

Summer School on Modular Functions

ANTWERP 1972

Formes modulaires et fonctions zêta
p-adiques

par Jean-Pierre SERRE

à Carl Ludwig Siegel

à l'occasion de son 76-ième anniversaire

Table des Matières

Introduction	192
§1. Formes modulaires p-adiques	194
§2. Opérateurs de Hecke	209
§3. Formes modulaires sur $\Gamma_0(p)$	222
§4. Familles analytiques de formes modulaires p-adiques	235
§5. Fonctions zêta p-adiques	251
Bibliographie	267

Introduction

Soient K un corps de nombres algébriques totalement réel, et ζ_K sa fonction zêta. D'après un théorème de Siegel [24], $\zeta_K(1 - k)$ est un nombre rationnel si k est entier ≥ 1 ; il est $\neq 0$ si k est pair. Lorsque K est abélien sur $\mathbb{Q}$, on peut écrire ce nombre comme produit de "nombres de Bernoulli généralisés" :

$$\zeta_K(1 - k) = \prod_{\chi} L(\chi, 1 - k) = \prod_{\chi} (-b_k(\chi)/k), \quad \text{cf. [18],}$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères de $\mathbb{Q}$ attachés à K . Cela permet de démontrer des propriétés de congruence reliant les $\zeta_K(1 - k)$ pour diverses valeurs de k , et d'en déduire par interpolation une fonction zêta p-adique pour le corps K , au sens de Kubota-Leopoldt (cf. [7], [10], [11], [16]).

Dans ce qui suit, je me propose d'étendre une partie de ces résultats au cas d'un corps totalement réel quelconque (non nécessairement abélien sur $\mathbb{Q}$). La méthode suivie est celle de Klingen [13] et Siegel [25], [26]. Elle consiste à utiliser le fait que $\zeta_K(1 - k)$ est le terme constant d'une certaine forme modulaire sur $SL_2(\mathbb{Z})$ dont les autres termes se calculent par des formules simples (ce sont des combinaisons linéaires d'exponentielles en k). Tout revient donc à transférer les propriétés de ces termes au terme constant lui-même. On est amené, pour ce faire, à définir les "formes modulaires p-adiques", limites de formes modulaires au sens usuel (sur le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$); de telles formes intervenaient déjà, au moins implicitement, dans les travaux d'Atkin sur les coefficients $c(n)$ de l'invariant modulaire j , cf. [2]. L'étude de ces formes fait l'objet des §§ 1, 2 et 3; elle repose de façon essentielle sur le théorème

récent de Swinnerton-Dyer [27] donnant la structure de l'algèbre des formes modulaires (mod.p). Les principaux résultats sont les suivants :

a) Une forme modulaire p-adique a un poids qui est, non plus un entier, mais un élément d'un certain groupe p-adique $X = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, cf. n°1.4.

b) Si

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n$$

est une forme modulaire p-adique de poids $\neq 0$, il existe des formules donnant $a_0(f)$ en termes des $a_n(f)$, $n \geq 1$, cf. n°2.3.

c) Toute forme modulaire (au sens usuel) sur le groupe $\Gamma_0(p)$ est une forme modulaire p-adique, cf. §3.

Dans l'application aux fonctions zêta, on rencontre des familles (f_s) de formes modulaires p-adiques dépendant (ainsi que leur poids) d'un paramètre p-adique s . L'étude de ces familles fait l'objet du §4. Le cas le plus important est celui où les fonctions $s \mapsto a_n(f_s)$, $n \geq 1$, appartiennent à l'algèbre d'Iwasawa Λ du n°4.1; on en déduit alors des propriétés analogues pour la fonction $s \mapsto a_0(f_s)$, cf. n°5.4.6 et 4.7.

Une fois ces résultats établis, leur application à l'interpolation p-adique de ζ_K ne présente pas de difficultés; c'est l'objet du §5. La fonction zêta p-adique de K est définie au n° 5.3; ses principales propriétés sont données par les ths. 20, 21, et 22. De nombreuses questions restent ouvertes; on en trouvera une brève discussion au n°5.6.

S1. Formes modulaires p-adiques1.1. Notationsa) Congruences

La lettre p désigne un nombre premier; on note v_p la valuation du corps p -adique $\mathbb{Q}_p$, normée de telle sorte que $v_p(p) = 1$; un élément x de $\mathbb{Q}_p$ est dit p-entier s'il appartient à $\mathbb{Z}_p$, i.e. si $v_p(x) \geq 0$.

Si $f = \sum a_n q^n \in \mathbb{Q}_p[[q]]$ est une série formelle en une indéterminée q , on pose

$$v_p(f) = \inf v_p(a_n).$$

Ainsi, $v_p(f) \geq 0$ signifie que $f \in \mathbb{Z}_p[[q]]$. Lorsque $v_p(f) \geq m$, on écrit aussi $f \equiv 0 \pmod{p^m}$.

