III\,IV\,I\,II}}{[\alpha\delta\varepsilon\gamma\beta]}$$

& ſemblablement

$$\underset{*\,\mathrm{IV\,I\,II\,III}}{[\alpha\beta\varepsilon\gamma\delta]} = \underset{\mathrm{V\,III\,I\,II\,IV}}{[\alpha\beta\varepsilon\gamma\delta]} + \underset{\mathrm{V\,III\,I\,II\,IV}}{[\alpha\varepsilon\gamma\delta\beta]} + \underset{\mathrm{V\,III\,I\,II\,IV}}{[\alpha\gamma\delta\beta\varepsilon]} + \underset{\mathrm{V\,III\,I\,II\,IV}}{[\alpha\delta\beta\varepsilon\gamma]}$$

$$\underset{*\,\mathrm{II\,IV\,I\,III}}{[\alpha\beta\delta\varepsilon\gamma]} = \underset{\mathrm{V\,I\,II\,III\,IV}}{[\alpha\beta\delta\varepsilon\gamma]} + \underset{\mathrm{V\,I\,II\,III\,IV}}{[\alpha\varepsilon\beta\gamma\delta]} + \underset{\mathrm{V\,I\,II\,III\,IV}}{[\alpha\gamma\varepsilon\delta\beta]} + \underset{\mathrm{V\,I\,II\,III\,IV}}{[\alpha\delta\gamma\beta\varepsilon]}$$

Si l'on ſuppoſe de plus

$$\underset{*\,\mathrm{III\,IV\,II\,I}}{[\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta]]} = \underset{\mathrm{V\,IV\,II\,I\,III}}{[\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta]} + \underset{\mathrm{V\,IV\,II\,I\,III}}{[\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma]} + \underset{\mathrm{V\,IV\,II\,I\,III}}{[\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon]} + \underset{\mathrm{V\,IV\,II\,I\,III}}{[\alpha\varepsilon\delta\gamma\beta]}$$

$$\underset{*\,\mathrm{IV\,I\,II\,III}}{[\alpha\beta\delta\gamma\varepsilon]]} = \underset{\mathrm{V\,IV\,I\,III\,II}}{[\alpha\beta\delta\gamma\varepsilon]} + \underset{\mathrm{V\,IV\,I\,III\,II}}{[\alpha\delta\gamma\varepsilon\beta]} + \underset{\mathrm{V\,IV\,I\,III\,II}}{[\alpha\gamma\varepsilon\beta\delta]} + \underset{\mathrm{V\,IV\,I\,III\,II}}{[\alpha\varepsilon\beta\delta\gamma]}$$

$$\underset{*\,\mathrm{II\,IV\,I\,III}}{[\alpha\beta\varepsilon\delta\gamma]]} = \underset{\mathrm{V\,I\,IV\,II\,III}}{[\alpha\beta\varepsilon\delta\gamma]} + \underset{\mathrm{V\,I\,IV\,II\,III}}{[\alpha\delta\beta\gamma\varepsilon]} + \underset{\mathrm{V\,I\,IV\,II\,III}}{[\alpha\gamma\delta\varepsilon\beta]} + \underset{\mathrm{V\,I\,IV\,II\,III}}{[\alpha\varepsilon\gamma\beta\delta]}$$

on aura

$$(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\varepsilon) = \underset{*\,\mathrm{III\,IV\,II\,I}}{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]} + \underset{*\,\mathrm{IV\,I\,II\,III}}{[\alpha\beta\varepsilon\gamma\delta]} + \underset{*\,\mathrm{II\,IV\,I\,III}}{[\alpha\beta\delta\varepsilon\gamma]}$$
$$+ \underset{*\,\mathrm{III\,IV\,II\,I}}{[\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta]]} + \underset{*\,\mathrm{IV\,I\,II\,III}}{[\alpha\beta\delta\gamma\varepsilon]]} + \underset{*\,\mathrm{II\,IV\,I\,III}}{[\alpha\beta\varepsilon\delta\gamma]]}$$

& les ſix *types partiels* qui compoſent cette ſomme, ſeront tels qu'ils ne feront que ſe convertir réciproquement l'un en l'autre, ſi l'on échange dans la valeur de chacun, les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, entre elles: de manière que pour obtenir en *types* l'un de ces *types partiels*, il faudra faire une fonction qui ſoit indifféremment l'un des ſix.

Ces exemples ſuffiſent pour entendre l'algorithme en queſtion.

XXV. Lorſque α, β, γ, &c. ſont des nombres déterminés, s'il y en a d'égaux entre eux, il pourra arriver que ſubſtituant dans ces formules d'abréviation & dans leurs valeurs, on trouve dans la valeur, des termes qui ne diffèrent point: par exemple, on on trouve, en substituant dans l'une des formules précédentes,

$$\underset{\text{III IV II I}}{[2\,2\,1\,1]} = a^2 b^2 c^1 d^1 + a^1 b^1 c^2 d^2 + a^2 b^2 c^1 d^1 + a^1 b^1 c^2 d^2;$$

cependant, en suivant immédiatement la loi indiquée par l'ordre des caractéristiques I, II, III, IV, on auroit dû s'arrêter, après les deux premiers termes.

Pour éviter toute équivoque à cet égard, je supposerai que dans le développement des *types partiels*, comme dans celui des *types* mêmes, il ne se trouve jamais que des termes divers entre eux, & jamais d'autre coëfficient que l'unité.

Ainsi, par exemple, $\underset{\text{III IV II I}}{[2\,2\,1\,1]}$ ne représentera que les deux termes $a^2 b^2 c\, d + a\, b\, c^2 d^2$, & le résultat de la substitution dans la formule $+ \underset{\text{III IV II I}}{[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]}$ quand $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = \delta = 1$, sera $+ 2\underset{\text{III IV II I}}{[2\,2\,1\,1]}$; &c.

Le cas où quelques-uns des exposans α, β, γ, &c. sont zéro, ne produit rien de particulier; ainsi

$$\underset{\text{III IV II I}}{[2\,1\,0\,0]} = a^2 b^1 c^0 d^0 + a^0 b^0 c^2 d^1 + a^1 b^2 c^0 d^0 + a^0 b^0 c^1 d^2 = a^2 b + c^2 d + a b^2 + c d^2$$

$$\underset{\text{III IV II I}}{[2\,0\,0\,2]} = a^2 d^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2.$$

XXVI. On peut, par le moyen des opérations suivantes, trouver le produit de deux *types partiels* dans lesquels l'ordre entre les caractéristiques est, ou doit être conforme.

Soit demandé, par exemple, le produit de $\underset{\text{III IV II I}}{[2\,1\,0\,0]}$ par $\underset{\text{III IV II I}}{[7\,0\,4\,0]}$; j'écris quatre fois 7040, & au-dessus, les quatre permutations de 2100 indiquées par l'ordre des caractéristiques, comme il suit.

2100	0021	1200	0012
7040	7040	7040	7040

J'ajoute les nombres qui se trouvent immédiatement l'un sur l'autre, & j'ai, pour le produit,

$$\underset{\text{III IV II I}}{[2100]}\,\underset{\text{III IV II I}}{[7040]} = \underset{\text{III IV II I}}{[9140]} + \underset{\text{III IV II I}}{[7061]} + \underset{\text{III IV II I}}{[8240]} + \underset{\text{III IV II I}}{[7052]}.$$

Cet exemple suffiroit pour appliquer le même procédé à tous les cas, si les réductions, lorsqu'il y en a, n'exigeoient une ou deux considérations particulières.

Soit proposé le produit de $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[10022]}$ par $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[31100]}$; je fais

$$\begin{array}{ccccc} 31100 & 00113 & 13010 & 10301 & 01031 \\ 10022 & 10022 & 10022 & 10022 & 10022 \end{array}$$

d'où

$$\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[10022]}\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[31100]} = \underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[41122]} + \underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[10135]}$$
$$+ \underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[23032]} + \underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[20323]} + \underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[11053]};$$

mais, dans ce produit, les deux *types partiels* $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[10135]}$ & $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[11053]}$ représentent chacun cinq termes différens, au lieu que les deux $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[23032]}$ & $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[20323]}$, représentent les cinq mêmes termes.

Pour faire ces sortes de réductions, en calculant, je suppose, des *types partiels* de la forme $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]}$, j'ai sous les yeux, ou dans la mémoire, l'ordre de permutation que voici

$$12345,\ 45231,\ 31524,\ 24153,\ 53412,$$

lequel est indiqué par $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{12345}$.

Cet enchaînement me fait voir que $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[23032]}$ est la même chose que $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[02233]}$, & que $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[20323]}$ n'est encore que la même chose; car, pour trouver un équivalent de $\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{[23032]}$, dans lequel o qui occupe ici la troisième place, occupe la première, je choisis 31524, & je m'en sers pour appeler les nombres dans cet ordre:

o qui est le $3.^{me}$

2 qui est le $1.^{er}$

2 qui est le 5^{me}

3 qui est le 2.me

3 qui est le 4.me

Pareillement, pour trouver un équivalent de $[\underset{\text{v}}{2}\,\underset{\text{iii}}{0}\,\underset{\text{iv}}{3}\,\underset{\text{i}}{2}\,\underset{\text{ii}}{3}]$, dans lequel o qui occupe ici la deuxième place, occupe la première, je choisis 24153, dont je me sers pour appeler les nombres dans cet ordre:

o qui est le 2.me

2 qui est le 4.me

2 qui est le 1.er

3 qui est le 5.me

3 qui est le 3.me

& ainsi des autres.

