Sur le groupe des automorphismes d'un arbre [81]

Essays on topology and related topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham), Springer-Verlag, Berlin 1970, 188–211
[Zbl 0214.51301; MR 45 #8582]

1. Introduction

Le but de cet article est l'étude de la structure du groupe des automorphismes d'un arbre, c'est-à-dire d'un graphe connexe sans circuit. Les principaux résultats obtenus sont résumés dans l'énoncé suivant:

Soient A un arbre, $\mathrm{Aut}\,A$ *le groupe de ses automorphismes et* $\mathrm{Aut}^+ A$ *le sous-groupe engendré par les stabilisateurs des points de ramification de A dans* $\mathrm{Aut}\,A$. *Alors* $\mathrm{Aut}\,A/\mathrm{Aut}^+ A$ *est un produit libre de groupes cycliques infinis (groupes isomorphes à* $\mathbf{Z}$*) et de groupes d'ordre* 2. *Si* $\mathrm{Aut}\,A$ *ne conserve aucun sous-arbre propre non vide ni aucun bout de A* (cf. 2.4), *tout sous-groupe de* $\mathrm{Aut}\,A$ *normalisé par* $\mathrm{Aut}^+ A$ *est réduit à l'élément neutre ou contient* $\mathrm{Aut}^+ A$; *en particulier, le groupe* $\mathrm{Aut}^+ A$ *est simple ou réduit à l'élément neutre.*

De plus, étant donnés deux cardinaux quelconques c_∞ et c_2, il existe des arbres A tels que l'hypothèse faite sur $\mathrm{Aut}\,A$ dans l'énoncé précédent soit satisfaite et que $\mathrm{Aut}\,A/\mathrm{Aut}^+ A$ soit le produit libre de c_∞ groupe cycliques infinis et de c_2 groupes d'ordre 2: les généralités du § 5 et la proposition 6.7 donnent le moyen de construire explicitement une grande variété d'arbres (et même, en principe, tous les arbres) ayant ces propriétés.

En fait, au lieu de considérer le groupe de tous les automorphismes d'un arbre, nous nous plaçons dans une situation à la fois plus générale et conduisant à des énoncés plus simples et plus «naturels» en étudiant plutôt le groupe $\mathrm{Aut}_f A$ des automorphismes d'un arbre A qui sont compatibles avec une fonction f définie sur l'ensemble des sommets de A (c'est-à-dire des automorphismes α tels que $f\circ\alpha=f$).

Une classe d'arbres qui se présente de façon particulièrement naturelle est celle des arbres *homogènes*, c'est-à-dire dont tous les sommets appartiennent à un même nombre n d'arêtes. Si $n\geqslant 3$, le groupe $\mathrm{Aut}^+ A$ est alors un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{Aut}\,A$. La question de savoir si le groupe $\mathrm{Aut}^+ A$ est simple pour un arbre A homogène (et, plus généralement, pour un arbre A tel que $\mathrm{Aut}^+ A$ ait exactement deux orbites dans l'ensemble des sommets de A) et été posée à l'auteur par J.-P. Serre, qui avait déjà observé que, pour un tel arbre, $\mathrm{Aut}^+ A$ est *topologiquement simple* (pour la topologie $\mathcal{T}_b$ définie en 2.5). On notera que ce résultat, et l'extension que nous en donnons ici, fournissent une grande variété de groupes topologiques simples localement compacts non isomorphes (cf. le § 8). Signalons enfin que la question précitée de J.-P. Serre, qui est à l'origine du présent article, a elle-même été motivée par une analogie avec les groupes algébriques simples, et plus particulièrement le groupe SL_2, sur un corps local (cf. le n° 3.6 pour plus de détails; c'est aussi J.-P. Serre qui a attiré notre attention sur les applications 3.6.1 et 3.6.2 des propositions 3.3 et 3.4).

Je remercie F. Bruhat et J.-P. Serre dont les commentaires m'ont été fort utiles.

2. Terminologie. Notations. Généralités

2.1. Un *graphe* est un système formé d'un ensemble S, dont les éléments sont appelés les *sommets* du graphe et d'un ensemble de parties à deux éléments de S, nommées *arêtes*. L'ensemble des sommets (resp. des arêtes) d'un graphe X est noté $S(X)$ (resp. $\mathrm{Ar}(X)$). Un *morphisme* d'un graphe Y dans un graphe X est par définition une application $f\colon S(Y) \dashrightarrow S(X)$ telle que l'image par f de toute arête de Y soit une arête de X. Un *sous-graphe* d'un graphe X est un graphe Y tel que $S(Y) \subset S(X)$ et que l'application d'inclusion $S(Y) \dashrightarrow S(X)$ soit un morphisme; le sous-graphe Y est dit *plein* si toute arête de X contenue dans $S(Y)$ est une arête de Y. On définit *l'intersection d'une famille* $(Y_i)_{i\in I}$ *de sous-graphes d'un graphe* X comme étant le sous-graphe Y tel que $S(Y) = \bigcap_{i\in I} S(Y_i)$ et $\mathrm{Ar}(Y) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ar}(Y_i)$.

Deux sommets s, s' d'un graphe X sont dits *voisins* (sur X) si $\{s, s'\} \in \mathrm{Ar}(X)$. Le cardinal de l'ensemble des sommets voisins d'un sommet s donné est appelé *l'ordre* de s. Un sommet d'ordre $\leqslant 1$ est dit *pendant*; un sommet d'ordre $\geqslant 3$ est appelé un *point de ramification*.

2.2. Soient $a \in \{-\infty\} \cup \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leqslant b$. Notons $\mathrm{Ch}(a,b)$ le graphe dont les sommets sont les entiers z tels que $a \leqslant z \leqslant b$, et ayant pour arêtes les paires de sommets de la forme $\{z, z+1\}$. Nous écartant un peu de la terminologie reçue, nous appelons *chaîne* tout graphe isomorphe à l'un des graphes $\mathrm{Ch}(a,b)$ ainsi définis; une chaîne est *finie* de *longueur* n (resp. *simplement infinie*; resp. *doublement infinie*) si elle est isomorphe à $\mathrm{Ch}(0,n)$ (resp. $\mathrm{Ch}(0,+\infty)$; resp. $\mathrm{Ch}(-\infty,+\infty)$). Les deux bouts pendants d'une chaîne finie sont aussi appelés ses *extrémités.* Soit $a \in \mathbf{N}$; un automorphisme d'une chaîne doublement infinie est appelé une *translation* d'amplitude a s'il existe un isomorphisme de cette chaîne sur $\mathrm{Ch}(-\infty, +\infty)$ qui transforme l'automorphisme en question en l'automorphisme $z \mapsto z+a$.

Un morphisme f de $\mathrm{Ch}(0,n)$ dans un graphe X est appelé un *chemin* de *longueur* n, *d'origine* $f(0)$ et *d'extrémité* $f(n)$; si $f(0)=f(n)$, le chemin est dit *fermé*. Si, pour un entier $i \in [1, n-1]$, on a $f(i+1) = f(i-1)$, le sommet $f(i)$ est appelé un *point de rebroussement* du chemin f. Une *suite enchaînée* est, par définition, un chemin sans point de rebroussement; en particulier, un couple enchaîné est un couple de points voisins.

La *distance de deux sommets* y, z d'un graphe X, notée $d_X(y,z)$, est définie comme étant la borne inférieure de la longueur d'un chemin d'origine y et d'extrémité z dans X; s'il n'existe pas de tel chemin, on la pose égale à ∞. La *distance de deux parties* Y, Z de $S(X)$ (ou de deux sous-graphes Y, Z de X) est le nombre

$$d_X(Y,Z) = \inf\{d_X(y,z) \mid y \in Y,\ z \in Z\}.$$

Une partie Y de $S(X)$ est dite *bornée* si $d_X(y,z)$ est bornée pour $y, z \in Y$.

Un graphe est dit *connexe* si la distance de deux quelconques de ses sommets est finie. Les *composantes connexes* d'un graphe se définissent de façon évidente.

Le *groupe fondamental* d'un graphe connexe X est par définition le groupe fondamental de l'espace topologique obtenu en «réalisant» les arêtes de X par des segments (répliques de l'intervalle fermé $[0,1]$ de $\mathbf{R}$) et en munissant l'ensemble obtenu de la topologie la plus fine induisant sur ces segments leur topologie naturelle; ce groupe est libre.

2.3. On appelle *arbre* tout graphe A tel que, pour $x, y \in S(A)$, il existe une et une seule suite enchaînée d'origine x et d'extrémité y.

Tout sous-graphe connexe B d'un arbre A est lui-même un arbre, appelé un *sous-arbre* de A. Les sous-arbres sont des sous-graphes pleins.

Soit C une arête de l'arbre A. Le sous-graphe de A ayant $S(A)$ pour ensemble de sommets et $\mathrm{Ar}(A) - \{C\}$ pour ensemble d'arêtes possède deux composantes connexes, qui sont des sous-arbres de A; nous les appelons les *demi-arbres, complémentaires* l'un de l'autre, *déterminés par* C.

Soient x, y deux sommets voisins d'un arbre A et z un sommet quelconque; on a alors

$$d_A(x,z) = d_A(y,z) \pm 1;$$

si $d_A(x,z) = d_A(y,z)+1$, nous disons que le couple (x,y) est *dirigé vers* z.