Soit (f_i) une suite d'éléments de $\mathbb{Q}_p[[q]]$. On dit que f_i tend vers f si les coefficients de f_i tendent uniformément vers ceux de f , i.e. si $v_p(f - f_i) \rightarrow +\infty$.

b) Séries d'Eisenstein

Si k est un entier pair ≥ 2 , nous poserons

$$G_k = -b_k/2k + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad (q = e^{2\pi iz}),$$

$$E_k = -\frac{2k}{b_k} G_k = 1 - \frac{2k}{b_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

où b_k désigne le k -ième nombre de Bernoulli et $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$. Si $k \geq 4$, G_k et E_k sont des formes modulaires de poids k (relativement au groupe $SL_2(\mathbb{Z})$).

c) Les séries P, Q, R

On pose, avec Ramanujan,

$$P = E_2 = 1 - 24 \sum \sigma_1(n) q^n$$

$$Q = E_4 = 1 + 240 \sum \sigma_3(n) q^n$$

$$R = E_6 = 1 - 504 \sum \sigma_5(n) q^n.$$

Les séries Q et R engendrent l'algèbre graduée des formes modulaires : toute forme modulaire de poids k s'écrit de façon unique comme polynôme isobare de poids k en Q et R . Par exemple :

$$E_8 = Q^2, \quad E_{10} = QR, \quad E_{12} = \frac{441 Q^3 + 250 R^2}{691}, \quad E_{14} = Q^2 R,$$

$$\Delta = 2^{-6} 3^{-3} (Q^3 - R^2) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n.$$

La série P n'est pas une forme modulaire au sens habituel. Toutefois nous démontrerons plus loin (cf. n° 2.1) que c'est une "forme modulaire p -adique" de poids 2.

d) Exemples de congruences

D'après Kummer, $b_k/2k$ est p -entier si et seulement si k n'est pas divisible par $p - 1$; on a alors $v_p(G_k) = 0$. De plus, si $k' \equiv k \pmod{(p - 1)}$, on a $b_k/2k \equiv b_{k'}/2k' \pmod{p}$; comme la congruence analogue pour $\sigma_{k-1}(n)$ est évidente, on en conclut que :

$$G_k \equiv G_{k'} \pmod{p} \quad \text{si } k' \equiv k \not\equiv 0 \pmod{(p - 1)}.$$

(Plus généralement, il semble que toute congruence sur les nombres de Bernoulli puisse être étendue en une congruence sur les G_k .)

Lorsque k , par contre, est divisible par $p - 1$, le théorème de Clausen-von Staudt montre que $v_p(b_k/k) = -1 - v_p(k)$. On a donc $v_p(k/b_k) \geq 1$, d'où :

$$E_k \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{si } k \equiv 0 \pmod{(p - 1)}.$$

Plus précisément :

$$E_k \equiv 1 \pmod{p^m} \iff k \equiv 0 \pmod{(p-1)p^{m-1}} \quad \text{si } p \neq 2$$

$$E_k \equiv 1 \pmod{2^m} \iff k \equiv 0 \pmod{2^{m-2}}.$$

1.2. L'algèbre des formes modulaires $(\text{mod. } p)$

Si $k \in \mathbb{Z}$, notons M_k l'ensemble des formes modulaires

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,$$

de poids k , dont les coefficients a_n sont rationnels et p -entiers. Si $f \in M_k$, la réduction $\tilde{f}$ de f modulo p appartient à l'algèbre $\mathbf{F}_p[[q]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbf{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'ensemble des séries ainsi obtenues sera noté $\tilde{M}_k$. On pose

$$\tilde{M} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{M}_k;$$

c'est une sous-algèbre de $\mathbf{F}_p[[q]]$, appelée algèbre des formes modulaires $(\text{mod. } p)$. La structure de $\tilde{M}$ a été déterminée par Swinnerton-Dyer [27]. Rappelons brièvement le résultat (pour plus de détails, voir [20] ou [27]) :

(i) Le cas $p \geq 5$

On a vu (n° 1.1) que $E_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, autrement dit $\tilde{E}_{p-1} = 1$. La multiplication par E_{p-1} applique M_k dans M_{k+p-1} , et l'on en déduit des inclusions :

$$\tilde{M}_k \subset \tilde{M}_{k+p-1} \subset \dots \subset \tilde{M}_{k+n(p-1)} \subset \dots$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, notons $\tilde{M}^\alpha$ la réunion des $\tilde{M}_k$, pour k parcourant α . L'un des résultats de Swinnerton-Dyer est que $\tilde{M}$ est somme directe des $\tilde{M}^\alpha$,

pour $\alpha \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$; en d'autres termes, $\tilde{M}$ est une algèbre graduée, de groupe des degrés $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$; on a $\tilde{M}^\alpha = 0$ si α est impair, i.e. non divisible par 2 dans $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$. De plus, $\tilde{M}$ s'identifie au quotient de l'algèbre de polynômes $F_p[Q,R]$ par l'idéal principal engendré par $\tilde{A} - 1$, où $\tilde{A}(Q,R)$ est le polynôme isobare de poids $p - 1$ obtenu par réduction (mod.p) à partir du polynôme A tel que $E_{p-1} = A(Q,R)$. (En termes imagés, la relation $\tilde{E}_{p-1} = 1$ est "la seule relation" entre formes modulaires (mod.p).)