On a donc, après avoir ordonné & réduit,

$$[\underset{\text{v}}{1}\,\underset{\text{iii}}{0}\,\underset{\text{iv}}{0}\,\underset{\text{i}}{2}\,\underset{\text{ii}}{2}]\;[\underset{\text{v}}{3}\,\underset{\text{iii}}{1}\,\underset{\text{iv}}{1}\,\underset{\text{i}}{0}\,\underset{\text{ii}}{0}] = [\underset{\text{v}}{4}\,\underset{\text{iii}}{1}\,\underset{\text{iv}}{1}\,\underset{\text{i}}{2}\,\underset{\text{ii}}{2}] + [\underset{\text{v}}{5}\,\underset{\text{iii}}{1}\,\underset{\text{iv}}{3}\,\underset{\text{i}}{1}\,\underset{\text{ii}}{0}]$$
$$+ 2\,[\underset{\text{v}}{0}\,\underset{\text{iii}}{2}\,\underset{\text{iv}}{2}\,\underset{\text{i}}{3}\,\underset{\text{ii}}{3}] + [\underset{\text{v}}{5}\,\underset{\text{iii}}{3}\,\underset{\text{iv}}{1}\,\underset{\text{i}}{0}\,\underset{\text{ii}}{1}].$$

Soit encore proposé le produit de $[\underset{\text{v}}{2}\,\underset{\text{iii}}{1}\,\underset{\text{iv}}{1}\,\underset{\text{i}}{1}\,\underset{\text{ii}}{0}]$ par $[\underset{\text{v}}{2}\,\underset{\text{iii}}{1}\,\underset{\text{iv}}{1}\,\underset{\text{i}}{0}\,\underset{\text{ii}}{1}]$; je fais

21101	01112	12110	10211	11021
21110	21110	21110	21110	21110,

& je dois conclure

$$[2\,\underset{\text{iii}}{1}\,\underset{\text{iv}}{1}\,\underset{\text{i}}{1}\,\underset{\text{ii}}{0}]\;[\underset{\text{v}}{2}\,\underset{\text{iii}}{1}\,\underset{\text{iv}}{1}\,\underset{\text{i}}{0}\,\underset{\text{ii}}{1}] = [\underset{\text{v}}{4}\,\underset{\text{iii}}{2}\,\underset{\text{iv}}{2}\,\underset{\text{i}}{1}\,\underset{\text{ii}}{1}] + 5\,[\underset{\text{v}}{2}\,\underset{\text{iii}}{2}\,\underset{\text{iv}}{2}\,\underset{\text{i}}{2}\,\underset{\text{ii}}{2}]$$
$$+ [\underset{\text{v}}{0}\,\underset{\text{iii}}{2}\,\underset{\text{iv}}{2}\,\underset{\text{i}}{3}\,\underset{\text{ii}}{3}] + [\underset{\text{v}}{2}\,\underset{\text{iii}}{1}\,\underset{\text{iv}}{1}\,\underset{\text{i}}{3}\,\underset{\text{ii}}{3}] + [\underset{\text{v}}{2}\,\underset{\text{iii}}{3}\,\underset{\text{iv}}{3}\,\underset{\text{i}}{1}\,\underset{\text{ii}}{1}];$$

parce qu'en conséquence de l'article XXV, $[\underset{\text{v}}{2}\,\underset{\text{iii}}{2}\,\underset{\text{iv}}{2}\,\underset{\text{i}}{2}\,\underset{\text{ii}}{2}]$ ne représente qu'un seul terme.

On calculera d'une manière analogue le produit $[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{iii}}{\beta}\,\underset{\text{iv}}{\gamma}\,\underset{\text{ii}}{\delta}\,\underset{\text{i}}{\varepsilon}]$ $\times\,[a\,\underset{\text{iii}}{b}\,\underset{\text{iv}}{\breve{c}}\,\underset{\text{ii}}{d}\,\underset{\text{i}}{e}]$; &c. & ainsi de tous les autres *types partiels* de même forme entr'eux : les détails ci-dessus doivent suffire pour tous les cas.

Je n'écrirai communément, dans la suite, les caractéristiques I, II, III, &c. que sous un seul des termes, quand leur ordre sera conforme dans tous.

XXVII. On a vu (*article III*) que, dans la forme où se présente immédiatement la fonction qui est indifféremment ou a, ou b, ou c, il reste une quantité dans laquelle il n'est pas indifférent d'échanger les lettres entre elles ; cette quantité est $a^2 b + b^2 c + a c^2 - a^2 c - a b^2 - b c^2$ ou $\underset{\text{II III I}}{[2\,1\,0]} - \underset{\text{II III I}}{[2\,0\,1]}$ qui dépend du second degré.

On a vu de même (*article XXI*) que dans la forme où se présente immédiatement la fonction qui est indifféremment ou a, ou b, ou c, ou d, il reste la quantité $2(ab + cd) - (ac + bd + ad + bc) = 2\,\underset{\text{III IV II I}}{[1\,1\,0\,0]} - \underset{\text{III IV II I}}{[1\,0\,1\,0]}$, qui dépend du troisième degré, & non du sixième, quoique de la forme $\underset{\text{III IV II I}}{[\alpha\beta\gamma\delta]}$, parce que dans les valeurs particulières de α, β, γ & δ qui ont lieu, $\underset{\text{III IV II I}}{[\alpha\beta\gamma\delta]}$ & $\underset{\text{III IV II I}}{[\alpha\beta\delta\gamma]}$ ne diffèrent point.

Passons au cinquième degré.

XXVIII. Si l'on fait

$$(a + r' b + r'' c + r''' d + r^{\text{IV}} e)^5 = \Delta'^5$$
$$(a + r'' b + r' c + r^{\text{IV}} d + r''' e)^5 = \Delta''^5$$
$$(a + r''' b + r^{\text{IV}} c + r'' d + r' e)^5 = \Delta'''^5$$
$$(a + r^{\text{IV}} b + r''' c + r' d + r'' e)^5 = \Delta^{\text{IV}5}$$

on aura (*article VIII*), pour la fonction qui égale indifféremment ou a, ou b, ou c, ou d, ou e, ceci

$$\tfrac{1}{5}\left[(A) + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{\text{IV}}\right].$$

Élevant les cinquièmes puissances indiquées, en faisant usage du premier système d'équations entre les r (*article VIII*) on a, si l'on suppose

$$2\ \underset{*\ \mathrm{III}\ \mathrm{IV}\ \mathrm{II}\ \mathrm{I}}{[31100]} + 3\ \underset{*\ \mathrm{III}\ \mathrm{IV}\ \mathrm{II}\ \mathrm{I}}{[12200]} = u',$$

$$\underset{\mathrm{V}\ \mathrm{III}\ \mathrm{IV}\ \mathrm{I}\ \mathrm{II}}{[41000]} + 2\ [30002] + 2^2\ [30110] + 2.3\ [12020] + 2^2 3\ [21011] = \varphi',$$

$$\underset{\mathrm{V}\ \mathrm{III}\ \mathrm{IV}\ \mathrm{I}\ \mathrm{II}}{[40100]} + 2\ [30020] + 2^2\ [31001] + 2.3\ [10202] + 2^2 3\ [20111] = \varphi'',$$

$$\underset{\mathrm{V}\ \mathrm{III}\ \mathrm{IV}\ \mathrm{I}\ \mathrm{II}}{[40010]} + 2\ [32000] + 2^2\ [30101] + 2.3\ [10220] + 2^2 3\ [21110] = \varphi''',$$

$$\underset{\mathrm{V}\ \mathrm{III}\ \mathrm{IV}\ \mathrm{I}\ \mathrm{II}}{[40001]} + 2\ [30200] + 2^2\ [31010] + 2.3\ [12002] + 2^2 3\ [21101] = \varphi^{\mathrm{IV}},$$

$$\Delta'^{\,5} = (A^5) + 2^3 3.5\,(ABCDE) + 2.5\,u' + 5r'\,\varphi' + 5r''\,\varphi'' + 5r'''\,\varphi''' + 5r^{\mathrm{IV}}\,\varphi^{\mathrm{IV}}$$
$$\Delta''^{\,5} = (A^5) + 2^3 3.5\,(ABCDE) + 2.5\,u' + 5r''\,\varphi' + 5r'\,\varphi'' + 5r^{\mathrm{IV}}\,\varphi''' + 5r'''\,\varphi^{\mathrm{IV}}$$
$$\Delta'''^{\,5} = (A^5) + 2^3 3.5\,(ABCDE) + 2.5\,u' + 5r'''\,\varphi' + 5r^{\mathrm{IV}}\,\varphi'' + 5r''\,\varphi''' + 5r'\,\varphi^{\mathrm{IV}}$$
$$\Delta^{\mathrm{IV}\,5} = (A^5) + 2^3 3.5\,(ABCDE) + 2.5\,u' + 5r^{\mathrm{IV}}\,\varphi' + 5r'''\,\varphi'' + 5r'\,\varphi''' + 5r''\,\varphi^{\mathrm{IV}}$$

ou, en employant les plus ſimples valeurs de r, de l'article XXIII, & faiſant pour ſimplifier

$$(A^5) - \frac{5}{2^2}(A^4 B) - \frac{5}{2}(A^3 B^2) - 5\,(A^3 BC) - \frac{3.5}{2}(A^2B^2C) - 3.5\,(A^2BCD) + 2^3 3.5\,(ABCDE) = M$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta'^{\,5}\\ \Delta''^{\,5}\\ \Delta'''^{\,5}\\ \Delta^{\mathrm{IV}\,5}\end{matrix}\right\} = M + \frac{5^2}{2}\,u' \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\-\end{matrix}\right\} \frac{5}{2^2}\,(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})\sqrt{5}$$

$$\left.\begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix}\right\} \frac{5}{2^2}\,(\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})\sqrt{-5+2\sqrt{5}} \left.\begin{matrix}+\\-\\-\\+\end{matrix}\right\} \frac{5}{2^2}\,(\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{\mathrm{IV}})\sqrt{-5-2\sqrt{5}}.$$

Or u' eſt de la forme $\underset{*\ \mathrm{III}\ \mathrm{IV}\ \mathrm{II}\ \mathrm{I}}{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]}$ qui dépend *(article XXIV)* d'une équation particulière du ſixième degré, & l'on va voir que le carré de $(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})$, ainſi que la quantité qui eſt indifféremment, ou $(\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})^2$, ou $(\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{\mathrm{IV}})^2$, ne renferment que des *types partiels* de cette même forme.