Soient B un sous-arbre de l'arbre A et s un sommet de A. Alors, il existe un et un seul sommet s' de B tel que $d_A(s,s')=d_A(\{s\},B)$; c'est *le sommet de B le plus proche de s*.

2.4. Soit A un arbre. Introduisons dans l'ensemble des chaînes simplement infinies de A la relation d'équivalence suivante: deux telles chaînes C, C' sont équivalentes si $C \cap C'$ est une chaîne simplement infinie. Les classes de cette relation sont appelées les *bouts* de A.

Soit b un bout de A. Pour tout $x \in S(A)$, il existe une et une seule chaîne simplement infinie $C(b,x) \in b$ ayant x pour bout pendant. Pour $x, y \in S(A)$, l'entier

$$d_A(x,z)-d_A(y,z) \qquad (z \in C(b,x) \cap C(b,y))$$

est indépendant du choix de z; notons le $h_b(x,y)$. Si les sommets x, y sont voisins, on a $h_b(x,y)=\pm 1$; lorsque $h_b(x,y)=1$, nous disons que le couple enchaîné (x,y) est *dirigé vers b*. Choisissons arbitrairement une «origine» s_0 dans $S(A)$. Pour tout entier i, l'ensemble

$$\{x \in S(A) \mid h_b(x,s_0) \leqslant i\}$$

est l'ensemble des sommets d'un sous-arbre B_i de A. La suite emboîtée $(B_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ ne dépend pas, à la numérotation prés, du choix de s_0; nous dirons que les sous-arbres B_i sont *canoniquement associés* au bout b.

2.5. Soit G un groupe de permutations d'un ensemble X. Nous disons qu'un élément α de G *laisse invariante*, ou *conserve* (resp. *fixe*) une partie Y de X, ou un graphe ayant Y pour ensemble de sommets, si $\alpha(Y)=Y$ (resp. si $\alpha(y)=y$ pour tout $y \in Y$). Le groupe des éléments de G possédant cette propriété est appelé le *stabilisateur* (resp. le *fixateur*) de Y dans G.

Soient A un arbre, b un bout de A et G un groupe d'automorphismes de A. Nous disons qu'un élément de G *fixe b* s'il fixe une chaîne représentant b; l'ensemble des éléments de G fixant b, c'est-à-dire la réunion des fixateurs des éléments de b, est un sous-groupe de G, appelé *centralisateur* de b dans G.

Pour une partie F du groupe $\operatorname{Aut} A$ des automorphismes d'un arbre A, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) pour toute partie bornée B de $S(A)$, l'ensemble

$$FB=\{\alpha(x) \mid \alpha \in F, x \in B\}$$

est borné;

(ii) il existe $s \in S(A)$ tel que $F(s)=\{\alpha(s) \mid \alpha \in F\}$ soit borné.

Une partie de $\operatorname{Aut} A$ est dite *bornée* si elle possède ces propriétés; ceci munit $\operatorname{Aut} A$ d'une structure de groupe bornologique.

Les fixateurs dans $\operatorname{Aut} A$ des parties bornées (resp. finies) de $S(A)$ forment une base du filtre des voisinages de l'élément neutre pour une topologie $\mathscr{T}_b$ (resp. $\mathscr{T}_f$) faisant de $\operatorname{Aut} A$ un groupe topologique. Si tous les sommets de A sont d'ordre fini, $\mathscr{T}_b = \mathscr{T}_f$, le groupe $\operatorname{Aut} A$ est localement compact et une partie de $\operatorname{Aut} A$ est bornée si et seulement si son adhérence est compacte.

3. Trois espèces d'automorphismes

3.1. **Lemme.** *Soient A un arbre, x, y deux sommets voisins et α un automorphisme de A. Supposons que le couple (x,y) soit dirigé vers $\alpha(x)$ et que le couple $(\alpha(y),\alpha(x))$ soit dirigé vers x. Alors, il existe dans A une chaîne doublement infinie invariante par α sur laquelle α induit une translation non triviale.*

Soit C la chaîne d'extrémités x et $\alpha(x)$ dans A. Il résulte immédiatement des hypothèses de l'énoncé que les chaînes C et $\alpha(C)$ n'ont que le sommet $\alpha(x)$ en commun. De même, $\alpha^i(C)$ et $\alpha^{i+1}(C)$ n'ont que le sommet $\alpha^{i+1}(x)$ en commun. Il s'ensuit que la réunion des $\alpha^i(C)$ est une chaîne doublement infinie possédant les propriétés voulues.

3.2. **Proposition.** *Soient A un arbre, α un automorphisme de A et d le minimum de la distance $d_A(s,\alpha(s))$ lorsque s parcourt l'ensemble des sommets de A. Alors, une et une seule des trois conditions suivantes est remplie:*

(i) *α laisse fixe un sommet de A;*

(ii) *α permute deux sommets voisins;*

(iii) *il existe une chaîne C doublement infinie, invariante par α et sur laquelle α induit une translation non triviale.*

Dans le cas (iii), *la chaîne C est unique, α induit sur C une translation d'amplitude d et les sommets de C sont les seuls sommets s de A tels que $d_A(s,\alpha(s))=d$.*

Soit s un sommet de A tel que $d_A(s,\alpha(s))=d$. Si $d=0$, s est un point fixe de α et (i) est satisfaite. Soit $d\neq 0$ et soit t le sommet voisin de s tel que le couple (s,t) soit dirigé vers $\alpha(s)$. Si le couple $(\alpha(s),\alpha(t))$ est dirigé vers s, on doit avoir $\alpha(s)=t$ et $\alpha(t)=s$, d'où (ii), sans quoi $d_A(t,\alpha(t))$ serait strictement inférieur à $d_A(s,\alpha(s))=d$. Enfin, si $(\alpha(s),\alpha(t))$ n'est pas dirigé vers s, la condition (iii) est remplie, en vertu du lemme 3.1.

Les conditions (i) et (ii) s'excluent mutuellement, car si α laisse fixe un sommet s de A, deux sommets voisins l'un de l'autre, dont les distances à s sont nécessairement différentes, ne peuvent être permutés.

Nous supposerons dorénavant que la condition (iii) est remplie. Pour tout sommet x de A, soit $\pi(x)$ le sommet de C le plus proche de x. Il est clair que, pour tout x, la chaîne d'extrémités x, $\alpha(x)$ contient

$\pi(x)$ et $\alpha(\pi(x))$, de sorte que $d_A(x,\alpha(x))$ est supérieur à l'amplitude de la translation induite par α sur C et ne lui est égal que si $x=\pi(x)\in C$. Ceci établit les dernières assertions de l'énoncé. Pour achever la démonstration, il nous reste à observer qu'on ne peut avoir (i), puisque $d\neq 0$, ni (ii), car les deux sommets voisins permutés devraient appartenir à C ce qui est absurde.

3.3. **Corollaire.** *Pour un automorphisme α d'un arbre A, la propriété* (iii) *de* 3.2 *est équivalente à*

(iii') *l'ensemble $\{\alpha^i \mid i\in\mathbf{Z}\}$ des puissances de α n'est pas borné (pour la bornologie définie en* 2.5*).*

3.4. **Proposition.** *Si un groupe G d'automorphismes d'un arbre A ne renferme aucun élément possédant la propriété* (iii) *de* 3.2 *(i.e., par* 3.3, *si tous les éléments de G sont à puissances bornées), alors G est contenu dans le stabilisateur d'un sommet, dans le stabilisateur d'une arête ou dans le centralisateur d'un bout de A.*

Supposons que G ne soit contenu ni dans le stabilisateur d'un sommet ni dans celui d'une arête.

Pour tout $x\in S(A)$ et tout $\alpha\in G$ ne stabilisant pas x, soit $\sigma(x,\alpha)$ le sommet de A voisin de x et tel que le couple $(x,\sigma(x,\alpha))$ soit dirigé vers $\alpha(x)$. Ce sommet ne dépend que de x et non de α. En effet, supposons qu'il existe $\beta\in G$ ne stabilisant pas x et tel que $\sigma(x,\beta)\neq\sigma(x,\alpha)$. Vu l'hypothèse faite sur G et le lemme 3.1, les couples $(\alpha(x),\alpha(\sigma(x,\alpha)))$ et $(\beta(x),\beta(\sigma(x,\beta)))$ sont dirigés vers x. Mais alors, le couple $(\alpha(x),\alpha(\sigma(x,\beta)))$ n'est pas dirigé vers x, ni par conséquent vers $\beta(x)$, et en appliquant le lemme 3.1 au couple $(\beta(x),\beta(\sigma(x,\beta)))$ et à l'automorphisme $\alpha\circ\beta^{-1}$, on voit que celui-ci possède la propriété (iii) de 3.2, en contradiction avec l'hypothèse faite sur G. Nous poserons $\sigma(x)=\sigma(x,\alpha)$ pour tout $\alpha\in G$ ne stabilisant pas x.

Vu le caractère invariant de la définition de l'application $\sigma: S(A)\to S(A)$, on a $\alpha\circ\sigma=\sigma\circ\alpha$ pour tout $\alpha\in G$. Si $s\in S$, on ne peut avoir $\sigma^2(s)=s$, car cela impliquerait que G stabilise l'arête $\{s,\sigma(s)\}$. Pour tout $s\in S$, l'ensemble $\{\sigma^i(s)\mid i\in\mathbf{N}\}$ est donc l'ensemble des sommets d'une chaîne simplement infinie qui sera notée C_s.

