

## 4 Arbres et arbres réels

“Après de mon arbre, je vivais heureux...”  
(Georges Brassens)

Un *arbre* est un complexe simplicial de dimension 1, connexe et simplement connexe. L'intérêt de Tits pour ces graphes vient du fait que les arbres où tout sommet est de degré 2 au moins sont exactement les immeubles affines de dimension 1 (voir §5) ; on sait aussi que, si  $\mathbb{K}$  est un corps à valuation discrète, le groupe  $SL_2(\mathbb{K})$  agit proprement sur l'arbre homogène de degré  $q + 1$ , où  $q$  est l'ordre du corps résiduel de  $\mathbb{K}$  ; cette action est transitive sur les arêtes géométriques, et a deux orbites sur les sommets (voir [56]).

Tits fut le premier à étudier systématiquement le groupe des automorphismes d'un arbre, dans les deux articles [4] et [11]. Dans [4], il démontre que les automorphismes d'un arbre  $X$  se répartissent en trois types très simples :

- les *rotations*, ou *automorphismes elliptiques* : ce sont les automorphismes de  $X$  qui fixent au moins un sommet de  $X$  ;
- les *inversions* : ce sont les automorphismes de  $X$  qui permutent deux sommets voisins de  $X$  (si nécessaire, on peut les ramener à des automorphismes elliptiques, en remplaçant  $X$  par son premier subdivisé barycentrique) ;
- les *translations*, ou *automorphismes hyperboliques* : ce sont les automorphismes de  $X$  qui ne fixent ni sommet ni arête de  $X$  ; on montre qu'un tel automorphisme  $g$  stabilise un unique sous-arbre de  $X$  isomorphe à la chaîne doublement infinie, le long duquel  $g$  agit par translation.

Tits s'intéresse à la structure du groupe  $G = \text{Aut } X$  des automorphismes de  $X$ , et montre qu'elle présente des similitudes avec celle des groupes algébriques simples définis sur un corps. Avant d'énoncer le résultat principal, rappelons qu'une *demi-droite* d'un arbre  $X$  est une chaîne simplement infinie dans  $X$  ; deux demi-droites de  $X$  sont *équivalentes* si leur intersection contient une demi-droite ; un *bout* de  $X$  est une classe d'équivalence de demi-droites.

**Théorème.** *Notons  $G^+$  le sous-groupe de  $G$  engendré par les stabilisateurs des sommets de  $X$ . Le groupe quotient  $G/G^+$  est un produit libre de groupes cycliques infinis et de groupes à deux éléments. Si  $G$  ne conserve aucun sous-arbre propre de  $X$  et aucun bout de  $X$ , alors  $G^+$  est un groupe simple.*

L'étude des groupes d'automorphismes d'arbres et de leurs sous-groupes a reçu de nombreux prolongements, voir par exemple [22]. D'autre part, les résultats de Tits sont aussi à l'origine de *l'analyse harmonique sur les arbres*, inaugurée par les travaux de Cartier [28], et qui a connu depuis d'importants développements (comme en témoignent les volumineux textes [31] et [34]).

Dans l'article [11], Tits introduit une classe remarquable d'espaces métriques : les *arbres réels*. Un arbre réel est un espace métrique entre deux points duquel passe un arc unique, qui de plus est isométrique à un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Un arbre

est canoniquement un arbre réel, si on remplace chaque arête par une copie de  $[0, 1]$  et si on prolonge de manière naturelle la métrique combinatoire de l'arbre. Mais il y a bien d'autres exemples, comme le plan euclidien muni de la métrique des chemins de fer français<sup>7</sup> : cet exemple montre déjà qu'en général, un arbre réel n'est pas localement compact ; pour un autre exemple, beaucoup plus homogène celui-là, le lecteur pourra essayer de se représenter  $\mathbb{R} * \mathbb{R}$ , produit libre de 2 copies de la droite réelle : ce dernier exemple montre que les notions de sommets et d'arêtes perdent leur sens dans un arbre réel.

Tits montre que, si  $\mathbb{K}$  est un corps muni d'une valuation non nécessairement discrète, il existe une action isométrique de  $SL_2(\mathbb{K})$  sur un arbre réel ; dans le cas où la valuation est discrète, on retrouve l'action habituelle de  $SL_2(\mathbb{K})$  sur son arbre.

Si  $X$  est un arbre réel, les isométries de  $X$  se répartissent en deux classes : les *isométries elliptiques*, qui possèdent un point fixe, et les *isométries hyperboliques*, qui n'en possèdent pas ; une isométrie hyperbolique laisse invariante l'image de  $\mathbb{R}$  par un plongement isométrique, le long de laquelle elle agit par translation.

Tits démontre qu'un groupe virtuellement résoluble agissant par isométries sur un arbre réel complet  $X$ <sup>8</sup> fixe un point de  $X$ , ou un bout de  $X$ , ou une paire de bouts de  $X$ . Ce résultat a pu être précisé dans [32], [49], [54], sous forme d'une "Alternative de Tits" qui s'énonce comme suit. Soit  $\Gamma$  un groupe agissant par isométries sur un arbre réel  $X$  ; si  $\Gamma$  ne fixe ni point, ni bout, ni paire de bouts de  $X$ , alors  $\Gamma$  contient une copie de  $\mathbb{L}_2$  qui agit librement et proprement discontinûment sur  $X$ .

Les arbres réels ont joué un grand rôle dans l'étude de l'espace  $\mathcal{T}(M)$  des structures hyperboliques sur une variété riemannienne compacte  $M$  à courbure sectionnelle  $-1$  : ils apparaissent comme points à l'infini dans la compactification à la Thurston de  $\mathcal{T}(M)$  ; (travaux de Morgan-Shalen [47], Bestvina [23], Paulin [53]). Ceci a conduit aux travaux récents culminant avec les résultats de E. Rips sur les actions de groupes sur les arbres réels (voir [35]) : un groupe finiment engendré agit librement sur un arbre réel si et seulement si c'est un produit libre de groupes abéliens libres et de groupes de surface<sup>9</sup>.

---

<sup>7</sup>Notons  $P$  pour Paris. Si  $d$  désigne la distance usuelle du plan, on définit la *métrique des chemins de fer français* par  $d_{\text{SNCF}}(x, y) = d(x, y)$  si  $x, y$  sont sur la même demi-droite issue de  $P$ , et  $d_{\text{SNCF}}(x, y) = d(x, P) + d(P, y)$  sinon. Noter que  $P$  n'a aucun voisinage compact.

<sup>8</sup>La complétion d'un arbre réel est encore un arbre réel [47] ; l'hypothèse de complétude n'est donc pas restrictive.

<sup>9</sup>Compléments : un théorème de simplicité pour le groupe des isométries d'un arbre réel, analogue à celui énoncé plus haut pour les arbres ordinaires, a été obtenu par Tignol [58] ; l'analyse harmonique sur un arbre réel semble ne pas avoir été développée : nous ne connaissons que [59] dans cette direction.