Cette description de $\tilde{M}$ montre que $\tilde{M}$ (resp. sa sous-algèbre $\tilde{M}^\circ$) est l'algèbre affine d'une courbe algébrique Y (resp. Y°) qui est lisse sur F_p ; on trouvera une interprétation "géométrique" de Y et de Y° dans [20], p.416-05; notons seulement ici que $\tilde{M}$ et $\tilde{M}^\circ$ sont des anneaux de Dedekind, puisque Y et Y° sont lisses.

Exemples

- Pour $p = 11$, on a $E_{p-1} = QR$, d'où :

$$\tilde{M} = F_{11}[Q,R]/(QR - 1) \quad \text{et} \quad \tilde{M}^\circ = F_{11}[Q^5, R^5]/(Q^5 R^5 - 1).$$

Les courbes $Y = \text{Spec}(\tilde{M})$ et $Y^\circ = \text{Spec}(\tilde{M}^\circ)$ sont des courbes de genre 0, ayant chacune deux points à l'infini, rationnels sur F_{11} .

- Pour $p = 13$, on a $E_{p-1} = \frac{441 Q^3 + 250 R^2}{691}$, d'où :

$$\tilde{M} = F_{13}[Q,R]/(Q^3 + 10R^2 - 11) \quad \text{et} \quad \tilde{M}^\circ = F_{13}[Q^3].$$

La courbe Y (resp. Y°) est une courbe de genre 1 (resp. de genre 0), ayant un seul point à l'infini, rationnel sur F_{13} .

(ii) Le cas $p = 2, 3$

On a alors $\tilde{Q} = \tilde{R} = 1$. On en déduit facilement que $\tilde{M}$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $F_p[\tilde{\Delta}]$, engendrée par la réduction (mod.p) de Δ . On a $\tilde{M}_{k-2} \subset \tilde{M}_k$ et même $\tilde{M}_{k-2} = \tilde{M}_k$ si k n'est pas divisible par 12. On convient que $\tilde{M}^\circ = \tilde{M}$.

1.3. Congruences (mod p^m) entre formes modulaires

THÉOREME 1. Soit m un entier ≥ 1 . Soient f et f' deux formes modulaires à coefficients rationnels, de poids k et k' respectivement. On suppose que $f \neq 0$ et que

$$v_p(f - f') \geq v_p(f) + m.$$

On a alors :

$$k' \equiv k \pmod{(p-1)p^{m-1}} \quad \text{si } p \geq 3$$

$$k' \equiv k \pmod{2^{m-2}} \quad \text{si } p = 2.$$

Quitte à multiplier f par un scalaire, on peut supposer que $v_p(f) = 0$, auquel cas l'hypothèse équivaut à :

$$f' \equiv f \pmod{p^m}.$$

En particulier, les coefficients de f et de f' sont p -entiers, et l'on a $\tilde{f} = \tilde{f}' \neq 0$. Si $p \geq 5$, on voit que $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ appartiennent à la même composante $\tilde{M}^a$ de l'algèbre $\tilde{M}$ (cf. n° 1.2), autrement dit, on a $k' \equiv k \pmod{(p-1)}$; la même congruence subsiste si $p = 2$ ou 3 , puisque k' et k sont pairs. Le th.1 est donc démontré pour $m = 1$.

Supposons maintenant $m \geq 2$. Soit $h = k' - k$. Quitte à remplacer f' par

$$f' E_{(p-1)p^n}$$

avec n assez grand, on peut supposer que $h \geq 4$. La série d'Eisenstein E_h est alors une forme modulaire de poids h ; comme h est divisible par $p-1$, on a $E_h \equiv 1 \pmod{p}$. Posons $r = v_p(h) + 1$ si $p \geq 3$ et $r = v_p(h) + 2$ si $p = 2$. Il nous faut montrer que $r \geq m$. Supposons que $r < m$. On a $f \cdot E_h - f' = f - f' + f(E_h - 1)$.