Si s, $s'\in S(A)$ sont deux sommets voisins, on a $\sigma(s)=s'$ ou bien $\sigma(s')=s$. En effet, supposons qu'il en soit autrement et soit $\alpha\in G$. Alors (s,s') est dirigé vers $\alpha(s')$ et (s',s) est dirigé vers $\alpha(s)$. Puisque $\alpha(s)$ et $\alpha(s')$ sont voisins, cela implique que $\alpha(s)=s$ et $\alpha(s')=s'$, ce qui, étant vrai pour tout $\alpha\in G$, contredit l'hypothése selon laquelle G ne stabilise aucune arête de A.

Si s, s' sont deux sommets quelconques de A, l'intersection $C_s\cap C_{s'}$ est une chaîne simplement infinie; pour le montrer, on se ramène, par une induction évidente sur $d_A(s,s')$, au cas où s et s' sont voisins, auquel cas $C_{s'} \subset C_s$ on bien $C_s \subset C_{s'}$, ainsi qu'on vient de le voir. L'ensemble $b=\{C_s | s \in S(A)\}$ est donc un bout de A, manifestement invariant par G.

Pour achever la démonstration, il nous suffira de montrer que tout $\alpha \in G$ fixe b. Or, soit $x \in S(A)$ et soit s l'origine (bout pendant) de la chaîne simplement infinie $C_x \cap C_{\alpha(x)}$. On a $C_s \subset C_x$, d'où $C_{\alpha(s)} \subset C_{\alpha(x)}$, de sorte que $C_s \subset C_{\alpha(s)}$ ou bien $C_{\alpha(s)} \subset C_s$. Ceci implique que $C_s = C_{\alpha(s)}$, sinon la réunion

$$\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} C_{\alpha^i(s)}$$

serait une chaîne doublement infinie, invariante par α et sur laquelle α induirait une translation non triviale. Par conséquent, α fixe C_s et centralise donc b, c.q.f.d.

3.5. **Corollaire.** *Soient A un arbre et G un groupe d'automorphismes de A. Supposons que G possède au plus un point fixe dans l'ensemble des sommets de A, et ne soit pas contenu dans le centralisateur d'un bout. Alors, l'intersection de tous les sous-arbres non vides de A invariants par G n'est pas vide; autrement dit, il existe un plus petit sous-arbre non vide de A invariant par G.*

Vu la proposition 3.4, on a de trois choses l'une:

(i) G possède un point fixe s et un seul dans $S(A)$;

(ii) G conserve une arête $\{s,s'\}$ de A et il existe $\alpha \in G$ tel que $\alpha(s)=s'$, $\alpha(s')=s$;

(iii) il existe $\alpha \in G$ et une chaîne doublement infinie C invariante par α et sur laquelle α induit une translation non triviale.

Nous allons montrer, et ceci établira notre assertion, que dans le cas (i) (resp. (ii); resp. (iii)), tout sous-arbre B de A, non vide et invariant par G, contient s (resp. $\{s,s'\}$; resp. C). Soit x un sommet de B.

Dans le cas (i), nous pouvons évidemment supposer que $x \neq s$. Soit y le sommet voisin de s tel que (s, y) soit dirigé vers x, et soit α un élément de G ne fixant pas y. Alors, le chaîne d'extrémités $x, \alpha(x)$ contient s.

Dans le cas (ii), la chaîne d'extrémités $x, \alpha(x)$ contient s et s'.

Enfin, supposons remplie la condition (iii) et soit z le sommet de C le plus proche de x. Il est clair que la chaîne d'extrémités $x, \alpha(x)$ contient la chaîne d'extrémités $z, \alpha(z)$. Par conséquent, z est un sommet de B et il en est de même de $\alpha^i(z)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Comme α induit une translation non triviale sur C, ceci implique que C est contenue dans B. La démonstration est ainsi achevée.

3.6. **Exemple.** Soient k un corps local, $v: k^* \to \mathbf{Z}$ sa valuation, normalisée de telle façon que $v(k^*)=\mathbf{Z}$, $\mathfrak{o}$ l'anneau de valuation, $G=SL_2(k)$ le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad (p,q,r,s\in k;\, ps-qr=1), \tag{1}$$

P (resp. P') le sous-groupe des matrices (1) telles que $p,q,r,s\in\mathfrak{o}$ (resp. $p,s\in\mathfrak{o}$, $v(q)\geqslant -1$, $v(r)\geqslant 1$), T le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \quad (p\in k^*), \tag{2}$$

et B le groupe des matrices (1) telles que $r=0$.

Nous allons énoncer une série de propriétés de G résultant immédiatement de la théorie générale qu'on trouvera exposée dans [1], mais que le lecteur pourra aussi, s'il le désire, établir directement dans le cas particulier considéré. Soient S l'ensemble de tous les sous-groupes de G conjugués à P ou à P' et A le graphe ayant pour ensemble de sommets l'ensemble S et pour arêtes les paires de sous-groupes conjuguées à la paire $\{P,P'\}$. Ce graphe, appelé *l'immeuble* de G, est un arbre. Le groupe G opére sur A par les automorphismes intérieurs, ce qui définit un homomorphisme $G\to\mathrm{Aut}\,A$; la bornologie de G, image réciproque de la bornologie de $\mathrm{Aut}\,A$ définie en 2.5, coïncide avec la bornologie naturelle, définie à l'aide de la valuation de k. Les sommets tPt^{-1} et $tP't^{-1}$, avec $t\in T$, sont les sommets d'une chaîne doublement infinie C de A, et T est le groupe de tous les éléments de G conservant C et induisant sur C une translation; l'amplitude de la translation de C induite par la matrice (2) est $|2v(p)|$. Le groupe G permute transitivement les chaînes doublement infinies de A, de sorte que celles-ci correspondent biunivoquement aux conjugués de T dans A. De même, les bouts de A correspondent biunivoquement aux conjugués de B: le groupe des éléments de G conservant un bout donné est conjugué à B et tout conjugué de B stabilise un seul bout de A.

Appliqué aux éléments de G, le corollaire 3.3 donne le résultat (d'ailleurs assez évident) que voici:

3.6.1. *L'ensemble des puissances d'un élément* (1) *de* $SL_2(k)$ *de* G *n'est pas borné si et seulement si les valeurs propres de cet élément appartiennent à* k *et ne sont pas des unités de* $\mathfrak{o}$.

Quant à la proposition 3.4, on peut par exemple en déduire que:

3.6.2. *Le seul sous-groupe de* $SL_2(k)$ *non borné et ouvert (pour la topologie naturelle, déduite de celle de* k*) est le groupe tout entier.*

En effet, soit $H\subset G$ un sous-groupe ouvert non borné. Ce sous-groupe ne peut être contenu dans un conjugué de B, puisque B n'est pas ouvert. Par conséquent, H ne fixe aucun bout de A et, vu 3.4 et 3.6.1, on peut, quitte à remplacer H par un sous-groupe conjugué, supposer que H contient une matrice t de la forme (2), avec $v(p)\neq 0$. Soit U le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (q\in k). \tag{3}$$

Puisque H est ouvert, il existe un entier n tel que H contient le groupe U_n de toutes les matrices (3) telles que $v(q)\geqslant n$. Mais on a

$$\bigcup_{z\in \mathbf{Z}} t^z\cdot U_n\cdot t^{-z} = U.$$

De sorte que $U\subset H$. Pour la même raison, H contient le groupe V de touts les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque U et V engendrent G, notre assertion s'ensuit.

Ce qui précède se généralise directement au groupe $\mathscr{G}_k$ des points rationnels d'un groupe algébrique simple $\mathscr{G}$ quelconque, défini sur k et de k-rang 1, pour autant que le corps résiduel de k soit parfait (condition requise pour pouvoir faire appel à [1]). Les énoncés 3.6.1 et 3.6.2 sont alors remplacés par les suivants:

3.6.1′. *Un élément g de $\mathscr{G}_k$ dont l'ensemble des puissances n'est pas borné appartient au centralisateur $\mathscr{Z}(\mathscr{T})$ d'un tore k-déployé maximal de $\mathscr{G}$ et la valeur pour g d'un caractère non trivial quelconque de $\mathscr{Z}(\mathscr{T})$ n'est pas une unité de $\mathfrak{o}$.*

3.6.2′. *Tout sous-groupe ouvert non borné de $\mathscr{G}_k$ contient le groupe $G^\dagger$ engendré par les points rationnels des radicaux unipotents des sous-groupes paraboliques de $\mathscr{G}_k$.*

Rappelons qu'il est conjecturé [2] que, si $\mathscr{G}$ est simplement connexe, on a $G^\dagger=\mathscr{G}_k$. Il en est en tout cas ainsi lorsque le corps k est localement compact. Il est concevable que, pour la validité de l'assertion 3.6.2′, l'hypothèse faite sur le k-rang de $\mathscr{G}$ soit superflue.

4. Un théorème de simplicité

4.1. **Lemme.** *Soient A un arbre et G un groupe d'automorphismes de A. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *G ne conserve aucun sous-arbre propre non vide de A;*

(ii) *l'orbite Gs de tout sommet s de A a une intersection non vide avec tout demi-arbre* (*cf.* 2.3).