On pourroit le démontrer *à priori;* car

$$(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})^2 = \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{\mathrm{IV}\,2}$$
$$- 2(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi'\varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi''\varphi''') + 2(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{\mathrm{IV}});$$

$$\left.\begin{matrix}(\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})^2\\(\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{\mathrm{IV}})^2\end{matrix}\right\} = \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{\mathrm{IV}\,2} - 2(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{\mathrm{IV}})$$
$$\left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\} 2\sqrt{(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{\mathrm{IV}} - \varphi'\varphi^{\mathrm{IV}} - \varphi''\varphi''')^2}$$

& les *types partiels* que renferme φ', étant comparés chacun à $[\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}]$, les correſpondans de φ'' ſeront $[\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{\alpha\gamma\beta\varepsilon\delta}]$;

ceux de φ''' ſeront $[\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{\alpha\varepsilon\delta\beta\gamma}]$;

ceux de φ^{IV} ſeront $[\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{\alpha\delta\varepsilon\gamma\beta}]$;

d'où il ſuit que $\varphi'\varphi''$ ſera de la forme $[\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{abcde}] + [\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{acbed}]$ qui eſt un *type partiel*, $\varphi'''\varphi^{\mathrm{IV}}$ étant $[\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{aedbc}] + [\underset{\mathrm{V\;III\;IV\;I\;II}}{adecb}]$; que $\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{\mathrm{IV}}$ étant de la forme de $\varphi'\varphi''$, $\varphi'\varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi''\varphi'''$ ſera de celle de $\varphi'''\varphi^{\mathrm{IV}}$; &c.

Il ſuffit d'indiquer ici cette manière de démontrer. En faiſant le calcul en entier, on trouvera

$$\varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{\mathrm{IV}\,2} = [\underset{\ast\mathrm{III\;IV\;II\;I}}{82000}]$$
$$+ 2^2\ [72010] \quad + 2^2 3\ [53020] \quad + 2^4 5\ [43201]$$
$$+ 2^3\ [70111] \quad + 2^3 3\ [53002] \quad + 2^4 5\ [43012]$$
$$+ 2^2\ [64000] \quad + 2^3\ [53200] \quad + 2^2 5^2\ [43102]$$

$+\ 2^{2}3\ [63100]$	$+\ 2^{3}7\ [53110]$	$+\ 2^{3}3\cdot5\ [43120]$
$+\ 2^{2}\ [63001]$	$+\ 2^{4}3\ [53011]$	$+\ 2^{3}5^{2}\ [43111]$
$+\ 2^{4}\ [62020]$	$+\ 2^{3}3^{2}\ [51022]$	$+\ 2^{2}3^{2}5\ [40222]$
$+\ 2^{3}3\ [62011]$	$+\ 2^{4}3\ [51220]$	$+\ 2^{2}3\cdot5^{2}\ [42121]$
$+\ 2^{2}3\ [62110]$	$+\ 2^{3}3\cdot5\ [52111]$	$+\ 2^{5}5\ [10333]$
$+\ 2^{4}\ [62101]$	$+\ 2^{3}5\ [24040]$	$+\ 2^{3}5^{2}\ [03232]$
$+\ 2^{3}\ [54001]$	$+\ 2\cdot5^{2}\ [04141]$	$+\ 2^{4}5^{2}\ [23131]$
$+\ 2\ [54100]$	$+\ 2^{2}5\ [43030]$	$+\ 2^{3}3\cdot5^{2}\ [31222]$
$+\ 2^{4}\ [54010]$	$+\ 2^{4}5\ [43210]$	

$$\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{\mathrm{IV}} = [\underset{*}{8}\,\underset{\mathrm{III}}{1}\,\underset{\mathrm{IV}}{1}\,\underset{\mathrm{I}}{0}\,\underset{\mathrm{II}}{0}]$$

$+\ 2\cdot3\ [72001]$	$+\ 2^{2}19\ [53101]$	$+\ 2^{3}5^{2}\ [43021]$
$+\ 2^{4}\ [63010]$	$+\ 2\cdot3^{2}7\ [51202]$	$+\ 2^{3}3\cdot5^{2}\ [42211]$
$+\ 2^{4}\ [62200]$	$+\ 3^{2}5\ [24400]$	$+\ 2^{2}3\cdot5\cdot7\ [03322]$
$+\ 2^{4}5\ [61111]$	$+\ 2\cdot5\cdot11\ [04411]$	$+\ 2^{5}5^{2}\ [23311]$
$+\ 5\ [55000]$	$+\ 2^{2}3\cdot5\ [43300]$	$+\ 2^{3}3^{2}5^{2}\ [22222]$

$$\begin{aligned}&\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{\mathrm{IV}}\\ &+ \varphi'\varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi''\varphi''' = [\underset{*}{8}\,\underset{\mathrm{III}}{1}\,\underset{\mathrm{IV}}{0}\,\underset{\mathrm{II}}{1}\,\underset{\mathrm{I}}{0}]\end{aligned}$$

$+\ 2\ [73000]$	$+\ 2^{4}\ [54100]$	$+\ 2\cdot5\cdot11\ [42013]$
$+\ 2\ [70021]$	$+\ 2\cdot7\ [52030]$	$+\ 2^{3}3\cdot5\ [43210]$
$+\ 2^{2}\ [71002]$	$+\ 2^{4}\ [50032]$	$+\ 3\cdot5\ [24040]$
$+\ 2^{2}\ [71110]$	$+\ 2^{2}7\ [53020]$	$+\ 3^{2}5\ [04114]$
$+\ 2\ [60040]$	$+\ 2^{3}5\ [53011]$	$+\ 2\cdot3\cdot5\ [43003]$
$+\ 2\ [63100]$	$+\ 2^{2}11\ [51013]$	$+\ 2^{3}5^{2}\ [43111]$
$+\ 2^{3}\ [61030]$	$+\ 2^{4}3\ [52210]$	$+\ 2\cdot3\cdot5^{2}\ [42022]$
$+\ 2\cdot5\ [62002]$	$+\ 2\cdot3\cdot11\ [52102]$	$+\ 2^{2}3\cdot5^{2}\ [42121]$
$+\ 2\cdot3^{2}\ [61021]$	$+\ 2^{3}3\cdot5\ [51121]$	$+\ 2^{3}3\cdot5\ [13033]$
$+\ 2\cdot11\ [62011]$	$+\ 2\cdot3^{2}5\ [43102]$	$+\ 2^{2}5\cdot11\ [03232]$
$+\ 2\cdot13\ [62110]$	$+\ 2^{2}5^{2}\ [41032]$	$+\ 2^{4}5^{2}\ [23113]$
$+\ 3^{2}\ [54001]$	$+\ 2\cdot5\cdot11\ [42130]$	$+\ 2^{3}3\cdot5^{2}\ [32221]$
$+\ 13\ [51004]$		

De cette dernière valeur, où tous les termes sont de la forme $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]_{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}$, on tirera $\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{\mathrm{IV}}$, en ne prenant que le *type partiel* $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]_{\mathrm{V}\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + [\alpha\gamma\beta\varepsilon\delta]_{\mathrm{V}\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}$, & $\varphi'\varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi''\varphi'''$, en prenant l'autre $[\alpha\delta\varepsilon\gamma\beta]_{\mathrm{V}\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + [\alpha\varepsilon\delta\beta\gamma]_{\mathrm{V}\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}$: ainsi

$$\begin{aligned}\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{\mathrm{IV}} = {} & [81010]_{\mathrm{V}\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + [80101] \\ & + 2\,[73000] + 2\,[70300] \\ & + \&c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'\varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi''\varphi''' = {} & [81001]_{\mathrm{V}\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + [80110] \\ & + 2\,[70003] + 2\,[70030] \\ & + \&c.\end{aligned}$$

& calculant $(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{\mathrm{IV}} - \varphi'\varphi^{\mathrm{IV}} - \varphi''\varphi''')^2$, on n'y trouvera que des termes de la forme $[abcde]_{\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}$.

Il me paroît certain que ces carrés $(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})^2$; $(\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})^2$ & $(\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{\mathrm{IV}})^2$ ne dépendront même, ainsi que u', que de $[21100]_{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}$, ou de $[12200]_{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}$; car on a $[31100]_{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}} = (A)\,[21100]_{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}} + [12200]_{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}} - (A^2B^2C) - (A^2BCD)$, & il est facile de parvenir à l'équation identique,

$$\begin{aligned}&(A^8B^2) + 2^2\,(A^7B^2C) + 2^2 3\,(A^7BCD) + 2^2\,(A^6B^4) \\ &+ 2^2\,(A^6B^3C) + 2^2 5\,(A^6B^2C^2) + 2^2 5\,(A^6B^2CD) \\ &+ 2^3\,(A^6BCDE) + 2^3\,(A^5B^4C) + 2^4\,(A^5B^3C^2) \\ &+ 2.29\,(A^5B^3CD) + 2.3^3\,(A^5B^2C^2D) + 2.61 \\ &(A^5B^2CDE) + 2.13\,(A^4B^4C^2) + 2^4\,(A^4B^4CD) \\ &- 2.3\,(A^4B^3C^3) + 2.13\,(A^4B^3C^2D) + 2^2 5^2 \\ &(A^4B^3CDE) + 2.3^2 5\,(A^4B^2C^2D^2) + 2.3.23 \\ &(A^4B^2C^2DE) + 2.3.13\,(A^3B^3C^3D) + 2^2 5 \\ &(A^3B^3C^2D^2) + 2^2.103\,(A^3B^3C^2DE) + 2.3.5.13 \\ &\qquad (A^3B^2C^2D^2E)\end{aligned}$$

$$(A^3 B^2 C^2 D^2 E) - 2^2 5 . 17\ (A^2 B^2 C^2 D^2 E^2) - 2\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[2\,1\,1\,0\,0]}\ \{2\,(A^5 B) - 2^2\ (A^4 B^2) + 2\ (A^4 B C) + 3\ (A^3 B^3) - 13\ (A^3 B^2 C) - 2^3 3\ (A^3 B C D) - 2^2 3 . 5\ (A^2 B^2 C^2) - 61\ (A^2 B^2 C D) + 2^2 7\ (A^2 B C D E)\} - 2^2\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[1\,2\,2\,0\,0]}\ \{(A^5) - 2^2 5\ (A^2 B^2 C) - 2^2 5\,(A^2 B C D) + 2^3 3 . 5\ (ABCDE)\} - 2\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[2\,1\,1\,0\,0]}^2\ \{2 . 3\ (A^2) + 17\ (AB)\} - 2^4 5\ (A)\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[2\,1\,1\,0\,0]}\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[1\,2\,2\,0\,0]} - 2^2 5^2\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[1\,2\,2\,0\,0]}^2 = \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{\mathrm{IV}\,2}.$$