Or $f - f' \equiv 0 \pmod{p^m}$ et $E_h - 1 \equiv 0 \pmod{p^r}$, cf. n° 1.1. On en conclut que $f.E_h - f' \equiv 0 \pmod{p^r}$ et que

$$p^{-r}(f.E_h - f') \equiv p^{-r}f(E_h - 1) \pmod{p}.$$

Or, d'après le théorème de Clausen-von Staudt, on a

$$p^{-r}(E_h - 1) = \lambda\phi, \quad \text{où } \phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{h-1}(n)q^n, \quad \text{et } v_p(\lambda) = 0.$$

La congruence ci-dessus équivaut donc à

$$f\phi \equiv g \pmod{p},$$

où g est la forme modulaire $\lambda^{-1}p^{-r}(f.E_h - f')$, qui est de poids k' .

Comme $\tilde{f} \neq 0$, ceci peut s'écrire $\tilde{\phi} = \tilde{g}/\tilde{f}$ et montre que $\tilde{\phi}$ appartient au corps des fractions de $\tilde{M}$; de plus, $\tilde{g}$ et $\tilde{f}$ ont même poids $\pmod{(p-1)}$; on en déduit que $\tilde{\phi}$ appartient au corps des fractions de $\tilde{M}^0$. Or, on a

$$\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^p = \tilde{\psi}, \quad \text{avec } \psi = \sum_{(p,n)=1} \sigma_{h-1}(n)q^n,$$

et on vérifie facilement que

$$\psi \equiv \theta^{h-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n \right), \quad \text{où } \theta = q \, d/dq \quad (\text{cf. [27]}).$$

Pour tirer de là une contradiction, distinguons deux cas :

(i) $p > 5$.

On a alors

$$\tilde{\psi} = -\frac{1}{24} \theta^{h-1}(\tilde{P}) = -\frac{1}{24} \theta^{p-2}(\tilde{E}_{p+1}),$$

d'où $\tilde{\psi} \in \tilde{M}^\circ$, vu les propriétés de l'opérateur θ (cf. [20], [27]). L'équation $\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^p = \tilde{\psi}$ montre que $\tilde{\phi}$ est entier sur $\tilde{M}^\circ$, donc appartient à $\tilde{M}^\circ$, puisque $\tilde{M}^\circ$ est intégralement clos; cela contredit le lemme de [20], p.416-11.

(ii) $p = 2$ ou 3 .

On a alors $\tilde{\psi} = \tilde{\Delta}$, comme le montrent les congruences donnant $\tau(n)$ modulo 6. Or $\tilde{M} = \mathbf{F}_p[\tilde{\Delta}]$, et l'équation $X - X^p = \tilde{\Delta}$ est évidemment irréductible sur le corps $\mathbf{F}_p(\tilde{\Delta})$. On obtient encore une contradiction.

Remarques

1) Le fait que $\tilde{\phi}$ ne puisse pas appartenir au corps des fractions de $\tilde{M}^\circ$ peut aussi se démontrer par un argument de filtration, généralisant celui de [20], loc.cit.

2) Il serait intéressant de décrire géométriquement le revêtement cyclique de degré p de la courbe Y° (ou de la courbe Y) défini par l'équation $X - X^p = \tilde{\psi}$.

1.4. Formes modulaires p-adiques

a) Le groupe X

Soit m un entier ≥ 1 (resp. ≥ 2 si $p = 2$). Posons

$$X_m = \mathbf{Z}/(p-1)p^{m-1}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}/p^{m-1}\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z} \quad \text{si } p \neq 2$$

et $X_m = \mathbf{Z}/2^{m-2}\mathbf{Z} \quad \text{si } p = 2.$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, les X_m forment de façon naturelle un système projectif; nous désignerons par X la limite projective de ce système. On a

$$X = \varprojlim X_m = \begin{cases} \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z} & \text{si } p \neq 2 \\ \mathbf{Z}_2 & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

où $\mathbf{Z}_p$ est l'anneau des entiers p -adiques. Le groupe X est un groupe de Lie p -adique compact de dimension 1. L'homomorphisme canonique $\mathbf{Z} \rightarrow X$

est injectif; nous l'utiliserons pour identifier Z à un sous-groupe dense de X .

Il y a souvent intérêt à considérer les éléments de X comme des caractères (p -adiques) du groupe Z_p^* des unités p -adiques. De façon plus précise, soit V_p le groupe des endomorphismes continus de Z_p^* , muni de la topologie de la convergence uniforme. On vérifie facilement que l'application naturelle de Z dans V_p se prolonge en un homomorphisme continu $\epsilon : X \rightarrow V_p$. Cet homomorphisme est injectif si $p = 2$, et bijectif si $p \neq 2$. Si $k \in X$, et $v \in Z_p^*$, on note v^k le transformé de v par l'endomorphisme $\epsilon(k)$ de Z_p^* . Si l'on écrit $k = (s, u)$, avec $s \in Z_p^*$, $u \in Z/(p-1)Z$, et si l'on décompose v en $v_1 v_2$, avec $v_1^{p-1} = 1$ et $v_2 \equiv 1 \pmod{p}$, on a $v^k = v_1^k v_2^k = v_1^u v_2^s$.