Supposons la condition (i) satisfaite. S'il existait un demi-arbre D disjoint de Gs, le plus petit sous-arbre de A contenant Gs serait contenu dans le demi-arbre complémentaire de D, et serait donc un sous-arbre propre de A, ce qui contredit l'hypothése.

Réciproquement, la condition (ii) étant supposée remplie, soient B un sous-arbre non vide de A, conservé par G, s un sommet de B et C une arête quelconque. Par hypothése, l'ensemble Gs, et a fortiori l'ensemble des sommets de B, a une intersection non vide avec les deux demi-arbres déterminés par C, ce qui implique que $C \subset B$. On a donc $B = A$, d'où (i).

Remarque. On peut voir que si A n'a pas de sommet pendant, les propriétés (i) et (ii) sont encore équivalentes à

(ii′) *il existe un sommet s de A tel que l'orbite Gs ait une intersection non vide avec tout demi-arbre.*

4.2. *La propriété* (*P*). Soient A un arbre, G un groupe d'automorphismes de A, C une chaîne (finie ou infinie) de A et F le fixateur de C dans G (cf. 2.5). Pour tout sommet x de A, soit $\pi(x)$ le sommet de C le plus proche de x. Pour tout sommet s de C, l'ensemble $\pi^{-1}(s)$ (ensemble des sommets d'un sous-arbre de A) est invariant par F; soit F_s le groupe de permutations de cet ensemble induit par F. Le produit direct des homomorphismes de restriction $F \to F_s$ est un homomorphisme

$$F \to \prod_{s \in S(C)} F_s. \tag{1}$$

Nous dirons que le groupe G posséde la propriété (*P*) si, quelle que soit la chaîne C, l'homomorphisme (1) est un isomorphisme (i.e., si les actions de F sur les ensembles $\pi^{-1}(s)$ sont «indépendantes les unes des autres»). *Il en est ainsi*, par exemple, *pour le groupe de tous les automorphismes de A*. Plus généralement, soit X l'ensemble de tous les sommets de A, ou de toutes ses arêtes, ou de tous ses bouts, ou encore de tous les couples de points voisins («arêtes dirigées»), et soit f une application de X dans un ensemble quelconque. Un automorphisme de A, qui induit de façon évidente une permutation α de X, est dit *compatible* avec f si $f \circ \alpha = f$. Alors, *le groupe de tous les automorphismes de A compatibles avec f posséde la propriété* (*P*).

4.3. **Lemme.** *Soient A, G, C, F, F_s définis comme en* 4.2. *Supposons C doublement infinie et soit g un élément de G conservant C et induisant sur C une translation non triviale. Supposons que l'homomorphisme* (1) *de* 4.2 *soit un isomorphisme. Alors*

$$(g, F) = \{g \cdot f \cdot g^{-1} \cdot f^{-1} \mid f \in F\} = F.$$

Soit h un élément quelconque de F. Nous devons montrer qu'il existe $f \in F$ tel que $(g, f) = g \cdot f \cdot g^{-1} \cdot f^{-1} = h$. Soient a l'amplitude de la translation de C induite par g et $\phi: \mathbf{Z} \to S(C)$ une bijection telle que, pour tout $z \in \mathbf{Z}$, on ait $g(\phi(z)) = \phi(z+a)$. Pour $z \in \mathbf{Z}$, posons $F_z = F_{\phi(z)}$, et désignons par h_z l'image canonique de h dans F_z et par $\gamma_z: F_z \to F_{z+a}$ l'isomorphisme induit par g. Pour $z \in \mathbf{Z}$, soit $f_z \in F_z$ défini inductivement de la façon suivante :

si $0 \leqslant z \leqslant a-1$, f_z est un élément de F_z choisi arbitrairement;

si $z \geqslant a$, $f_z = h_z^{-1} \cdot (\gamma_{z-a}(f_{z-a}))$;

si $z < 0$, $f_z = \gamma_z^{-1}(h_{z+a} \cdot f_{z+a})$.

Alors, un simple calcul montre que l'image f de $(f_z)_{z \in \mathbf{Z}}$ par l'inverse de l'isomorphisme 4.2 (1) possède la propriété voulue.

4.4. **Lemme.** *Soient A un arbre et X, Y des groupes d'automorphismes de A, tous deux non réduits à l'élément neutre, et tels que X normalise Y. Supposons que X ne conserve aucun sous-arbre propre non vide ni aucun bout de A. Alors il en est de même de Y, ou bien A est une chaîne doublement infinie.*

Le groupe Y ne laisse fixe aucun sommet de A, sinon l'ensemble des points fixes de Y dans $S(A)$ serait l'ensemble des sommets d'un sous-arbre propre non vide de A, invariant par X. De même, Y ne centralise aucun bout de A, car s'il en centralisait un seul, celui-ci serait invariant par X, et s'il centralisait deux, il posséderait des points fixes dans $S(A)$. Appliquant à présent le corollaire 3.5, nous voyons que l'intersection de tous les sous-arbres non vides de A invariants par Y est un sous-arbre non vide de A; celui-ci étant invariant par X, il doit être confondu avec A, c'est-à-dire que Y ne conserve aucun sous-arbre propre non vide de A. Supposons à présent que Y conserve un bout de A. Celui-ci ne peut être unique, sinon il serait invariant par X. Par conséquent, Y conserve au moins deux bouts de A, donc aussi une chaîne doublement infinie C; en vertu de la partie de l'énoncé déjà établie, on doit avoir $A = C$, ce qui achève la démonstration.

4.5. **Théorème.** *Soient A un arbre, G un groupe d'automorphismes de A et G^+ le sous-groupe engendré par les fixateurs des arêtes de A dans G. Supposons que G possède la propriété (P) (cf. 4.2) et ne conserve aucun sous-arbre propre non vide ni aucun bout de A. Alors, tout sous-groupe de G normalisé par G^+ et non réduit à l'élément neutre contient G^+. En particulier, G^+ est un groupe simple ou est réduit à l'élément neutre.*

Nous supposerons que G^+ n'est pas réduit à l'élément neutre, ce qui est évidemment loisible, et implique que A n'est pas une chaîne. Soit H un sous-groupe de G normalisé par G^+ et non réduit à l'élément neutre, C une arête quelconque de A et A', A'' les deux demi-arbres déterminés par C. Le théorème sera établi si nous parvenons à montrer que H contient le fixateur de A'. En effet, A' et A'' jouant des rôles symétriques, il en résultera que H contient également le fixateur de A'', donc aussi le fixateur de C, lequel est le produit direct des fixateurs de A' et de A'' en vertu de la propriété (P); ceci étant vrai pour toute arête C, il sera prouvé que H contient G^+.

Vu le lemme 4.4, appliqué successivement aux groupes G, G^+ et aux groupes G^+, H, le groupe H ne conserve aucun sous-arbre propre non vide ni aucun bout de A. En vertu de la proposition 3.4, il existe une chaîne doublement infinie D et un élément $h \in H$ conservant D et induisant sur D une translation non triviale. Il résulte du lemme 4.1 que l'orbite Hs d'un sommet s de D a une intersection non vide avec A'; quitte à remplacer D et h par leurs transformés par un élément convenable de H, nous pouvons donc supposer que $D \cap A' \neq \emptyset$.

Soient b', b'' les deux bouts de A définis par D (c'est-à-dire représentés par des sous-chaînes de D). L'un au moins d'entre eux, soit b', «appartient à A'», c'est-à-dire possède des représentants dans A'. On a vu que b'' n'est pas invariant par H. Il en est de même de la paire $\{b', b''\}$, sinon D serait aussi invariant par le groupe H et, celui-ci ne conservant aucun sous-arbre propre non vide de A, on devrait avoir $A = D$, contrairement à l'hypothèse faite au début de cette démonstration. Par conséquent, il existe $g \in H$ tel que $g(b'') \notin \{b', b''\}$. Pour tout sommet x de A, soit $\pi(x)$ le sommet de D le plus proche de x. Comme le bout b' appartient à A', l'image par π de l'ensemble des sommets de A'' est contenu dans un représentant D'' de b'' dans D (en fait, $\pi(S(A''))$ est réduit à un point ou est l'ensemble des sommets d'un représentant de b''). D'autre part, la chaîne $g^{-1}(D)$ ne contenant pas de représentant de b'', l'image par π de l'ensemble de ses sommets est contenue dans un répresentant D' de b' dans D. Soit n un entier tel que $h^n(D')$ et D'' soient disjoints. Alors, la chaîne $h^n(g^{-1}(D))$ est disjointe de A'', c'est-à-dire contenue dans A'. Quitte à remplacer D et h par leurs transformés par $h^n \cdot g^{-1}$, nous pouvons supposer que $D \subset A'$.

Soit F le fixateur de D dans G. On a évidemment $F \subset G^+$. En vertu du lemme 4.3,

$$F = (h, F) \subset H.$$

D'autre part, comme $D \subset A'$, le groupe F contient le fixateur de A' dans G. Ce dernier est donc contenu dans H, ce qui achève la démonstration.

4.6. *Remarque.* L'hypothése du théorème 4.5 selon laquelle G ne conserve aucun sous-arbre propre non vide ni aucun bout de A est essentielle: lorsqu'elle n'est pas réalisée, le groupe G^+ «a peu de chance» d'être simple, ainsi qu'il ressort des observations suivantes.