Ainſi la ſomme des carrés de φ', φ'' φ''', & φ^{IV}, ne dépend, comme celle de leurs premières puiſſances, que de $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[2\,1\,1\,0\,0]}$ & de $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[1\,2\,2\,0\,0]}$; & je crois qu'on trouveroit, pour la ſomme des cubes & celle des quatrièmes puiſſances, de pareilles équations; d'où, par les *articles V & XXI*, on auroit $(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{\mathrm{IV}})$, $(\varphi'\ \varphi''' + \varphi''\ \varphi^{\mathrm{IV}})$ & $(\varphi'\ \varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi''\ \varphi''')$ en fonction de $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[2\,1\,1\,0\,0]}$ & de $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[1\,2\,2\,0\,0]}$: mais je ſuis convaincu de plus, qu'il exiſte, entre $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[2\,1\,1\,0\,0]}$ & $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[1\,2\,2\,0\,0]}$, deux équations qui donneroient, par élimination, s'il étoit néceſſaire, celles du ſixième degré en $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[2\,1\,1\,0\,0]}$ ſeul, & en $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[1\,2\,2\,0\,0]}$ ſeul; & d'où l'on tireroit l'un de ces deux *types partiels* en fonction de l'autre, ſoit rationelle, en prenant un avant-dernier réſultat de l'élimination, ſoit irrationelle mais entière, en réſolvant immédiatement. *Voyez celles ci-après,* entre u & w (*article XXXI*). Ces équations étant des fonctions rationelles, égales identiquement à zéro, ſont faciles à trouver; mais je n'ai pas fait le calcul. Je tranſcrirai ſeulement la valeur ſuivante

$$-(A^7 B^2 C) - (A^7 BCD) + 3.5\ (A^6 B^3 C) + 2.7\ (A^6 B^2 C^2) + 29\ (A^6 B^2 CD) + 2.3^2 5\ (A^6 BCDE) + 5\ (A^5 B^5) + 3.5\ (A^5 B^4 C) + 2.3.5\ (A^5 B^3 C^2) + 3^2 5\ (A^5 B^3 CD) + 2^3 13\ (A^5 B^2 C^2 D) + 2^3 13$$

$$(A^5 B^2 C D E) + 2 \cdot 5 \cdot 7\ (A^4 B^4 C^2) + 2 \cdot 5 \cdot 11$$
$$(A^4 B^4 C D) + 5 \cdot 19\ (A^4 B^3 C^3) + 2^3 5 \cdot 7\ (A^4 B^3 C^2 D)$$
$$+ 3 \cdot 5^2 7\ (A^4 B^3 C D E) + 2 \cdot 5 \cdot 43\ (A^4 B^2 C^2 D^2)$$
$$+ 5 \cdot 149\ (A^4 B^2 C^2 D E) + 3 \cdot 5 \cdot 31\ (A^3 B^3 C^3 D)$$
$$+ 5 \cdot 137\ (A^3 B^3 C^2 D^2) + 2 \cdot 3^2 5^2\ (A^3 B^3 C^2 D E)$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37\ (A^3 B^2 C^2 D^2 E) + 2^2 5^2 41\ (A^2 B^2 C^2 D^2 E^2)$$
$$+ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[21100]} \{(A^6) + (A^5 B) - 3 \cdot 5\ (A^4 B^2) - 3 \cdot 5$$
$$(A^4 B C) - 3 \cdot 5\ (A^3 B^3) - 5 \cdot 13\ (A^3 B^2 C) - 5^3$$
$$(A^3 B C D) - 2^2 3^2 5\ (A^2 B^2 C^2) - 5 \cdot 61\ (A^2 B^2 C D) - 5$$
$$(A^2 B C D E)\} + \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[12200]} \{7\ (A^5) - 3 \cdot 5\ (A^4 B) - 3 \cdot 5$$
$$(A^3 B^2) - 3 \cdot 5\ (A^3 B C) - 2^2 5 \cdot 7\ (A^2 B^2 C) - 2 \cdot 5 \cdot 23$$
$$(A^2 B C D) + 3 \cdot 5 \cdot 71\ (A B C D E)\} - 3 \cdot 5\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[02211]}$$
$$\{(A^4) - (A^3 B) - 2\ (A^2 B^2) + (A^2 B C) - 3^2$$
$$(A B C D)\} + 2 \cdot 5\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[21100]}^2 \{(A^2) + 5\ (A B)\}$$
$$+ 2 \cdot 5 \cdot 11\ (A)\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[21100]}\ \underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[12200]} + 2 \cdot 5 \cdot 13$$
$$\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[12200]}^2 = \varphi' \varphi'' + \varphi''' \varphi^{\mathrm{IV}},$$

laquelle fait voir que $(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{\mathrm{IV}})^2$ ne dépend que de trois *types partiels*, de la forme $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[\alpha\beta\beta\delta\delta]}$. Au reste, les recherches que j'ai faites sur l'équation particulière du sixième degré, dont les racines seroient l'expression générale $\underset{*\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}\,\mathrm{II}\,\mathrm{I}}{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]}$, & les cinq autres quantités qui en résultent, si l'on y échange les lettres a, b, c, d, e, entre elles, ne m'ayant conduit jusqu'à présent à aucune facilité qui dépendît des égalités $\gamma = \beta$, $\varepsilon = \delta$, ni des valeurs particulières de ces exposans, toute cette discussion n'a rien ici d'essentiel.

Je n'exposerai mes résultats sur cette équation particulière, qu'après être entré dans quelques détails sur le sixième degré en général. Il faut auparavant dire un mot de l'équation que les Auteurs ont appelé *résolvante* ou *réduite*.

XXIX. La résolvante du cinquième degré est une équation du quatrième, dont les quatre racines seront Δ'^5, Δ''^5, Δ'''^5 & $\Delta^{\text{IV}5}$. Comme il nous est facile de faire la somme des valeurs de ces lettres, la somme de leurs produits deux à deux, &c. nous connoîtrons les coëfficiens de cette équation.

Celui du premier terme étant l'unité, celui du second sera

$$-2^2 M - 2.5^2 u',$$

valeurs données dans l'article précédent.

Si l'on fait

$$(A^4B) + 2\,(A^3B^2) + 2^2\,(A^3BC) + 2.3\,(A^2B^2C)$$
$$+ 2^2 3\,(A^2BCD) - 2u' = \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{\text{IV}} = \Phi,$$
$$(A^5) + 2^3 3.5\,(ABCDE) + 2.5\,u' = \Psi,$$

& $\varphi'\,\varphi'' + \varphi'''\,\varphi^{\text{IV}} = V$ dont la valeur en *types partiels* de la forme $[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{III}}{\beta}\,\underset{\text{IV}}{\gamma}\,\underset{\text{II}}{\delta}\,\underset{\text{I}}{\varepsilon}]$ se trouve ci-dessus, le coëfficient du troisième terme sera

$$2.3\,\Psi^2 - 3.5\,\Phi\Psi + 5^2\Phi^2 - 5^3 V.$$

Si l'on fait encore

$$\varphi'^2\,\varphi^{\text{IV}} + \varphi''^2\,\varphi''' + \varphi'''^2\,\varphi' + \varphi^{\text{IV}2}\,\varphi'' = U$$

que l'on trouvera n'être aussi composé que de *types partiels* de la forme $[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{III}}{\beta}\,\underset{\text{IV}}{\gamma}\,\underset{\text{II}}{\delta}\,\underset{\text{I}}{\varepsilon}]$, le coëfficient du quatrième terme sera

$$-2^2\Psi^3 + 3.5\,\Phi\Psi^2 - 2.5^2\Phi^2\Psi + 2.5^3 V\Psi + 5^3\Phi^3 - 5^4\Phi V - 5^4 U.$$

Le cinquième & dernier terme est enfin

$$((A^4) - (A^3B) + (A^2B^2) + 2\,(A^2BC) - (ABCD) - 5\,[\underset{*}{2}\,\underset{\text{III}}{1}\,\underset{\text{IV}}{1}\,\underset{\text{II}}{0}\,\underset{\text{I}}{0}])^5.$$

Il y a cinq autres équations pareilles, qu'on tireroit de celle-ci, en y échangeant de toutes les manières les lettres a, b, c, d, e entre elles; d'où il suit que le produit de ces six équations seroit une équation complète du 24.^{e} degré, qui n'auroit pour coëfficiens que des fonctions rationelles de ceux de la proposée.