Un élément $k \in X$ est dit pair s'il appartient au sous-groupe $2X$, i.e. si $(-1)^k = 1$. Lorsque $p \neq 2$, cela signifie que la seconde composante u de k est un élément pair de $Z/(p-1)Z$; lorsque $p = 2$, cela signifie que k appartient à $2Z_2$.

b) Définition des formes modulaires p -adiques

Une forme modulaire p -adique est une série formelle

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,$$

à coefficients $a_n \in Q_p$, possédant la propriété suivante :

(*) Il existe une suite f_i de formes modulaires à coefficients rationnels, de poids k_i , telle que $\lim f_i = f$.

(Rappelons, cf. n° 1.1, que $\lim f_i = f$ signifie que $v_p(f_i - f)$ tends vers $+\infty$, i.e. que les coefficients des f_i tendent uniformément vers ceux de f .)

Remarque. La définition ci-dessus est la définition originale donnée dans [21]. On en trouvera une interprétation "géométrique" (ainsi qu'une généralisation) dans le texte de Katz [12].

c) Poids d'une forme modulaire p-adique

THÉOREME 2. Soit f une forme modulaire p-adique $\neq 0$, et soit (f_i) une suite de formes modulaires de poids (k_i) , à coefficients rationnels, ayant pour limite f. Les k_i ont alors une limite dans le groupe $X = \varprojlim X_m$; cette limite dépend de f, mais pas de la suite (f_i) choisie.

Par hypothèse, on a $v_p(f_i - f_j) \rightarrow +\infty$; d'autre part, les $v_p(f_i)$ sont égaux à $v_p(f)$ pour i assez grand. En appliquant le th.1, on en déduit que, pour tout $m \geq 1$, l'image de la suite k_i dans X_m est stationnaire; cela signifie que les k_i ont une limite k dans X . Le fait que cette limite ne dépende pas de la suite choisie est immédiat.

La limite k des k_i est appelée le poids de f ; c'est un élément pair de X . On convient que 0 est de poids k , quel que soit $k \in 2X$. Avec cette convention, les formes modulaires p-adiques de poids donné forment un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel (et même un espace de Banach p-adique pour la norme définie par v_p).

Si des formes modulaires p-adiques f_i , de poids $k_i \in 2X$, tendent vers une série formelle f , celle-ci est une forme modulaire p-adique. De plus, si $f \neq 0$, les k_i ont une limite k dans X , et f est de poids k ; cela se déduit du th.2, en approchant les f_i par des formes modulaires au sens usuel.

Exemple. Si $p = 2, 3, 5$, on a $Q \equiv 1 \pmod{p}$, d'où

$$\frac{1}{Q} = \lim_{m \rightarrow \infty} Q^{p^m} - 1,$$

ce qui montre que $1/Q$ est modulaire p-adique, de même que la série $1/j = \Delta/Q^3$, qui est de poids 0. Il n'est d'ailleurs pas difficile de démontrer que (pour $p = 2, 3, 5$) une série f est modulaire p-adique de poids 0 si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n/j^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Delta^n Q^{-3n},$$

avec $b_n \in \mathbb{Q}_p$ et $v_p(b_n) \rightarrow +\infty$, et l'on a alors $v_p(f) = \inf v_p(b_n)$.

Plus généralement, on aurait pu définir l'algèbre des formes modulaires p-adiques de poids 0 comme l'algèbre "de Tate" de la droite projective privée des disques ouverts de rayon 1 centrés aux valeurs "supersingulières" de j ; c'est le point de vue adopté par Katz [12].

1.5. Premières propriétés des formes modulaires p-adiques

Si f est une forme modulaire p-adique, on a $v_p(f) \neq -\infty$, i.e. il existe une puissance p^N de p telle que $p^N f \in \mathbb{Z}_p[[q]]$; cela résulte de la définition, et du fait analogue pour les formes modulaires usuelles. De plus, le th.1 reste valable :

THÉOREME 1'. Soit m un entier ≥ 1 . Soient f et f' deux formes modulaires p-adiques, non nulles, de poids k , $k' \in X$ respectivement. Si

$$v_p(f - f') \geq v_p(f) + m,$$

k et k' ont même image dans X_m .

On écrit f (resp. f') comme limite de formes modulaires usuelles f_i (resp. f'_i) de poids k_i (resp. k'_i). Pour i assez grand, on a

$$v_p(f_i) = v_p(f) = v_p(f') = v_p(f'_i)$$

$$\text{et} \quad v_p(f_i - f'_i) \geq v_p(f) + m,$$

ce qui, d'après le th.1, montre que k_i et k'_i ont même image dans X_m ; le théorème en résulte.