Supposons d'abord qu'il existe un sous-arbre propre non vide B de A, invariant par G. Pour $i \in \mathbf{N}$, soit B_i l'arbre ayant pour sommets les $s \in S(A)$ tels que $d_A(s,B) \leqslant i$ et soit G_i le fixateur de B_i dans G. Alors, $(G_0, G_1, \ldots)$ est une suite normale dans G dont tous les termes sont contenus dans G^+ à l'exception peut-être du premier, si B a un seul sommet. De plus, $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} G_i = \{1\}$.

Supposons à présent que G conserve un bout b de A, soit $(B_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ la suite emboîtée des sous-arbres de A canoniquement associés à b (cf. 2.4) et, pour $i \in \mathbf{Z}$, soit G_i le fixateur de B_i dans G. Alors, G^+ est le fixateur de b dans G, les sous-groupes emboîtés $G_i (i \in \mathbf{Z})$ sont des sous-groupes distingués de G^+, permutés par les automorphismes intérieurs de G, et on a $\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} G_i = \{1\}$. La réunion des G_i est un sous-groupe distingué de G, contenu dans G^+ mais «en général» différent de lui.

5. Systèmes formés d'un arbre et d'une fonction définie sur l'ensemble de ses sommets. Classification et construction : les a-revêtements

5.1. Soient A un arbre, $S = S(A)$ l'ensemble de ses sommets et $f: S \to I$ une application de S dans un ensemble I. Rappelons qu'un automorphisme α de A est dit *compatible* avec f si $f \circ \alpha = f$. L'ensemble des automorphismes possédant cette propriété est évidemment un groupe, que nous noterons $\mathrm{Aut}_f A$. Si I est réduit à un point, $\mathrm{Aut}_f A$ est le groupe $\mathrm{Aut} A$ de tous les automorphismes de A. La suite de cet article a pour objet principal l'étude des groupes de la forme $\mathrm{Aut}_f A$ (donc aussi, en particulier, des groupes $\mathrm{Aut} A$). On a vu que $\mathrm{Aut}_f A$ possède toujours la propriété (P) du n° 4.2 ; le théorème 4.5 lui est donc applicable.

5.2. Soient $(A, f: S \to I)$ et $(A', f': S' \to I')$ deux systèmes formés d'un arbre et d'une fonction définie sur l'ensemble des sommets de celui-ci. Si $I = I'$, ces systèmes sont dits *I-isomorphes* lorsqu'il existe un isomorphisme d'arbres $\phi: A \to A'$ tel que $f = f' \circ \phi$. De même, si $A = A'$, les systèmes (A, f) et (A, f') sont dits *A-isomorphes* s'il existe une bijection $i: I \to I'$ telle que $f' = i \circ f$. Vu le but que nous poursuivons, qui est l'étude du groupe $\mathrm{Aut}_f A$, il est naturel d'introduire aussi une relation d'équivalence plus faible que cette dernière: deux fonctions f, f' definies sur l'ensemble $S = S(A)$ des sommets de A seront dites *équivalentes* si $\mathrm{Aut}_f A = \mathrm{Aut}_{f'} A$. Définissons encore une *fonction normale* comme étant une application $f: S \to I$ surjective et telle que $\mathrm{Auf}_f A$ soit transitif sur $f^{-1}(i)$ pour tout $i \in I$. Il est clair que *toute fonction*

f définie sur S est équivalente à une et, à A-isomorphisme près, une seule fonction normale (on obtient celle-ci en prenant pour ensemble de référence l'ensemble des orbites de $\mathrm{Aut}_f A$ dans S, et pour fonction la projection canonique). Ainsi, l'étude des classes d'équivalence de fonctions f se ramène à l'étude des fonctions normales.

5.3. Nous désignons par Card la classe de tous les nombres cardinaux.

Proposition. *Soient A un arbre et $f: S(A)\to I$ une fonction normale. Alors, pour $i,j\in I$, le cardinal de l'ensemble des points de $f^{-1}(j)$ voisins d'un point donné $x\in f^{-1}(i)$ dépend seulement de i,j et non de x. Si $a(i,j)$ désigne ce cardinal, la fonction $a: I\times I\to \mathrm{Card}$ possède les propriétés suivantes:*

1. *$a(i,j)=0$ si et seulement si $a(j,i)=0$;*
2. *le graphe $G(a)$ ayant pour sommets les points de I et pour arêtes les paires $\{i,j\}$ $(i,j\in I; i\neq j)$ telles que $a(i,j)\neq 0$ est un graphe connexe.*

Réciproquement, soient I un ensemble et $a: I\times I\to\mathrm{Card}$ une fonction possédant les propriétés 1 et 2. Alors, il existe un et, à I-isomorphisme près, un seul système (A,f) formé d'un arbre A et d'une fonction $f: S(A)\to I$ telle que, pour tous $i,j\in I$ et tout point $x\in f^{-1}(i)$, l'ensemble des points de $f^{-1}(j)$ voisins de x ait la puissance $a(i,j)$. La fonction f est normale.

Un système (A,f) possédant ces propriétés est appelé un *a-revêtement* de I. Le graphe $G(a)$ de la condition 2 est dit *associé* à la fonction a.

La proposition précédente est à peu près évidente. On peut construire explicitement un a-revêtement de I en procédant comme suit. Pour tout couple $(i,j)\in I\times I$ tel que $a(i,j)\neq 0$, soit X_{ij} un ensemble de puissance $a(i,j)$ et soit p_{ij} un point de cet ensemble. Choisissons dans I une «origine» i_0. Soit S l'ensemble des suites

$$(i_0,x_1,i_1,x_2,\ldots,x_m,i_m) \tag{3}$$

avec $m\in\mathbf{N}$ et, pour tout $k\in\{1,\ldots,m\}$, $i_k\in I$, $x_k\in X_{i_{k-1}i_k}$ et $x_k\neq p_{i_{k-1}i_k}$ si $k\geqslant 2$ et $i_k=i_{k-2}$. Soit $f: S\to I$ la fonction qui envoie chaque suite (3) sur son dernier terme i_m. Appelons *arête* toute paire formée d'une suite (3), avec $m\geqslant 1$, et de celle qu'on en déduit en effaçant ses deux derniers termes. Il est à présent facile de voir que le graphe A constitué par S et par l'ensemble d'arêtes ainsi défini est un arbre, et que (A,f) est un a-revêtement de I.

5.4. Notons immédiatement une conséquence de la construction précédente. Si ξ désigne une permutation quelconque de la réunion des $X_{i_0,j}$ $(j\in I,\ a(i_0,j)\neq 0)$ telle que $\xi(X_{i_0,j})=X_{i_0,j}$, alors la permutation de S qui envoie la suite (3) sur la suite

$$(i_0,\xi(x_1),i_1,\ldots,x_m,i_m)$$

est manifestement un automorphisme de l'arbre A. Comme l'«origine» i_0 peut être choisie arbitrairement dans I, on en déduit la

Proposition. *Soient A un arbre, $f: S(A) \to I$ une fonction normale et s_0 un sommet quelconque de A. Soit T l'ensemble des sommets de A voisins de s_0. Alors, toute permutation τ de T telle que $f \circ \tau = f|_T$ est la restriction à T d'un automorphisme de A compatible avec f et conservant s_0.*

5.5. La proposition du n° 5.3 fournit une classification, à isomorphisme près, des systèmes formés d'un arbre A et d'une classe d'équivalence de fonctions définies sur $S(A)$. Nous verrons aussi aux n$^{\text{os}}$ 5.6, 5.7 et au § 6 que beaucoup de propriétés de l'arbre A et du groupe $\mathrm{Aut}_f A$ se «lisent» facilement sur la fonction a. Mais le principal intérêt de la notion de a-revêtement est peut-être qu'elle fournit un moyen de description et de construction commode d'arbres ayant un haut degré de symétrie. Notons par exemple que si I se compose d'un seul point 1, A est l'«arbre homogène» dont tous les sommets ont le même ordre $a(1,1)$. Si $I=\{1,2\}$ et si la matrice de la fonction a est $\begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, l'arbre A possède deux espèces de sommets, respectivement d'ordre r et d'ordre s, et toute arête se compose d'un sommet de chaque sorte. Le lecteur est invité à «dessiner» l'arbre A d'un a-revêtement du même ensemble $\{1,2\}$, pour une fonction a quelconque (représentée par une matrice $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$).

5.6. Soient I, I' deux ensembles et $a: I \times I \to \mathrm{Card}$, $a': I' \times I' \to \mathrm{Card}$ des fonctions possédant les propriétés (1) et (2) de 5.3. On appelle *application de domination* du système (I, a) par le système (I', a') toute application $\delta: I \to I'$ telle que, pour tous $i,j \in I$ et tout $i' \in \delta^{-1}(i)$, on ait

$$a(i,j) = \sum_{j' \in \delta^{-1}(j)} a'(i',j');$$

si une telle application existe, on dit que (I',a') *domine* (I,a). Si (A,f) est un a-revêtement de I et si $\delta: I \to I'$ est une application de domination, alors $(A, f' = \delta \circ f)$ est un a'-revêtement de I' et $\mathrm{Aut}_{f'} A \subset \mathrm{Aut}_f A$. Par conséquent:

5.6.1. *Si (A,f) est un a-revêtement de I, on a $\mathrm{Aut}_f A = \mathrm{Aut}\, A$ si et seulement si le système (I,a) est maximal pour la relation de domination, c'est-à-dire si toute application de domination $I \to I'$ est bijective.*

Ainsi, les classes d'isomorphisme de systèmes (I,a) maximaux pour la relation de domination correspondent biunivoquement aux classes d'isomorphisme d'arbres. Remarquons encore que

5.6.2. *Une condition suffisante pour que* (I,a) *soit maximal pour la relation de domination est que les cardinaux*

$$a_i = \sum_{j\in I} a(i,j) \qquad (i\in I)$$

soient tous différents.