Pour faire usage de cette équation du 24.^{e} degré, il faudroit savoir en dégager le facteur irrationel qui est la résolvante ci-deſſus, & l'on voit que cette décompoſition dépend, en dernière analyſe, de la facilité d'obtenir $\left[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\mathrm{III}}{\beta}\,\underset{\mathrm{IV}}{\gamma}\,\underset{\mathrm{II}}{\delta}\,\underset{\mathrm{I}}{\varepsilon}\right]$ en *types.*

XXX. Si l'on fait

$$(a + b + \varrho'\overline{c + d} + \varrho''\overline{e + f})^3 = \Delta'^3$$
$$(a + c + \varrho'\overline{b + e} + \varrho''\overline{d + f})^3 = \Delta''^3$$
$$(a + d + \varrho'\overline{b + f} + \varrho''\overline{c + e})^3 = \Delta'''^3$$
$$(a + e + \varrho'\overline{c + f} + \varrho''\overline{b + d})^3 = \Delta^{\mathrm{IV}3}$$
$$(a + f + \varrho'\overline{d + e} + \varrho''\overline{b + c})^3 = \Delta^{\mathrm{V}3}$$

on aura *(article XIV)*, pour la fonction qui égale indifféremment ou a, ou b, ou c, ou d, ou e, ou f, ceci

$$\tfrac{1}{6}\,[(A) + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{\mathrm{IV}} + \Delta^{\mathrm{V}}].$$

Élevant les troiſièmes puiſſances indiquées, ſi l'on ſuppoſe

$$ab(a + b) + cd(c + d) + ef(e + f)$$
$$+ 2\,(a + b)\,(c + d)\,(e + f) = u'$$

$$(a + b)\,(c + d)\,[(a + b) - (c + d)]$$
$$- (a + b)\,(e + f)\,[(a + b) - (e + f)]$$
$$+ (c + d)\,(e + f)\,[(c + d) - (e + f)] = w'$$

ou bien $u' = \underset{\mathrm{V\;VI\;II\;I\;III\;IV}}{[210000]} + 2\,\underset{\mathrm{V\;VI\;II\;I\;III\;IV}}{[101010]} + 2\,\underset{\mathrm{V\;VI\;II\;I\;III\;IV}}{[101001]}$

$$w' = \underset{\mathrm{V\;VI\;II\;I\;III\;IV}}{[201000]} + [200100] + 2\,[111000]$$
$$- [200010] - [200001] - 2\,[110010],$$

on a

$$\Delta'^3 = (A^3) - \frac{3}{2}\,(A^2 B) - 3\,(ABC) + \frac{3^2}{2}\,u' + \frac{3}{2}\,w'v' - 3\,\cdot$$

u' dépend du quinzième degré, ainſi que w'^2: mais ſi l'on ſuppoſe que u'' & w'' ſont ce que deviennent u' & w', ſi l'on y écrit

$$ac \;\&\; a + c \text{ pour } ab \;\&\; a + b,$$
$$be \;\&\; b + e \text{ pour } cd \;\&\; c + d,$$
$$df \;\&\; d + f \text{ pour } ef \;\&\; e + f,$$

que u''' & w''' sont ce que deviennent les mêmes u' & w' si l'on y écrit

$$ad \;\&\; a + d \text{ pour } ab \;\&\; a + b,$$
$$bf \;\&\; b + f \text{ pour } cd \;\&\; c + d,$$
$$ce \;\&\; c + e \text{ pour } ef \;\&\; e + f,$$

&c. ou bien, en regardant les termes de u' & w'^2 comme déduits du *type partiel*

$$[\underset{V}{\alpha}\underset{VI}{\beta}\underset{II}{\gamma}\underset{I}{\delta}\underset{III}{\varepsilon}\underset{IV}{\zeta}] + [\alpha\beta\varepsilon\zeta\delta\gamma] + [\alpha\beta\delta\gamma\zeta\varepsilon] + [\alpha\beta\zeta\varepsilon\gamma\delta]$$
$$+ [\alpha\beta\gamma\delta\zeta\varepsilon] + [\alpha\beta\zeta\varepsilon\delta\gamma] + [\alpha\beta\delta\gamma\varepsilon\zeta] + [\alpha\beta\varepsilon\zeta\gamma\delta]$$

si l'on suppose pour u'' & w''^2 les correspondans $[\underset{VI}{\alpha}\underset{I}{\delta}\underset{IV}{\beta}\underset{II}{\zeta}\underset{III}{\gamma}\underset{V}{\varepsilon}] +$ &c.

pour u''' & w'''^2 . . . . $[\underset{III}{\alpha}\underset{IV}{\gamma}\underset{II}{\varepsilon}\underset{V}{\beta}\underset{VI}{\zeta}\underset{I}{\delta}] +$ &c.

pour u^{IV} & w^{IV2} . . . . $[\underset{IV}{\alpha}\underset{III}{\zeta}\underset{I}{\delta}\underset{VI}{\varepsilon}\underset{II}{\beta}\underset{V}{\gamma}] +$ &c.

pour u^{V} & w^{V2} . . . . $[\underset{II}{\alpha}\underset{IV}{\varepsilon}\underset{V}{\zeta}\underset{VI}{\gamma}\underset{I}{\delta}\underset{III}{\beta}] +$ &c.

ce qui donne

$$\Delta''^{3} = (A^3) - \tfrac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \tfrac{3^2}{2}u'' + \tfrac{3}{2}w''\sqrt{-3},$$
$$\Delta'''^{3} = (A^3) - \tfrac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \tfrac{3^2}{2}u''' + \tfrac{3}{2}w'''\sqrt{-3},$$
$$\Delta^{IV3} = (A^3) - \tfrac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \tfrac{3^2}{2}u^{IV} + \tfrac{3}{2}w^{IV}\sqrt{-3},$$
$$\Delta^{V3} = (A^3) - \tfrac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \tfrac{3^2}{2}u^{V} + \tfrac{3}{2}w^{V}\sqrt{-3}$$

les coëfficiens des équations du cinquième degré qui auront pour racines u', u'', u''', u^{IV}, u^{V}, & w'^2, w''^2, w'''^2, w^{IV2}, w^{V2}, dépendront d'équations particulières du sixième degré, puisqu'il y a en u & w^2 six pareilles équations du cinquième degré, qui résultent des échanges des lettres a, b, c, d, e, f, entre elles; comme le prouvent les Tables suivantes,

ab	*cd*	*ef*
ae	*fc*	*db*
ad	*bf*	*ce*
ac	*eb*	*fd*
af	*de*	*bc*

ab	*cf*	*de*
ad	*ec*	*fb*
af	*be*	*cd*
ac	*db*	*ef*
ae	*fd*	*bc*

ab	*ce*	*fd*
af	*dc*	*eb*
ae	*bd*	*cf*
ac	*fb*	*de*
ad	*ef*	*bc*

ab	*cd*	*fe*
af	*ec*	*db*
ad	*be*	*cf*
ac	*fb*	*ed*
ae	*df*	*bc*

ab	*ce*	*df*
ad	*fc*	*eb*
ae	*bf*	*cd*
ac	*db*	*fe*
af	*ed*	*bc*

ab	*cf*	*ed*
ae	*dc*	*fb*
af	*bd*	*ce*
ac	*eb*	*df*
ad	*fe*	*bc*

dont les applications me paroiſſent ſenſibles.

Les coëfficiens de ces équations du cinquième degré ſe déduiront du *type partiel* ſuivant,

$$\underset{\mathrm{I\;V\;VI\;III\;IV\;II}}{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta]} + \underset{\mathrm{I\;V\;VI\;III\;IV\;II}}{[\alpha\varepsilon\beta\delta\zeta\gamma]} + [\alpha\zeta\varepsilon\delta\gamma\beta] + [\alpha\gamma\zeta\delta\beta\varepsilon]$$
$$+ [\beta\gamma\alpha\zeta\delta\varepsilon] + [\varepsilon\beta\alpha\gamma\delta\zeta] + [\zeta\varepsilon\alpha\beta\delta\gamma] + [\gamma\zeta\alpha\varepsilon\delta\beta]$$
$$+ [\gamma\alpha\beta\varepsilon\zeta\delta] + [\beta\alpha\varepsilon\zeta\gamma\delta] + [\varepsilon\alpha\zeta\gamma\beta\delta] + [\zeta\alpha\gamma\beta\varepsilon\delta]$$
$$+ [\delta\varepsilon\zeta\alpha\beta\gamma] + [\delta\beta\varepsilon\alpha\gamma\zeta] + [\delta\gamma\beta\alpha\zeta\varepsilon] + [\delta\zeta\gamma\alpha\varepsilon\beta]$$
$$+ [\varepsilon\zeta\delta\gamma\alpha\beta] + [\beta\varepsilon\delta\zeta\alpha\gamma] + [\gamma\beta\delta\varepsilon\alpha\zeta] + [\zeta\gamma\delta\beta\alpha\varepsilon]$$
$$+ [\zeta\delta\varepsilon\beta\gamma\alpha] + [\varepsilon\delta\beta\gamma\zeta\alpha] + [\beta\delta\gamma\zeta\varepsilon\alpha] + [\gamma\delta\zeta\varepsilon\beta\alpha],$$

qui devient un *type* complet, lorſqu'on a $\zeta = \varepsilon = \delta$.

Ajoutons que l'on a les équations identiques

$$\underset{\mathrm{V\;VI\;II\;I\;III\;IV}}{[210000]} = (A)\,(ab + cd + ef)$$
$$+ (a + b)\,(c + d)\,(e + f) - (ABC), \;\&$$

$$W'^2 = 4\,[ab + cd + ef - (AB)]^3$$
$$- 4(a + b)\,(c + d)\,(e + f)\,[27\,(a + b)\,(c + d)\,(e + f) + (A)^3]$$
$$+ [9\,(a + b)\,(c + d)\,(e + f) - (A)\,(ab + cd + ef - (AB))]^2.$$

& qu'il me paroît certain qu'il existe deux équations entre $(ab + cd + ef)$ & $(a + b)(c + d)(e + f)$, analogues à celles entre u & w de l'article qui suit.