COROLLAIRE 1. Soit $f = a_0 + a_1q + \dots + a_nq^n + \dots$ une forme modulaire p-adique de poids $k \in X$. Soit m un entier ≥ 0 tel que l'image de k dans X_{m+1} soit $\neq 0$. On a alors

$$v_p(a_0) + m \geq \inf_{n \geq 1} v_p(a_n).$$

(En d'autres termes, si les a_n sont p -entiers pour $n \geq 1$, il en est de même de $p^m a_0$.)

Si $a_0 = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, la fonction constante $f' = a_0$ est de poids 0, et l'on a

$$v_p(f - f') = \inf_{n \geq 1} v_p(a_n).$$

Comme les poids de f et f' ont des images différentes dans X_{m+1} , le th.1' montre que $v_p(f) + m + 1 > v_p(f - f')$, d'où le résultat cherché puisque $v_p(a_0) \geq v_p(f)$.

Remarque. Lorsque k n'est pas divisible par $p-1$, i.e. n n'appartient pas au sous-groupe Z_p de X , on peut prendre $m = 0$ dans le corollaire précédent, et l'on en déduit que, si les a_n sont p -entiers pour $n \geq 1$, il en est de même de a_0 .

COROLLAIRE 2. Soit

$$f^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} q^n$$

une suite de formes modulaires p -adiques, de poids $k^{(i)}$. Supposons que :

- (a) les $a_n^{(i)}$, $n \geq 1$, tendent uniformément vers des $a_n \in Q_p$;
- (b) les $k^{(i)}$ tendent dans X vers une limite $k \neq 0$.

Alors les $a_0^{(i)}$ ont une limite $a_0 \in Q_p$, et la série

$$f = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n + \dots$$

est une forme modulaire p -adique de poids k .

Vu l'hypothèse $\lim k^{(i)} \neq 0$, on peut supposer qu'il existe un entier m tel que tous les $k^{(i)}$ aient une même image non nulle dans X_m . D'autre part, vu (a), il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que $v_p(a_n^{(i)}) \geq t$ pour tout $n \geq 1$, et tout i . D'après le cor.1, on a donc $v_p(a_0^{(i)}) > t - m$ pour tout i . Les $a_0^{(i)}$ forment donc une partie relativement compacte de Q_p . Si (i_j) est

une suite extraite de (i) telle que $a_0^{(i_j)}$ converge vers un élément a_0 de $\mathbb{Q}_p$, la série

$$f = \lim f^{(i_j)} = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n + \dots$$

est évidemment modulaire p-adique de poids k. De plus, si (i'_j) est une autre suite extraite de (i) telle que $a_0^{(i'_j)}$ converge vers a'_0 , la série $f' = a'_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n + \dots$ est également modulaire p-adique de poids k, et il en est de même de $f - f' = a_0 - a'_0$. Comme $a_0 - a'_0$ est aussi de poids 0, ce n'est possible que si $a_0 = a'_0$. Ainsi, a_0 ne dépend pas du choix de la suite (i_j) , ce qui montre bien que $a_0^{(i)}$ est une suite convergente.

1.6. Exemple : séries d'Eisenstein p-adiques

Soit $k \in X$. Si n est un entier ≥ 1 , nous noterons $\sigma_{k-1}^*(n)$ l'entier p-adique défini par

$$\sigma_{k-1}^*(n) = \sum d^{k-1},$$

la somme étant étendue aux diviseurs positifs d de n qui sont premiers à p. Cela a un sens, puisqu'un tel élément d est une unité p-adique, ainsi que d^{k-1} , cf. n° 1.4, a).

Supposons maintenant que k soit pair. Choisissons une suite d'entiers pairs $k_i \geq 4$ qui tende vers l'infini au sens usuel (ce que nous écrirons $|k_i| \rightarrow \infty$), et qui tende vers k dans X; c'est évidemment possible. On a alors

$$\lim \sigma_{k_i-1}(n) = \sigma_{k-1}^*(n) \quad \text{dans } \mathbb{Z}_p;$$

en effet d^{k_i-1} tend vers 0 si d est divisible par p (puisque $|k_i| \rightarrow \infty$) et tend vers d^{k-1} sinon (puisque $k_i \rightarrow k$ dans X). De plus, la convergence

est uniforme en n . Or les $\sigma_{k_i-1}(n)$ sont les coefficients d'indice ≥ 1 de la série d'Eisenstein

$$G_{k_i} = -b_{k_i}/2k_i + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k_i-1}(n)q^n,$$

et le terme constant de cette série est $-b_{k_i}/2k_i$, qui est égal, comme on sait, à $\frac{1}{2}\zeta(1-k_i)$. Appliquant alors le cor.2 au th.1', on en déduit que, si $k \neq 0$, les G_{k_i} ont une limite G_k^* qui est une forme modulaire p -adique de poids k :

$$G_k^* = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(n)q^n, \quad \text{où} \quad a_0 = \frac{1}{2} \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta(1-k_i).$$