Ceci fournit une grande variété d'arbres «très symétriques» non isomorphes.

5.7. Soit $(A,f\colon S(A)\to I)$ un a-revêtement. Nous allons énoncer des critères permettant de reconnaître si $\mathrm{Aut}_f A$ conserve un sous-arbre propre non vide ou un bout de A (l'utilité de tels critères ressort du théorème 4.5); les démonstrations, très faciles, seront omises.

Soit B un sous-arbre de A invariant par $\mathrm{Aut}_f A$. Alors, l'ensemble des sommets de B est l'image réciproque par f d'une partie de I. Inversement, soit J une partie quelconque de I. Notons I/J l'ensemble obtenu à partir de I en identifiant tous les éléments de J, $\kappa\colon I\to I/J$ l'application canonique et $a/J\colon (I/J)\times(I/J)\to\mathrm{Card}$ la fonction définie par

$$(a/J)(i,j) = \sum_{x\in\kappa^{-1}(i),\, y\in\kappa^{-1}(j)} a(x,y).$$

Alors, pour que $f^{-1}(J)$ soit l'ensemble des sommets d'un sous-arbre de A invariant par $\mathrm{Aut}_f A$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:

1. $a(i,i)=0$ *pour tout* $i\in I-J$;
2. *le graphe* $G(a/J)$ *associé à la fonction* a/J *est un arbre et pour tout couple* $(i,j)\in(I/J)\times(I/J)$ *enchaîné et dirigé vers* J *sur cet arbre, on a* $(a/J)(i,j)=1$.

En particulier, l'ensemble $f^{-1}(J)$ est un point fixe de $\mathrm{Aut}_f A$ si les conditions précédentes sont remplies et si, en outre, J est réduit à un point j tel que $a(j,j)=0$.

Pour que A *possède un bout conservé mais non centralisé par* $\mathrm{Aut}_f A$, *il faut et il suffit qu'il existe une partie finie* J *de* I *possédant les propriétés* 1, 2,

3. *le graphe* $G(a|_{J\times J})$ *est un circuit;*

et

4. *il existe un sens de parcours de ce circuit tel que pour deux points consécutifs quelconques* $i,j\in J$, *on ait* $a(i,j)=1$.

Si cette derniére propriété vaut pour les deux sens de parcours de $G(a|_{J\times J})$, l'arbre A possède deux bouts conservés mais non centralisés par $\mathrm{Aut}_f A$.

Pour que $\mathrm{Aut}_f A$ centralise au moins un bout de A, il est nécessaire que $a(i,i)=0$ pour tout $i\in I$ et que le graphe $G(a)$ associé à a soit un arbre. *Si ces conditions sont remplies, les bouts de A centralisés par $\mathrm{Aut}_f A$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les bouts b de $G(a)$ tels que, pour tout couple $(i,j)\in I\times I$ enchaîné et dirigé vers b sur l'arbre $G(a)$, on ait $a(i,j)=1$.*

Notons encore cette conséquence particulière des énoncés précédents: *si $1\notin a(I\times I)$, alors $\mathrm{Aut}_f A$ ne conserve aucun sous-arbre propre non vide ni aucun bout de A.*

6. Structure du groupe $\mathrm{Aut}_f A/\mathrm{Aut}_f^+ A$

6.1. Soient A un arbre et $f\colon S\to I$ une fonction définie sur l'ensemble de ses sommets. Conformément à la notation introduite en 4.5, nous désignons par $\mathrm{Aut}_f^+ A$ le groupe engendré par les fixateurs des arêtes de A dans $\mathrm{Aut}_f A$. *Celui-ci est aussi le groupe engendré par les stabilisateurs des points de ramification de A dans $\mathrm{Aut}_f A$.* En effet, il est clair que tout automorphisme de A fixant une arête et distinct de la transformation identique stabilise un point de ramification. Réciproquement, soit $\alpha\in\mathrm{Aut}_f A$ un automorphisme conservant un point de ramification r et soient s,s' deux sommets de A, voisins de r et tels que $s'\neq s$ et $s'\neq\alpha(s)$. En vertu de la proposition 5.4, il existe un élément β de $\mathrm{Aut}_f A$ conservant r et s' et permutant s et $\alpha(s)$. Les automorphismes β et $\beta\circ\alpha$, qui fixent respectivement les arêtes $\{r,s'\}$ et $\{r,s\}$, appartiennent à $\mathrm{Aut}_f^+ A$; il en est donc de même de α.

Nous savons par le théorème 4.5 que, sous des conditions assez générales, le groupe $\mathrm{Aut}_f^+ A$ est simple ou réduit à l'élément neutre. Notre but est à présent de déterminer le quotient $\mathrm{Aut}_f A/\mathrm{Aut}_f^+ A$, et de rechercher dans quels cas $\mathrm{Aut}_f^+ A=\{1\}$. Il n'y a évidemment aucun inconvénient à supposer – et nous le ferons dans tout ce paragraphe – que f est normale, c'est-à-dire que (A,f) est un a-revêtement de I pour une fonction $a\colon I\times I\to\mathrm{Card}$ donnée.

6.2. Soit la fonction $a^+\colon I\times I\to\{0,1,2\}$ définie comme suit: pour $i,j\in I$,

$$a^+(i,j)=0 \quad \text{si} \quad a(i,j)=0;$$

$$a^+(i,j)=2 \quad \text{si} \quad a(i,j)=2 \quad \text{et si} \quad a(i,j')=0 \quad \text{pour tout } j'\in I-\{j\};$$

$$a^+(i,j)=1 \quad \text{dans tous les autres cas.}$$

Soient (A^+,f_+) un a^+-revêtement de I, S^+ l'ensemble des sommets de A^+, et $a_+\colon S^+\times S^+\to\mathrm{Card}$ la fonction définie comme suit: pour $x,y\in S^+$

$$a_+(x,y)=a(f_+(x),f_+(y))/a^+(f_+(x),f_+(y)) \quad \text{si} \quad \{x,y\}$$
est une arête de A^+;
$$a_+(x,y)=0 \quad \text{si} \quad \{x,y\} \quad \text{n'est pas une arête de } A^+.$$

Notons que le graphe $G(a_+)$ associé à a_+ n'est autre que l'arbre A^+. D'aprés 5.6, si (B,g) est un a_+-revêtement de S^+, alors $(B,f_+ \circ g)$ est un a-revêtement de I. Vu l'unicité du a-revêtement (à isomorphisme prés), cela veut dire qu'il existe une application $f^+: S \to S^+$ telle que (A,f^+) soit un a_+-revêtement de S^+ et qu'on ait $f=f_+ \circ f^+$. Il résulte immédiatement du caractére invariant des constructions précédentes et de l'unicité du a^+-revêtement que tout automorphisme α de A compatible avec f induit un automorphisme $f_*^+(\alpha)$ de A^+ compatible avec f_+ défini par $f_*^+(\alpha) \circ f^+ = f^+ \circ \alpha$.

6.3. Nous dirons qu'un point i de I est *spécial* s'il existe $j \in I$ tel que $a(i,j)=2$ et $a(i,j')=0$ pour tout $j' \in I-\{j\}$.

Lemme. *Soit x un sommet de A^+ tel que $f_+(x)$ ne soit pas spécial. Alors, l'identité est le seul automorphisme de A^+ compatible avec f_+ et conservant x.*

Soit α un tel automorphisme et soit $y \in S^+$. Nous allons montrer, par induction sur l'entier $m=d_{A^+}(x,y)$, que $\alpha(y)=y$. Soit $x=x_0$, $x_1,\ldots,x_m=y$ une suite enchaînée de sommets de A^+. Vu l'hypothèse d'induction, $\alpha(x_{m-1})=x_{m-1}$. Si le point $f_+(x_{m-1})$ n'est pas spécial, on a $a^+(f_+(x_{m-1}),f_+(y))=1$, d'où l'assertion. Si $f_+(x_{m-1})$ est spécial, ce qui implique que $m \geqslant 2$, x_{m-2} et y sont les seuls sommets de A^+ voisins de x_{m-1}; puisque, par induction, $\alpha(x_{m-2})=x_{m-2}$, on a aussi $\alpha(y)=y$.

6.4. **Proposition.** *L'homomorphisme* $f_*^+: \mathrm{Aut}_f A \to \mathrm{Aut}_{f_+} A^+$ *est surjectif, de noyau* $\mathrm{Aut}_f^+ A$.

La surjectivité de f_*^+ résulte immédiatement de l'unicité (à isomorphisme prés) du a_+-revêtement.

Pour établir l'inclusion $\mathrm{Aut}_f^+ A \subset \mathrm{Ker} f_*^+$, il suffit de faire voir que tout automorphisme α de A compatible avec f et conservant un point de ramification r de A appartient au noyau de f_*^+; or ceci résulte immédiatement du lemme précédent, car $f_*^+(\alpha)$ laisse fixe le point $f^+(r)$ dont l'image par f_+, qui n'est autre que $f(r)$, n'est pas spéciale.