XXXI. Si l'on emploie la forme de l'*article XV*, on aura $(a + b + c - d - e - f)^2 = (A^2) - 2(AB) + 4(ab + ac + bc + de + df + ef)$. Soit $ab + ac + bc + de + df + ef = u'$; comme en échangeant entr'elles les lettres a, b, c, d, e, f, de toutes les manières, il s'y fait neuf changemens, soient u', u'', u''', u^{IV}, &c. ces dix valeurs; chacun des dix carrés dépendra de l'une d'elles; & si l'on calcule les coëfficiens de l'équation du dixième degré dont elles sont les racines, on trouvera, cette équation étant

$$u^{10} + a_1 u^9 + a_2 u^8 + a_3 u^7 + \&c. = 0,$$

&

$$x^6 * + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

étant la proposée,

$$a_1 = -2^2 p, \qquad a_2 = 2.3\,p^2 - 2.3\,r,$$

$$a_3 = -2^2 p^3 - 3q^2 + 2.13\,pr + 2.3.11\,t,$$

$$a_4 = \begin{array}{lll} p^4 & -\,2.3.7\,p^2 r & +\,2^2 3^2\,qs \\ +\,3^2 pq^2 & +\,r^2 & -\,2^2 3^4\,pt \end{array}$$

$$a_5 = \begin{array}{lll} -\,3^2 p^2 q^2 & -\,2.3^2\,pr^2 & +\,2.3.107\,p^2 t \\ +\,2.3.5\,p^3 r & -\,2^3 3.5\,pqs & +\,2.3.19\,rt \\ +\,2^2 3\,q^2 r & -\,3.41\,s^2 & \end{array}$$

$$a_6 = \begin{array}{lll} 3\,p^3 q^2 & +\,2^3 3\,r^3 & +\,2.3.23\,q^2 t \\ +\,3\,q^4 & +\,2^2 37\,p^2 qs & -\,2.241\,prt \\ -\,2^3\,p^4 r & -\,2.3.23\,qrs & +\,3.43\,t^2 \\ -\,2^3 5\,pq^2 r & +\,521\,ps^2 & \\ +\,7^2\,p^2 r^2 & -\,2^7 5\,p^3 t & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
a_7 = & - 2\cdot 3\, p q^4 + 2^2\cdot 11\, p^2 q^2 r - 2^4 3\, p^3 r^2 - 2\, q^2 r^2 - 2^4 5\, p r^3 - 2^4 5\, p^3 q s \\
& - 2^2 3^2\, q^3 s + 2\cdot 5\cdot 47\, p q r s - 2\cdot 449\, p^2 s^2 + 2\cdot 47\, r s^2 + 2^6 5\, p^4 t - 2\cdot 3\cdot 61\, p q^2 t \\
& + 2^4 47\, p^2 r t + 2^4 5\, r^2 t - 2\cdot 3^2 19\, q s t - 2^7 3\, p t^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_8 = & \; 3\, p^2 q^4 - 2^4\, p^3 q^2 r - 2\cdot 3\, q^4 r + 2^4 p^4 r^2 + 2\cdot 3^2\, p q^2 r^2 + 2^3 11\, p^2 r^3 + 2^4 r^4 + 2^4 p^4 q s \\
& + 2^2 3\cdot 7\, p q^3 s - 2^2 3\cdot 7^2 p^2 q r s - 2^3 3\, q r^2 s + 2^2\, 197\, p^3 s^2 + 3\cdot 17\, q^2 s^2 - 2\cdot 3\cdot 41\, p r s^2 - 2^6\, p^5 t + 2^2 3^4\, p^2 q^2 t \\
& - 2^9\, p^3 r t - 2\cdot 3\, q^3 r t - 2^4 3\cdot 5\, p r^2 t + 2^2 3\cdot 71\, p q s t + 2\cdot 3\cdot 11\, s^2 t + 2^7 3\, p^2 t^2 + 2^3 3\cdot 5\, r t^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_9 = & - q^6 + 2\cdot 7\, p q^4 r - 2^5\, p^2 q^2 r^2 - 2^5\, p^3 r^3 + 2^3\, q^2 r^3 - 2^5\, p r^4 - 2^6 p^2 q^3 s + 2^6 5\, p^3 q r s - 2\cdot 3\, q^3 r s + 2^3 5\, p q r^2 s \\
& - 2^5 11\, p^4 s^2 - 2\cdot 43\, p q^2 s^2 + 2^3 3^3\, p^2 r s^2 - 2^3\, r^2 s^2 - 2\cdot 7\, q s^3 - 2^5 3\, p^3 q^2 t + 2^2 3\, q^4 t + 2^7\, p^4 r t + 2^3\, p q^2 r t + 2^5 7\, p^2 r^2 t \\
& + 2^5\, r^3 t - 2^6 11\, p^2 q s t + 2^3 3\, q r s t - 2^4 7\, p s^2 t - 2^7\, p^3 t^2 - 2^4 3\, q^2 t^2 - 2^8\, p r t^2 + 2^6\, t^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{10} = & \; p q^6 - 2^3\, p^2 q^4 r \\
& + 2^6\, p^5 s^2 + 2^2 3^2\, p^2 q^2 s^2 \\
& - 2^5\, p r^3 t + 2^6 3\, p^3 q s t
\end{aligned}
$$

+

$$\begin{array}{lll}
+ 2^4 p^3q^2r^2 & - 2^6 p^3rs^2 & - 2^4 pqrst \\
+ q^4r^2 & + 2. q^2rs^3 & + 2^4 3\, p^2s^2t \\
- 2^3 pq^2r^3 & + 2^3 pr^2s^2 & - 2^3 rs^2t \\
+ 2^4 p^2r^4 & + 2^2 3\, pqs^3 & + 2^4 3\, pq^2t^2 \\
+ 2^4 p^3q^3s & + s^4 & + 2^7 p^2rt^2 \\
- 2^6 p^4qrs & - 2^2 3\, pq^4t & + 2^4 r^2t^2 \\
+ 2^2 pq^3rs & - 2^6 p^3r^2t & - 2^6 pt^3 \\
- 2^4 p^2qr^2s & - 2^3 q^2r^2t &
\end{array}$$

& l'on aura

$$x = \tfrac{1}{6} \Big[\left.\begin{matrix}+\\+\\+\\-\\-\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{(u' - p)} \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\+\\-\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{(u'' - p)} \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\-\\+\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{(u''' - p)} \left.\begin{matrix}+\\+\\-\\-\\-\\+\end{matrix}\right\}\sqrt{(u^{\text{IV}} - p)} \left.\begin{matrix}+\\-\\+\\+\\-\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{(u^{\text{V}} - p)}$$

$$\left.\begin{matrix}+\\-\\+\\-\\+\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{(u^{\text{VI}} - p)} \left.\begin{matrix}+\\-\\+\\-\\-\\+\end{matrix}\right\}\sqrt{(u^{\text{VII}} - p)} \left.\begin{matrix}+\\-\\-\\+\\+\\-\end{matrix}\right\}\sqrt{(u^{\text{VIII}} - p)} \left.\begin{matrix}+\\-\\-\\+\\-\\+\end{matrix}\right\}\sqrt{(u^{\text{IX}} - p)} \left.\begin{matrix}+\\-\\-\\-\\+\\+\end{matrix}\right\}\sqrt{(u^{\text{X}} - p)}\Big].$$

Si l'on veut n'employer qu'une valeur de u, on aura

$$x^3 - x^2 \sqrt{(u - p)} + \Lambda x - \tfrac{1}{2} (w + \sqrt{w^2 - 4t}) = 0;$$

en ſuppoſant

$$\Lambda^2 - u\Lambda + r + \sqrt{(u - p)}\, (w^2 - 4t) = 0 .$$

& les deux équations citées précédemment,

$$(w + q)^3 - (u - p)(u^2 - 4r)(w + q) + 4(u - p)^2 (uw + 2s) = 0$$

$$(u^2 - 4r)(w + q)^2 + 16 (u - p)^2 (w^2 - 4t)$$
$$+ 4 (u - p)(w + q)(uw + 2s) - (u - p)(u^2 - 4r)^2 = 0$$

où la valeur de w' en fonction des racines eſt $abc + def$.

XXXII. C'eſt donc à l'équation du dixième degré ci-deſſus que l'on parvient, par la ſuppoſition que la propoſée du ſixième eſt le produit de deux du troiſième. C'eſt de même à celles du quinzième degré de l'*article XXX*, qu'on arrive en la supposant le produit de trois du second : ainsi les motifs d'option entre le procédé de cet *article XXX*, & celui de l'*article XXXI*, dépendent de la nature des racines, dans les cas particuliers; quoique celui-ci se ramène facilement au premier ; car si l'on fait

$$\begin{aligned} ac + ae + ce + bd + bf + df &= u'', \\ ac + af + cf + bd + be + de &= u''', \\ ad + ae + de + bc + bf + cf &= u^{\text{IV}}, \\ ad + af + df + bc + be + ce &= u^{\text{V}}; \end{aligned}$$

les coëfficiens de l'équation qui aura ces quatre racines, se déduiront du même *type partiel* que u' & w'^2 de l'*article XXX*. Celui du second terme, par exemple, sera

$$- 2\,(AB) + 2\,(ab + cd + ef),$$

& ainsi des autres.

Il faut appliquer ces réflexions à l'équation dont les six racines seroient

$$\Big[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{III}}{\beta}\,\underset{\text{IV}}{\gamma}\,\underset{\text{II}}{\delta}\,\underset{\text{I}}{\varepsilon}\Big],\quad \Big[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{IV}}{\beta}\,\underset{\text{I}}{\varepsilon}\,\underset{\text{II}}{\gamma}\,\underset{\text{III}}{\delta}\Big],\quad \Big[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{II}}{\beta}\,\underset{\text{IV}}{\delta}\,\underset{\text{I}}{\varepsilon}\,\underset{\text{III}}{\gamma}\Big],$$

$$\Big[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{III}}{\beta}\,\underset{\text{IV}}{\gamma}\,\underset{\text{II}}{\varepsilon}\,\underset{\text{I}}{\delta}\Big]\Big],\quad \Big[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{IV}}{\beta}\,\underset{\text{I}}{\delta}\,\underset{\text{II}}{\gamma}\,\underset{\text{III}}{\varepsilon}\Big]\Big],\quad \Big[\underset{*}{\alpha}\,\underset{\text{II}}{\beta}\,\underset{\text{IV}}{\varepsilon}\,\underset{\text{I}}{\delta}\,\underset{\text{III}}{\gamma}\Big]\Big].$$

Mais nous dirons un mot auparavant de certaines équations plus simples qui ont de l'affinité avec elle.

