Sur la partition d'un nombre pair en deux nombres premiers.

J. J. Sylvester

Dans un de ses articles mineurs, Euler a énoncé, comme un théorème reposant entièrement sur l'intuition découlant d'un nombre relativement petit d'exemples, que tout nombre pair peut être décomposé en une somme de deux nombres premiers. L'objet de la communication de M. Sylvester était d'obtenir une mesure du nombre probable de façons selon lesquelles une telle décomposition peut être effectuée pour n'importe quel nombre donné ; si on peut montrer qu'elle est probablement plus grande que la racine carrée du nombre lui-même, il s'ensuivra, à partir des principes généralement admis de la théorie des probabilités, que la probabilité que le théorème soit universellement vrai au-dessus de n'importe quelle limite, si on a prouvé qu'il est vrai jusqu'à cette limite, peut être représentée par un produit infini de termes qui pourra s'approcher d'aussi près que l'on veut de l'unité aussi grande que soit la limite considérée.

Le simple fait du théorème, comme Euler l'a donné, étant prouvé jusqu'à 100 000 000 ou jusqu'à n'importe quel autre nombre, quelle que soit sa taille, rendrait la probabilité qu'il soit universellement vrai absolument nulle, juste comme le fait que le soleil se soit levé 100 000 000 de fois ne contribuerait pas d'un atome de probabilité à la supposition qu'il continuera de se lever pour tous les jours à venir. Dans le cas devant nous, au contraire, la probabilité que le théorème soit universellement vrai par une induction suffisamment copieuse peut être approchée d'aussi près que nous le souhaitons de la certitude absolue. L'auteur considère qu'il a établi au-delà de la limite du doute raisonnable que l'ordre de grandeur qui représente la valeur moyenne probable du nombre de façons de procéder à la décomposition d'un très grand nombre pair en deux nombres premiers est le carré du nombre de nombres premiers inférieurs au nombre donné divisé par le nombre lui-même, ou, ce que nous savons être la même chose (grâce aux découvertes de Legendre et Tchebicheff), que le nombre de décompositions en question est un ratio fini (que l'on peut contraindre entre certaines limites) égal au nombre que l'on cherche à décomposer divisé par le carré de son logarithme népérien. Si nous nous mettons d'accord pour appeler provisoirement nombres-premiers-acceptables pour n ces nombres qui sont des nombres premiers eux-mêmes et dont le complémentaire à n est également premier, l'auteur montre que le nombre probable de tels nombres-premiers-acceptables (c'est-à-dire, la valeur la plus probable atteignable sous nos conditions présentes de connaissance) peut être trouvé approximativement en multipliant le nombre de nombres premiers ordinaires inférieurs à n par le produit d'un ensemble de fractions dépendant en partie de l'ordre de grandeur et en partie de la constitution du nombre n. Si n est le double d'un nombre premier, le produit en question est obtenu en multipliant ensemble toutes les quantités $\dfrac{p-2}{p-1}$, où p est tout nombre premier impair entre l'unité et la racine carrée de n ; mais si n lui-même contient de tels nombres premiers dans ses facteurs, alors les facteurs correspondant doivent être omis dans le calcul du produit. Nous voyons ainsi que si deux nombres pairs de grandeur considérable sont adjacents et assez proches[1] l'un de l'autre, l'un des deux étant le double d'un nombre premier, mais l'autre étant le sextuple d'un nombre premier, le nombre de nombres-premiers-acceptables du premier sera environ deux fois plus élevé que le nombre de nombres-premiers-acceptables du second. Dans le but de simplifier

Proceedings of the London Mathematical Society, IV. (1871-73), pp. 4-6.

[1] tolerably near to each other

l'explication, la formule d'approximation a été énoncée ci-dessus avec moins de précision que l'on pourrait en fournir ; plutôt que de multiplier le nombre total de nombres premiers impairs par le produit des facteurs que l'on a décrit, on aurait dû prendre les seuls d'entre eux qui ne sont pas compris entre 2 et $\sqrt{n}$, et le résultat ainsi modifié aurait été énoncé comme étant la valeur probable, non pas du nombre total de nombres-premiers-candidats, mais seulement de ceux d'entre eux (de loin le plus grand nombre) comme n'étant ni de la classe exclue décrite ci-dessus, ni ceux qui, soustraits de n, permettent d'obtenir des complémentaires appartenant à la classe en question. L'auteur a trouvé, par des essais effectifs à grande échelle, que les valeurs estimées du nombre de décompositions ne différaient jamais par plus qu'un pourcentage modéré, et dans certains cas extrêmement faible, de leur valeur effective, déterminée en utilisant les tables de Borchardt.

Les mêmes méthodes lui ont permis d'assigner une valeur probable au nombre de façons différentes de décomposer un nombre impair en somme d'un nombre premier et du double d'un autre, et en général, l'a amené à une représentation approchée du nombre de décompositions en nombres premiers de n'importe quel système d'équations linéaires dont le nombre total de solutions est limité, et même de résoudre de manière approchée des questions telles que celle de déterminer le nombre de nombres premiers inférieurs à une limite donnée qui sont suivis de nombres premiers différant d'eux d'un écart donné.

Puisque la communication a été faite à la Société mathématique, les Secrétaires ont été informés par M. Sylvester qu'il avait vérifié ses résultats par une toute autre méthode. Le nombre exact des solutions de l'équation $x + y = n$ en nombres premiers peut être exprimé algébriquement en utilisant la méthode des fonctions génératrices en fonction des nombres premiers inférieurs à n. On trouvera que l'expression consiste en deux parties - l'une étant un multiple constant de n, l'autre étant une fonction des racines de l'unité correspondant aux nombres premiers inférieurs et à leurs combinaisons. La première partie non périodique peut de façon triviale être vue comme la valeur moyenne de l'expression, et M. Sylvester a trouvé qu'elle est identique à la valeur obtenue par la méthode des moyennes précédemment utilisée.