Reste à montrer que tout élément β de $\mathrm{Ker} f_*^+$ appartient à $\mathrm{Aut}_f^+ A$. Soit $s \in S$ et soit $s=s_0, s_1,\ldots,s_m=\beta(s)$ la suite enchaînée joignant s et $\beta(s)$. La suite $f^+(s_0), f^+(s_1),\ldots,f^+(s_m)$ est un chemin fermé sur A^+ de sorte que, si $m \neq 0$ (i. e. si s n'est pas un point fixe de β), il existe un $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ tel que $f^+(s_{i-1})=f^+(s_{i+1})$. Ceci implique que s_i soit un point de ramification de A, sinon $f(s_i)$ serait un point spécial de I

et on aurait $a_+(f^+(s_i),f^+(s_{i-1}))=1$ d'où $s_{i-1}=s_{i+1}$, ce qui est absurde. De cette discussion, il résulte déjà que si A ne possède pas de point de ramification, β est la transformation identique. Nous supposerons dorénavant que s est un point de ramification que nous choisissons une fois pour toutes. La suite de la démonstration se fera par induction sur m. Si $m=0$, $\beta(s)=s$ et notre assertion s'ensuit. Soit donc $m\neq 0$ et soit $i\in\{1,2,\ldots,m-1\}$ comme plus haut. En vertu de la proposition 5.4, il existe $\gamma\in \mathrm{Aut}_f A$ tel que $\gamma(s_i)=s_i$ (d'où $\alpha\in\mathrm{Aut}_f^+ A\subset \mathrm{Ker} f_*^+$) et que $\gamma(s_{i+1})=s_{i-1}$. On a alors $\gamma\circ\beta\in\mathrm{Ker} f_*^+$ et $d_A(s,\gamma(\beta(s)))<m$, d'où $\gamma\circ\beta\in\mathrm{Aut}_f^+ A$, vu l'hypothèse d'induction, et $\beta\in\mathrm{Aut}_f^+ A$, ce qui achève la démonstration.

6.5. **Corollaire.** *On a* $\mathrm{Aut}_f^+ A=\mathrm{Aut}_{f^+} A$, *et* $\mathrm{Aut}_f A/\mathrm{Aut}_f^+ A \cong \mathrm{Aut}_{f_+} A^+$.

6.6. **Corollaire.** *Le groupe* $\mathrm{Aut}_f^+ A$ *est réduit à l'élément neutre si et seulement si* $a=a^+$, *c'est-à-dire si, pour tous* $i,j\in I$, *l'une des deux conditions suivantes est remplie:*

$$a(i,j)\leqslant 1;$$
$$a(i,j)=2 \quad et \quad a(i,j')=0 \quad pour\ tout \quad j'\in I-\{j\}.$$

6.7. **Proposition.** *Soient c le cardinal de l'ensemble des $i\in I$ tels que $a(i,i)\neq 0$ et c' le cardinal de l'ensemble des points spéciaux* (cf. 6.3). *Alors,* $\mathrm{Aut}_f A/\mathrm{Aut}_f^+ A$ *est isomorphe au produit libre d'un groupe libre, à savoir le groupe fondamental du graphe $G(a)$ associé à a* (cf. 5.3), *et de $c+c'$ groupes d'ordre* 2.

En vertu des corollaires 6.5 et 6.6, le contenu de cet énoncé n'est pas modifié si on remplace A,f,a par A^+,f_+,a^+; cela nous permet de simplifier les notations en supposant que $A=A^+$, $f=f_+$, $a=a^+$, d'où $\mathrm{Aut}_f^+ A=\{1\}$ et $\mathrm{Aut}_f A/\mathrm{Aut}_f^+ A=\mathrm{Aut}_f A$.

Si tous les points de I sont spéciaux, I possède un seul ou deux points et la matrice de la fonction a est, selon le cas, (2) ou $\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$. Dans les deux cas, A est une chaîne doublement infinie, $\mathrm{Aut}_f A$ est un groupe diédrique infini, le groupe fondamental de $G(a)$ est réduit à l'élément neutre et $c+c'=2$, ce qui prouve notre assertion.

Supposons donc que I possède des points non spéciaux et choisissons-en un, noté i_0. Soit M l'ensemble des suites $(i_0,i_1,\ldots,i_m=i_0)$ de points de I, d'origine et d'extrémité i_0, telles que pour tout $p\in\{1,\ldots,m\}$ on ait $a(i_{p-1},i_p)\neq 0$. (Si $a(i,i)=0$ pour tout $i\in I$, M est donc l'ensemble des chemins d'origine et d'extrémité i_0 dans le graphe $G(a)$.) Cet ensemble a une structure naturelle de monoïde, le composé de deux suites s'obtenant en les mettant bout à bout et en identifiant le dernier terme de la première et le premier terme de la seconde. Dans M, considérons la plus petite relation d'équivalence possédant la propriété suivante: si une suite Σ, élément de M, possède une sous-suite de la forme (i,j,i) (resp. (i,j,i,j,i), où i et j ne sont pas spéciaux (resp. où j est spécial), alors Σ est équivalente à la suite qu'on en déduit en substituant à la sous-suite en question, le seul élément i. Cette relation d'équivalence est manifestement compatible avec la loi de composition de M, et il est facile de voir que le quotient de M par cette relation est un groupe Γ, isomorphe au produit libre du groupe fondamental du graphe $G(a)$ et de $c+c'$ groupes d'ordre 2.

Soient s un point de $f^{-1}(i_0)$ que nous choisissons une fois pour toute. En vertu du lemme 6.3, l'application $\pi\colon \mathrm{Aut}_f A \to f^{-1}(i_0)$ définie par $\pi(\alpha)=\alpha(s)$ est bijective. Soit L l'ensemble des chemins dans A, d'origine s, d'extrémité appartenant à $f^{-1}(i_0)$, et ne possédant pas de point de rebroussement (cf. 2.2) dont l'image par f soit un point spécial de I (cf. 6.3). L'application f induit une bijection de L sur M. Si deux éléments de M sont équivalents, leurs images réciproques dans L ont manifestement même extrémité. D'autre part, toute classe d'équivalence d'éléments de M contient au moins une suite ne possédant aucune sous-suite de la forme (i,j,i) avec j non spécial; l'image réciproque d'une telle suite dans L est une suite enchaînée et est donc *la* suite enchaînée joignant s à un point de $f^{-1}(i_0)$. De ces deux observations, il résulte que l'application λ qui envoie un point $x\in f^{-1}(i_0)$ sur l'ensemble des images par f des éléments de L d'extrémité x est une bijection de $f^{-1}(i_0)$ sur Γ. Le composé $\lambda\circ\pi\colon \mathrm{Aut}_f A\to\Gamma$ étant manifestement un homomorphisme, donc un isomorphisme, notre proposition s'ensuit.

6.8. *Remarque.* On a des résultats tout à fait analogues, et d'ailleurs plus simples à énoncer et à établir, pour le groupe $\mathrm{Aut}_f^\circ A$ engendré par les stabilisateurs des sommets de A dans $\mathrm{Aut}_f A$. Ici, la fonction a^+ doit être remplacée par la fonction $a^\circ\colon I\times I\to \mathrm{Card}$ définie comme suit:

$$a^\circ(i,j)=0 \text{ ou } 1 \quad \text{selon que} \quad a(i,j)= \text{ ou } \neq 0.$$

Si $(A^\circ, f_\circ)$ désigne un a°-revêtement de I, il existe à nouveau un morphisme de graphes $f^\circ\colon A\to A^\circ$ qui induit un épimorphisme $f^\circ_*\colon \mathrm{Aut}_f A\to \mathrm{Aut}_f A^\circ$ de noyau $\mathrm{Aut}_f^\circ A$, de sorte que

$$\mathrm{Aut}_f^\circ A = \mathrm{Aut}_{f^\circ} A,$$

que

$$\mathrm{Aut}_f A/\mathrm{Aut}_f^\circ A \cong \mathrm{Aut}_{f_\circ} A^\circ,$$

et que $\mathrm{Aut}_f^\circ A$ est réduit à l'élément neutre si et seulement si $a(I\times I)\subset\{0,1\}$. Enfin, le quotient $\mathrm{Aut}_f A/\mathrm{Aut}_f^\circ A$ est isomorphe au produit libre du groupe fondamental du graphe $G(a)$ et de c groupes d'ordre 2, où c est défini comme en 6.7.

La raison pour laquelle nous avons, dans ce paragraphe, concentré notre attention sur le groupe $\mathrm{Aut}_f^+ A$ plutôt que sur le groupe $\mathrm{Aut}_f^\circ A$ est évidemment l'existence du théorème 4.5.

7. Structure du groupe $\mathrm{Aut}_f A$

Dans ce paragraphe, nous examinerons brièvement ce que les résultats des paragraphes précédents permettent de dire sur la structure du groupe $G = \mathrm{Aut}_f A$ pour un arbre A et une fonction normale $f: S(A) \to I$ quelconques.