XXXIII. L'équation qui auroit les six racines

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma,\ a^\gamma b^\alpha c^\beta,\ a^\beta b^\gamma c^\alpha,$$

$$a^\alpha b^\gamma c^\beta,\ a^\beta b^\alpha c^\gamma,\ a^\gamma b^\beta c^\alpha,$$

par exemple, conduit par les procédés des *articles XXX & XXXI*, à des équations du premier degré; & si l'on fait $a^\alpha b^\beta c^\gamma = u'$, &c. on aura

$$u^2 - \Phi u + \Psi = 0;$$

$$\Phi^3 - (A^\alpha B^\beta C^\gamma)\,\Phi^2 + [(A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\beta} C^{2\gamma})$$
$$+ (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{2\beta}) + (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\gamma} C^{\beta+\gamma})]\,\Phi$$
$$= [(A^{\alpha+2\beta} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+2\gamma})$$

$$+ 2\,(A^{\alpha+\beta+\gamma}\ B^{\alpha+\beta+\gamma}\ C^{\alpha+\beta+\gamma})] = 0;$$

$$\Psi^3 - (A^{2\alpha}\ B^{\beta+\gamma}\ C^{\beta+\gamma})\,\Psi^2$$
$$+ (A^{2\alpha+\beta+\gamma}\ B^{2\alpha+\beta+\gamma}\ C^{2\beta+2\gamma})\,\Psi$$
$$- (A^{2\alpha+2\beta+2\gamma}\ B^{2\alpha+2\beta+2\gamma}\ C^{2\alpha+2\beta+2\gamma}) = 0;$$

ou bien

$$u^3 - \Gamma u^2 + \Lambda u - (A^{\alpha+\beta+\gamma}\ B^{\alpha+\beta+\gamma}\ C^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0,$$

$$\Gamma^2 - (A^{\alpha}\ B^{\beta}\ C^{\gamma})\,\Gamma + [(A^{2\alpha}\ B^{\beta+\gamma}\ C^{\beta+\gamma})$$
$$+ (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\beta}\ C^{2\gamma}) + (A^{\alpha+\gamma}\ B^{\alpha+\gamma}\ C^{2\beta})] = 0,$$

$$\Lambda^2 - (A^{\alpha+\beta}\ B^{\alpha+\gamma}\ C^{\beta+\gamma})\,\Lambda$$
$$+ [(A^{2\alpha+2\beta}\ B^{\alpha+\beta+2\gamma}\ C^{\alpha+\beta+2\gamma})$$
$$+ (A^{2\alpha+\beta+\gamma}\ B^{2\alpha+\beta+\gamma}\ C^{2\beta+2\gamma})$$
$$+ (A^{2\alpha+2\gamma}\ B^{\alpha+2\beta+\gamma}\ C^{\alpha+2\beta+\gamma})] = 0.$$

Dans le cas d'une ſubſtitution de valeurs déterminées pour α, β & γ, il ne faut pas oublier nos ſuppoſitions. Si, par exemple, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$; on aura

$$\Gamma^2 - (A^2 B)\,\Gamma + [(A^4 BC) + (A^3 B^3) + 3\,(A^2 B^2 C^2)] = 0;$$

parce que $(A^{\alpha+\gamma}\ B^{\alpha+\gamma}\ C^{2\beta})$ repréſente trois termes, & que $(A^2\ B^2\ C^2)$ n'en repréſente qu'un.

L'équation dont les ſix racines ſeroient

$$[\underset{\text{III}}{\alpha}\ \underset{\text{IV}}{\beta}\ \underset{\text{II}}{\gamma}\ \underset{\text{I}}{\delta}],\ [\underset{\text{IV}}{\alpha}\ \underset{\text{I}}{\delta}\ \underset{\text{II}}{\beta}\ \underset{\text{III}}{\gamma}],\ [\underset{\text{II}}{\alpha}\ \underset{\text{IV}}{\gamma}\ \underset{\text{I}}{\delta}\ \underset{\text{III}}{\beta}];$$
$$[\underset{\text{III}}{\alpha}\ \underset{\text{IV}}{\beta}\ \underset{\text{II}}{\delta}\ \underset{\text{I}}{\gamma}],\ [\underset{\text{IV}}{\alpha}\ \underset{\text{I}}{\gamma}\ \underset{\text{II}}{\beta}\ \underset{\text{III}}{\delta}],\ [\underset{\text{II}}{\alpha}\ \underset{\text{IV}}{\delta}\ \underset{\text{I}}{\gamma}\ \underset{\text{III}}{\beta}];$$

traitée par le procédé de l'*article XXXI*, conduit à une équation du dixième degré, réſoluble en deux facteurs rationels, l'un du quatrième degré, & l'autre du ſixième; mais traitée par celui de l'*article XXX*, elle conduit à une équation du premier: ainſi en y ſuppoſant $[\underset{\text{III}}{\alpha}\,\underset{\text{IV}}{\beta}\,\underset{\text{II}}{\gamma}\,\underset{\text{I}}{\delta}] = u'$, &c. &

$$u^2 - \Phi u + \Psi = 0,$$

Fff ij

les coëfficiens des équations du troisième degré en Φ & Ψ sont des *types ;* ce qu'il est facile de prouver *à priori,* puisque $[\alpha\beta\gamma\delta]_{\text{III IV II I}} + [\alpha\beta\delta\gamma]_{\text{III IV II I}}$ est un *type partiel*, & dépend du troisième degré, & que $[\alpha\beta\gamma\delta]_{\text{III IV II I}} \times [\alpha\beta\delta\gamma]_{\text{III IV II I}}$ est de la forme $[abcd]_{\text{III IV II I}} + [abdc]_{\text{III IV II I}}$.

XXXIV. Il faut observer au sujet de l'équation dont les six racines seroient $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]_{*\ \text{III IV II I}}$, &c. qu'elle devient du troisième degré, comme les deux de l'article précedent, si l'on y fait $a = b$, ou $a = c$, ou $b = c$, &c.

Il faut observer encore que, si au lieu du premier système d'équations entre les valeurs de r *(article VIII),* on eût employé le second, on eût eu $[\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta]]_{*\ \text{III IV II I}}$ au lieu de $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]_{*\ \text{III IV II I}}$; & que dans les dispositions des lettres $a, b, c, d, e,$ qui amèneroient par le premier système, $[\alpha\beta\varepsilon\gamma\delta]_{*\ \text{IV I II III}}$ & $[\alpha\beta\delta\varepsilon\gamma]_{*\ \text{II IV I III}}$, on auroit par le second, $[\alpha\beta\delta\gamma\varepsilon]]_{*\ \text{IV I II III}}$ & $[\alpha\beta\varepsilon\delta\gamma]]_{*\ \text{IV II I III}}$.

Les coëfficiens de l'équation qui auroit ces six racines, sont faciles à obtenir en *types* : car au moyen des remarques de l'*article XXVI,* on chercheroit la somme des carrés de ces racines, la somme de leurs cubes, &c. ce qui n'exige que de calculer un seul des carrés, ou un seul des cubes; & on en concluroit par l'*article V,* la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois, &c. La solution générale du cinquième degré se trouveroit ramenée par-là, à des recherches sur une équation particulière du sixième, dont les coëfficiens seroient des fonctions rationelles de ceux de la proposée : substituant alors dans les équations du 15.^{e} & du 10.^{e} degré d'où dépend généralement le sixième, lesquelles se calculeroient de la même manière; & si elles ne se réduisoient pas, substituant de nouveau dans celles d'où dépendent généralement le 15.^{e} & le 10.^{e} degré, &c. il faudroit, si le cinquième degré est résoluble généralement, qu'on arrivât en dernière analyse à des équations qui eussent des facteurs rationels, du quatrième degré au plus ; & que dans l'usage à faire des racines de ces facteurs égalés à zéro, on ne fût obligé de passer que par des équations d'un degré moindre que le cinquième. Mais nous pouvons suivre le fil de ces recherches, sans calculer les équations même, en substituant constamment leurs racines pour *a, b, c, d, e, f,* &c. dans les différentes formes élémentaires de quantités qui sont indifféremment l'une de six, de dix, de quinze, &c. car le nombre de changemens produits par les différentes substitutions possibles d'une lettre pour l'autre, nous donnera toujours le nouvel état de la difficulté ; & si quelque chose nous empêche d'épuiser successivement par ce moyen toutes les possibilités, ce ne sera que la longueur des calculs.

Il s'agit d'abord de substituer nos six racines dans les *articles XXX & XXXI.*

1.° Si, dans l'*article XXX*, on fait cette substitution dans l'ordre suivant,

$$\left[\underset{*}{\alpha}\underset{\text{III}}{\beta}\underset{\text{IV}}{\gamma}\underset{\text{II}}{\delta}\underset{\text{I}}{\varepsilon}\right] \quad \text{pour } a$$

$$\left[\underset{*}{\alpha}\underset{\text{IV}}{\beta}\underset{\text{I}}{\varepsilon}\underset{\text{II}}{\gamma}\underset{\text{III}}{\delta}\right] \quad \text{pour } b$$

$$\left[\underset{*}{\alpha}\underset{\text{II}}{\beta}\underset{\text{IV}}{\delta}\underset{\text{I}}{\varepsilon}\underset{\text{III}}{\gamma}\right] \quad \text{pour } c$$

$$\left[\alpha\underset{\text{III}}{\beta}\underset{\text{IV}}{\gamma}\underset{\text{II}}{\varepsilon}\underset{\text{I}}{\delta}\right]] \quad \text{pour } d$$

$$\left[\underset{*}{\alpha}\underset{\text{II}}{\beta}\underset{\text{IV}}{\varepsilon}\underset{\text{I}}{\delta}\underset{\text{III}}{\gamma}\right]] \quad \text{pour } e$$

$$\left[\underset{*}{\alpha}\underset{\text{IV}}{\beta}\underset{\text{I}}{\delta}\underset{\text{II}}{\gamma}\underset{\text{III}}{\varepsilon}\right]] \quad \text{pour } f$$

on trouvera que u' & w'^2 de cet *article XXX* ne dépendent plus du quinzième degré, mais dépendent du cinquième : l'équation qui a pour racines, u', u'', u''', u^{IV} & u^{V}, devient entièrement rationelle, & les autres valeurs de u dépendent du 10.$^{\text{e}}$ degré.