Il est clair que cette limite ne dépend pas du choix de la suite k_i ; nous l'appellerons la série d'Eisenstein p -adique de poids k ; son terme constant a_0 sera noté $\frac{1}{2}\zeta^*(1-k)$, de sorte que l'on a

$$G_k^* = \frac{1}{2}\zeta^*(1-k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(n)q^n \quad (k \in X, k \text{ pair} \neq 0).$$

Cela définit une fonction ζ^* sur les éléments impairs de $X - \{1\}$; le cor.2 au th.1' montre que cette fonction est continue (en fait, la série G_k^* elle-même dépend continûment de k). Nous allons voir que ζ^* est essentiellement la fonction zêta p -adique de Kubota-Leopoldt [16]. De façon plus précise:

THÉOREME 3. (i) Si $p \neq 2$, et si (s,u) est un élément impair $\neq 1$ de $X = \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ on a

$$\zeta^*(s,u) = L_p(s; \omega^{1-u}),$$

où $L_p(s; \chi)$ désigne la fonction L p -adique d'un caractère χ (Iwasawa [11], p.29-30) et ω désigne le caractère défini dans [11], p.18.

(ii) Si $p = 2$, et si s est un élément impair $\neq 1$ de $X = \mathbf{Z}_2$,

on a $\zeta^*(s) = L_2(s; \chi^0)$, cf. [11], p.29-30.

Notons ζ' la fonction

$$(s, u) \mapsto L_p(s; \omega^{1-u}) \quad \text{si } p \neq 2$$

$$s \mapsto L_p(s; \chi^0) \quad \text{si } p = 2.$$

Il résulte de [11], loc.cit., que ζ' est continue, et que

$$\zeta'(1 - k) = (1 - p^{k-1}) \zeta(1 - k) \quad \text{si } k \in 2\mathbb{Z}, \quad k \geq 2.$$

Si $k \in 2\mathbb{X}$, $k \neq 0$, et si (k_i) est une suite convergeant vers k comme ci-dessus, on a

$$\zeta'(1 - k) = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta'(1 - k_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - p^{k_i-1}) \zeta(1 - k_i).$$

Mais, comme $|k_i|$ tend vers $+\infty$, on a $\lim_{i \rightarrow \infty} (1 - p^{k_i-1}) = 1$, d'où

$$\zeta'(1 - k) = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta(1 - k_i) = \zeta^*(1 - k),$$

ce qui démontre bien que $\zeta' = \zeta^*$.

Exemple

Supposons que $p \equiv 3 \pmod{4}$ et $p \neq 3$. Prenons pour k l'élément $(1, \frac{p+1}{2})$ de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. On peut montrer que

$$G_k^* = \frac{1}{2}h(-p) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \left(\frac{d}{p}\right) q^n,$$

où $h(-p)$ est le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$.

Remarques

1) Lorsque k est un entier pair ≥ 2 , on vient de voir que

$$\zeta^*(1-k) = (1-p^{k-1}) \zeta(1-k);$$

c'est la valeur en $1-k$ de la fonction zêta "déarrassée de son p -ième facteur". On a en outre

$$G_k^* = G_k - p^{k-1} G_k|V, \quad \text{cf. n}^\circ 2.1.$$

2) La fonction ζ^* n'est pas définie au point $s = 1$: elle a un pôle simple en ce point [7], [11], [16].

3) Lorsque k est divisible par $p-1$, on a $v_p(\zeta^*(1-k)) < 0$, de sorte que la série

$$E_k^* = 2G_k^*/\zeta^*(1-k) = 1 + \frac{2}{\zeta^*(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(n) q^n$$

est à coefficients p -entiers, et $E_k^* \equiv 1 \pmod{p}$. Plus précisément, si l'image de k dans X_m est nulle, on a

$$E_k^* \equiv 0 \pmod{p^m}.$$

En particulier, E_k^* tend vers 1 lorsque k tend vers 0; cela conduit à poser $E_0^* = 1$.

4) Lorsque k n'est pas divisible par $p-1$, il est congru mod. $(p-1)$ à un entier a compris entre 2 et $p-3$, et l'on a

$$\zeta^*(1-k) \equiv -b_a/a \pmod{p},$$

en vertu des congruences de Kummer. En particulier, si p est régulier, on a $\zeta^*(1-k) \not\equiv 0 \pmod{p}$, et la fonction ζ^* ne s'annule nulle part.

Par contre, si p est irrégulier, il peut se faire que $\zeta^*(1-k) = 0$ pour certaines valeurs de k ; la série G_k^* correspondante est alors "parabolique" : son terme constant est nul.