Commençons par l'observation suivante: soit B un sous-arbre non vide de A invariant par G et, pour $i \in \mathbf{N}$, soit G_i le fixateur de l'ensemble $\{s \in S(A) \mid d_A(s, B) \leqslant i\}$; alors, les G_i forment une suite normale convergeant vers $\{1\}$ $\left(\text{i.e.} \bigcap_{i=0}^{\infty} G_i = \{1\}\right)$; dans G, les quotients G_i/G_{i+1} $(i \in \mathbf{N})$ sont des produits directs de groupes symétriques (un groupe symétrique étant défini comme le groupe de toutes les permutations d'un ensemble) et G/G_0 est canoniquement isomorphe au groupe $\mathrm{Aut}_g B$, avec $g = f|_{S(B)}$. En un certain sens, ceci ramène l'étude de G à celle de $\mathrm{Aut}_g B$; d'ailleurs, l'introduction d'une généralisation appropriée des «produits couronnes» (wreath products) permet de construire effectivement le groupe $\mathrm{Aut}_f A$ à partir de $\mathrm{Aut}_g B$ et des G_i/G_{i+1}.

Si G possède des points fixes dans $S(A)$, on peut prendre pour B un arbre dont tous les sommets sont fixes (par exemple «l'arbre des points fixes» de G). Le groupe $\mathrm{Aut}_g B$ est alors réduit à l'élément neutre et $G = G_0$.

Supposons que G ne conserve aucun sommet ni aucun bout de A, et soit B le plus petit sous-arbre non vide de A invariant par G; celui-ci existe en vertu du corollaire 3.5. Dans ce cas, il résulte de 6.7 et 4.5 que $\mathrm{Aut}_g B$ est soit un produit libre de groupes cycliques infinis et de groupes d'ordre 2, soit une extension d'un tel produit par un groupe simple $\mathrm{Aut}_g^+ B$ qui est alors le plus petit sous-groupe invariant de $\mathrm{Aut}_g B$ non réduit à l'élément neutre.

Si G conserve deux bouts de A, on peut prendre pour B la chaîne doublement infinie «joignant ces deux bouts»; $\mathrm{Aut}_g B$ est alors $\{1\}$ ou cyclique infini.

Le cas où G conserve un et un seul bout b de A et ne possède aucun point fixe dans $S(A)$ est moins favorable. Le groupe $G^+ = \mathrm{Aut}_f^+ A$ est alors le centralisateur de b dans G, et $G/G^+ = \{1\}$ ou $\mathbf{Z}$. Si $(B_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ désigne la suite emboîtée des arbres canoniquement associés à b, et si

G_i est le fixateur de B_i dans G, les G_i sont distingués dans G^+ et permutés par les automorphismes intérieurs de G, leur intersection est réduite à l'élément neutre et les quotients G_i/G_{i+1} sont des produits directs de groupes symétriques. Mais le groupe $G_{-\infty} = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} G_i$, qui est un sous-groupe distingué de G contenu dans G^+, est généralement distinct de G^+, et il resterait à décrire la structure du quotient $G^+/G_{-\infty}$.

8. Isomorphismes et automorphismes

Il serait intéressant d'étudier les conditions d'isomorphisme de deux groupes de la forme $\mathrm{Aut}_f A$ correspondant à des systèmes (A,f) différents et, plus généralement, de rechercher tous les isomorphismes d'un tel groupe sur un autre. Ces problèmes se simplifient considérablement si on envisage seulement les *isomorphismes de groupes bornologiques;* c'est ce que nous ferons ici. De plus, nous imposerons aux (A,f) en question une condition supplémentaire, celle d'être des a-revêtements pour une fonction a ne prenant pas les valeurs 1 et 2, moyennant quoi les questions posées ont une réponse presque immédiate, comme on va le voir.

8.1. **Lemme.** *Soient I un ensemble, $a: I \times I \to \mathrm{Card}$ une fonction possédant les propriétés* (1) *et* (2) *de* 5.3, *et* (A,f) *un a-revêtement de I. Alors:*

(i) *tout sous-groupe borné de* $\mathrm{Aut}_f A$ *stabilise un sommet ou une arête de A;*

(ii) *si* $1 \notin a(I \times I)$, *le stabilisateur d'un sommet est un sous-groupe borné maximal et deux sommets différents ont des stabilisateurs différents;*

(iii) *si* $a(I \times I) \subset \mathrm{Card} - \{1,2\}$, *une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe borné maximal de* $\mathrm{Aut}_f A$ *ne soit pas le stabilisateur d'un sommet est qu'il possède un sous-groupe d'indice* 2 *contenu dans un autre sous-groupe borné maximal;*

(iv) *si* $a(I \times I) \subset \mathrm{Card} - \{1,2\}$, *une condition nécessaire et suffisante pour que deux sommets de A soient voisins est que l'intersection de leurs stabilisateurs dans* $\mathrm{Aut}_f A$ *ne soit contenue dans le stabilisateur d'aucun autre sommet.*

Pour établir (i), il suffit, vu 3.4, de montrer que tout sous-groupe borné H du centralisateur d'un bout b de A dans $\mathrm{Aut}_f A$ possède un point fixe dans $S(A)$. Soient C une chaîne simplement infinie appartenant à b et s son origine (bout pendant). Pour tout $\alpha \in H$, soit $s(\alpha)$ l'origine de la plus grande sous-chaîne de C stable par α. On a

$$d_A(s,\alpha(s)) = d_A(s,s(\alpha)) + d_A(s(\alpha),\alpha(s)).$$

Puisque H est borné, il en est de même de l'entier $d_A(s,\alpha(s))$, donc aussi de $d_A(s,s(\alpha))$, ce qui signifie que tout sommet de C suffisamment «éloigné» de s est conservé par H, c.q.f.d. Les autres assertions de l'énoncé sont des conséquences immédiates de (i) et de la proposition 5.4.

8.2. Lorsque $a(I \times I) \subset \mathrm{Card} - \{1,2\}$, le lemme précédent permet de reconstruire l'arbre A à partir du groupe bornologique $\mathrm{Aut}_f A$; on en déduit donc aussitôt la

Proposition. *Soient I, I' deux ensembles, $a: I \times I \to \mathrm{Card} - \{1,2\}$ et $a': I' \times I' \to \mathrm{Card} - \{1,2\}$ deux fonctions possédant les propriétés* (1) *et* (2) *de* 5.3, *(A,f) un a-revêtement de I, (A',f') un a'-revêtement de I', et $\phi: \mathrm{Aut}_f A \to \mathrm{Aut}_{f'} A'$ un isomorphisme de groupes bornologiques. Alors, il existe une bijection $\iota: I \to I'$ et un isomorphisme d'arbres $\psi: A \to A'$ tels qu'on ait*

$$a'(\iota(i),\iota(j)) = a(i,j) \qquad (i,j \in I),$$

$$\iota \circ f = f' \circ \psi$$

et

$$\phi(\alpha) = \psi \circ \alpha \circ \psi^{-1} \qquad (\alpha \in \mathrm{Aut}_f A).$$

8.3. **Corollaire.** *Soient I, a, A, f comme en* 8.2. *Alors, le quotient du groupe de tous les automorphismes du groupe bornologique $\mathrm{Aut}_f A$ par le groupe de ses automorphismes intérieurs est isomorphe au groupe des permutations de I conservant la fonction a.*

8.4. *Remarque.* Pour les topologies définies en 2.5, $\mathrm{Aut}_f A$ et $\mathrm{Aut}_{f'} A'$ sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{Aut}\,A$ et $\mathrm{Aut}\,A'$. Cela étant, il résulte de la dernière assertion de 2.5 que si tous les sommets de A et A' sont d'ordre fini, c'est-à-dire si a et a' prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}$ et si tous les sommets des graphes associés $G(a)$ et $G(a')$ (cf. 5.3) sont d'ordre fini, alors $\mathrm{Aut}_f A$ et $\mathrm{Aut}_{f'} A'$ sont des groupes localement compacts, et le mot «bornologique» peut être remplacé par «topologique» dans la proposition 8.2 et le corollaire 8.3.

8.5. *Exemple.* Pour tout couple (L,l) formé d'un arbre L dont tous les sommets sont d'ordre fini et d'une fonction l à valeur dans $\mathbf{N}$ définie sur l'ensemble des couples de points voisins (arêtes dirigées) de L, désignons par $G(L,l)$ le groupe $\mathrm{Aut}_f A$ d'un a-revêtement de L, la fonction $a: S(L) \times S(L) \to \mathbf{N}$ étant définie par

$$a(i,j) = \begin{cases} l(i,j)+3 & \text{si } \{i,j\} \text{ est une arête de } L \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et munissons ce groupe de la topologie induite par la topologie $\mathcal{T}_b = \mathcal{T}_f$ de $\mathrm{Aut}\,A$ (cf. 2.5). Il résulte du théorème 4.5, de la remarque terminant le n° 5.7, des propositions 6.7 et 8.3 et de la remarque 8.4 que *pour tout couple (L,l) du type décrit plus haut, $G(L,l)$ est un groupe simple localement compact; deux groupes $G(L,l)$ sont (topologiquement) isomorphes si et seulement si les couples (L,l) dont ils proviennent le sont.*

Bibliographie

[1] Bruhat, F., et J. Tits: Groupes réductifs sur un corps local. Publ. Math. I. H. E. S., à paraître. (Cf. aussi: C. R. Acad. Sci. Paris **263**, 598—601, 766—768, 822—825, 867—869 (1966)).

[2] Tits, J.: Algebraic and abstract simple groups. Annals of Math. **80**, 313—329 (1964).