Ainsi la résolution générale du cinquième degré est ramenée par-là, à la résolution d'une, ou, si l'on veut, de plusieurs équations particulières de ce même cinquième degré : mais les racines de ces équations particulières se déduisent des mêmes *types partiels* que les racines de la proposée, c'est-à-dire de $\left[\underset{\substack{\text{I}\\ \text{I}\\ \text{I}}}{\mathrm{a}}\ \underset{\substack{\text{II}\\ \text{II}\\ \text{IV}}}{\mathrm{b}}\ \underset{\substack{\text{V}\\ \text{III}\\ \text{V}}}{\mathrm{c}}\ \underset{\substack{\text{III}\\ \text{V}\\ \text{III}}}{\mathrm{d}}\ \underset{\substack{\text{IV}\\ \text{IV}\\ \text{II}}}{\mathrm{e}}\right]$, &c.

2.° Si l'on fait les ſubſtitutions analogues, dans l'*article XXXI*, on trouve dix valeurs de u, leſquelles ſe déduiſent des mêmes *types partiels* que les autres quantités dépendantes du dixième degré, dont je viens de parler; (leur forme eſt $\left[\underset{\substack{\mathrm{I}\\ \mathrm{II}}}{\alpha}\underset{\substack{\mathrm{III}\\ \mathrm{III}}}{\beta}\underset{\substack{\mathrm{II}\\ \mathrm{I}}}{\gamma}\underset{\substack{\mathrm{IV}\\ \mathrm{V}}}{\delta}\underset{\substack{\mathrm{V}\\ \mathrm{IV}}}{\varepsilon}\right]$, &c.) & l'équation du 126.^e degré où l'on arrive en faiſant une quantité qui ſoit l'une de dix, ſans élever d'autres puiſſances que des carrés, ſe réſout, pour ce cas, en ſix facteurs rationels du ſixième degré dont les racines ſe déduiſent des *types partiels* $\left[\underset{*}{a}\underset{\mathrm{III}}{b}\underset{\mathrm{IV}}{c}\underset{\mathrm{II}}{d}\underset{\mathrm{I}}{e}\right]$, &c. d'où l'on eſt parti, & en ſix facteurs rationels du quinzième degré dont les racines ſe déduiſent des mêmes *types partiels* que les ſommes ou les produits deux à deux des précédens, c'eſt-à-dire de $\left[\underset{\substack{\mathrm{I}\\ \mathrm{I}}}{\alpha}\underset{\substack{\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}}}{\beta}\underset{\substack{\mathrm{III}\\ \mathrm{V}}}{\gamma}\underset{\substack{\mathrm{V}\\ \mathrm{III}}}{\delta}\underset{\substack{\mathrm{IV}\\ \mathrm{II}}}{\varepsilon}\right]$, &c. Enfin, l'équation du 945.^e degré où l'on arrive en faiſant une quantité qui ſoit l'une de dix, avec des radicaux cinquièmes ſeulement, n'a, pour ce cas, aucun facteur d'un degré inférieur au cinquième, & ſes racines ſe déduiſent toutes de quelqu'une des formes ci-deſſus.

Voilà tout ce que le calcul m'a appris ſur cet objet, & je n'ai pas aſſez de foi aux conjectures dans une matière auſſi épineuſe, pour oſer m'y livrer ici. J'ajouterai ſeulement que je n'ai trouvé aucun *type partiel* compoſé de cinq lettres, qui dépendît du quatrième degré, ni du troiſième; & que je ſuis convaincu qu'il n'en exiſte pas: mais il y en a un qui dépend du ſecond degré; c'eſt

$$\begin{aligned}&\left[\underset{\mathrm{V}}{\alpha}\underset{\mathrm{III}}{\beta}\underset{\mathrm{IV}}{\gamma}\underset{\mathrm{I}}{\delta}\underset{\mathrm{II}}{\varepsilon}\right] + \left[\underset{\mathrm{V}}{\alpha}\underset{\mathrm{III}}{\beta}\underset{\mathrm{IV}}{\delta}\underset{\mathrm{I}}{\varepsilon}\underset{\mathrm{II}}{\gamma}\right] + [\alpha\beta\varepsilon\gamma\delta]\\ &+ [\alpha\gamma\beta\varepsilon\delta] + [\alpha\gamma\varepsilon\delta\beta] + [\alpha\gamma\delta\beta\varepsilon]\\ &+ [\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma] + [\alpha\delta\beta\gamma\varepsilon] + [\alpha\delta\gamma\varepsilon\beta]\\ &+ [\alpha\varepsilon\delta\gamma\beta] + [\alpha\varepsilon\gamma\beta\delta] + [\alpha\varepsilon\beta\delta\gamma]\end{aligned}$$

d'où l'on déduit en général, que dans le cas des valeurs particulières de a, b, c, d, e, f, ci-deſſus, le *type partiel*

$$\left[\underset{\mathrm{I}}{\alpha}\underset{\mathrm{V}}{\beta}\underset{\mathrm{VI}}{\gamma}\underset{\mathrm{III}}{\delta}\underset{\mathrm{IV}}{\varepsilon}\underset{\mathrm{II}}{\zeta}\right] + [\beta\gamma\alpha\zeta\delta\varepsilon] + [\gamma\alpha\beta\varepsilon\zeta\delta]$$

$$+ [\alpha_{\mathrm{I}} \zeta_{\mathrm{V}} \varepsilon_{\mathrm{VI}} \delta_{\mathrm{III}} \gamma_{\mathrm{IV}} \beta_{\mathrm{II}}] + [\zeta \varepsilon \alpha \beta \delta \gamma] + [\varepsilon \alpha \zeta \gamma \beta \delta]$$
$$+ [\delta \zeta \gamma \alpha \varepsilon \beta] + [\zeta \gamma \delta \beta \alpha \varepsilon] + [\gamma \delta \zeta \varepsilon \beta \alpha]$$
$$+ [\delta \beta \varepsilon \alpha \gamma \zeta] + [\beta \varepsilon \delta \zeta \alpha \gamma] + [\varepsilon \delta \beta \gamma \zeta \alpha]$$

dépend du ſecond degré, comme celui de l'*article XXX*, dont il fait partie, dépend du premier.

Au reſte, il ne ſuffit peut-être pas, pour prononcer ſur la poſſibilité de la réſolution générale, de ſe borner à la ſimple recherche de la forme des réſultats; parce que dans tel cas où l'on ſait *à priori* devoir arriver à la forme $[a_{*} b_{\mathrm{III}} c_{\mathrm{IV}} d_{\mathrm{II}} e_{\mathrm{I}}]$, il faut ſavoir de plus, par exemple, ſi l'on n'aura pas dans tous les termes, les égalités $e = d = c$, qui font de ce *type partiel*, un *type* complet; il faut ſavoir ſi ceux des termes où l'on n'auroit pas $e = d = c$, ne ſeroient pas compris ſous la forme $[\alpha_{*} \beta_{\mathrm{III}} \gamma_{\mathrm{IV}} \delta_{\mathrm{II}} \varepsilon_{\mathrm{I}}] + 2[\alpha_{*} \beta_{\mathrm{III}} \delta_{\mathrm{IV}} \gamma_{\mathrm{II}} \varepsilon_{\mathrm{I}}]$, dont les égalités $\gamma = \beta$, $\varepsilon = \delta$, font encore un *type* complet; &c. car les valeurs particulières des expoſans, leurs rapports déterminés dans la ſuite de *types partiels* conformes d'où l'on ſera parti, peuvent faire que ces égalités aient lieu, à cette période du calcul.

XXXV. Dans les cas particuliers où l'on a des équations entre les racines, la méthode que nous venons d'expoſer peut ſervir à réſoudre, ſans paſſer par les formules générales de réſolution.

L'équation $r^{11} - 1 = 0$ nous en fournira un exemple: elle conduit (*article VI*) à celle-ci,

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0,$$

dont les racines étant a, b, c, d, e, on aura par une ſuite très-ſimple de l'*article XI*.

$$\begin{array}{llll}
a^2 = -b + 2 & b^2 = -d + 2 & c^2 = -e + 2 & d^2 = -c + 2 \\
ab = -a - c & bc = -a - e & cd = -a - d & de = -a - b \\
ac = -b - d & bd = -b - e & ce = -b - c & \\
ad = -c - e & be = -c - d & & e^2 = -a + 2 \\
ae = -d - e, & & &
\end{array}$$

& tous les *types partiels* de la forme $[\underset{v}{a}\underset{i}{b}\underset{iv}{c}\underset{ii}{d}\underset{iii}{e}]$ auront une valeur purement rationelle; ainsi, en prenant par-tout dans l'*article XXVIII* $[\underset{v}{\alpha}\underset{i}{\beta}\underset{iv}{\varepsilon}\underset{ii}{\delta}\underset{iii}{\gamma}]$ au lieu de $[\underset{v}{\alpha}\underset{iii}{\beta}\underset{iv}{\gamma}\underset{i}{\delta}\underset{ii}{\varepsilon}]$, on trouvera

$$u' = 6;\ \varphi' = 26,\ \varphi'' = -18,\ \varphi''' = -51,\ \varphi^{\text{IV}} = 4.$$

On a aussi $(A^5) = 16$, $(ABCDE) = 1$, $(A) = 1$; d'où

$$x = \tfrac{1}{5}\,[1 + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{\text{IV}}]$$

en substituant les valeurs

$$\Delta' = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}\,(89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})}$$
$$\Delta'' = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}\,(89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})}$$
$$\Delta''' = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}\,(89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})}$$
$$\Delta^{\text{IV}} = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}\,(89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})}$$

XXXVI. Comme pour résoudre l'équation

$$\left.\begin{matrix} x^m - x^{m-1} & + \&c. \\ -\overline{m-1}\,x^{m-2} & \end{matrix}\right\} = 0,$$

il n'est question au plus que de déterminer *(article VI)* la quantité qui est indifféremment l'une de ses racines, & nullement de faire qu'il soit indifférent d'y échanger ces racines entre elles, cette résolution nous sera toujours très-facile.

Ainsi, des trois conditions distinctes de la résolution générale des Équations *(article IV)*, la première *(article VI)* & la troisième *(article V)* sont toujours rigoureusement en notre pouvoir; & nous avons pour remplir la seconde, une marche directe & uniforme *(article XXXIV)* qui n'a de difficulté que par sa longueur inévitable.

SUR LA