§2. Opérateurs de Hecke2.1. Action de T_ℓ , U , V , θ sur les formes modulaires p-adiques

Si

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

est une série formelle à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$, on pose :

$$f|U = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn} q^n \quad \text{et} \quad f|V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{pn}.$$

Si ℓ est un nombre premier $\neq p$, et si $k \in X$, on pose :

$$f|_k T_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\ell n} q^n + \ell^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\ell n}.$$

Lorsque k est sous-entendu, on écrit $f|T_\ell$ au lieu de $f|_k T_\ell$.

THÉORÈME 4. Si f est une forme modulaire p-adique de poids k , il en est de même de $f|U$, $f|V$ et des $f|_k T_\ell$ (ℓ premier $\neq p$).

Choisissons une suite $f_i = \sum a_{n,i} q^n$ de formes modulaires (au sens usuel), à coefficients rationnels, telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f.$$

Quitte à remplacer f_i par $f_i E_{(p-1)p^i}$, on peut supposer que les poids k_i des f_i sont tels que $|k_i| \rightarrow \infty$. Pour tout nombre premier ℓ , on sait (cf. par exemple [3], [22]) que le transformé $f_i|T_\ell$ de f_i par l'opérateur de Hecke T_ℓ est une forme modulaire de poids k_i , donnée par la formule :

$$f_i|T_\ell = \sum a_{\ell n, i} q^n + \ell^{k_i-1} \sum a_{n, i} q^{\ell n}.$$

On a $\lim_{i \rightarrow \infty} \ell^{k_i-1} = \ell^{k-1}$ si $\ell \neq p$ (car alors ℓ est une unité p -adique),

et $\lim_{i \rightarrow \infty} \ell^{k_i-1} = 0$ si $\ell = p$ (puisque $|k_i| \rightarrow \infty$). On en conclut que les

$f_i|T_\ell$ tendent vers $f|T_\ell$ si $\ell \neq p$, et vers $f|U$ si $\ell = p$; cela montre bien que les séries $f|T_\ell$ et $f|U$ sont des formes modulaires p -adiques, de poids

$\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = k$. Appliquant ce résultat à f_i , on voit que $f_i|U$ est modu-

laire p -adique de poids k_i ; comme $f_i|T_p$ est aussi modulaire de poids k_i ,

on en conclut que $f_i|V = p^{1-k_i}(f_i|T_p - f_i|U)$ est modulaire p -adique de poids k_i ; comme $f|V = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i|V$, il en résulte bien que $f|V$ est modu-

laire p -adique de poids k .

Remarque. On peut également définir les opérateurs de Hecke T_m pour tout entier m premier à p , au moyen des formules usuelles. Ces opérateurs commutent entre eux, commutent à U et V , et l'on a

$$T_m T_n = T_n T_m = T_{mn} \quad \text{si} \quad (m, n) = 1,$$

$$T_\ell T_{\ell^n} = T_{\ell^{n+1}} + \ell^{k-1} T_{\ell^{n-1}} \quad \text{si} \quad \ell \text{ est premier et } n \geq 1.$$

Exemples

On a $G_k^*|T_\ell = (1 + \ell^{k-1})G_k^*$ et $G_k^*|U = G_k^*$.

Si k est un entier pair ≥ 2 , un calcul immédiat montre que

$$G_k^* = G_k - p^{k-1}G_k|V = G_k|(1 - p^{k-1}V).$$

On en déduit

$$G_k = G_k^*|(1 - p^{k-1}V)^{-1} = G_k^* + p^{k-1}G_k^*|V + \dots + p^{m(k-1)}G_k^*|V^m + \dots$$

Pour $k = 2$, cette formule montre que $G_2 = -P/24$ est somme d'une série convergente de formes modulaires p -adiques de poids 2. On en conclut que P est une forme modulaire p -adique de poids 2.

THÉOREME 5. Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire p -adique de poids k .

(a) La série

$$\theta f = q \, df/dq = \sum n a_n q^n$$

est une forme modulaire p -adique de poids $k + 2$.

(b) Pour tout $h \in X$, la série

$$f|_{R_h} = \sum_{(n,p)=1} n^h a_n q^n$$

est une forme modulaire p -adique de poids $k + 2h$.

Soit (f_i) une suite de formes modulaires, à coefficients rationnels, telle que $\lim f_i = f$, et soit k_i le poids de f_i . On sait (cf. [20], [27]) que $\theta f_i = k_i P f_i / 12 + g_i$, où g_i est une forme modulaire de poids $k_i + 2$. Puisque P est modulaire p -adique de poids 2, il en résulte que θf_i est modulaire p -adique de poids $k_i + 2$, et en passant à la limite cela montre bien que θf est modulaire p -adique de poids $k + 2$.

Choisissons maintenant une suite d'entiers positifs h_i telle que

$$h_i \rightarrow h \text{ dans } X \quad \text{et} \quad |h_i| \rightarrow \infty.$$

Vu ce qui précède, $\theta^{h_i} f$ est modulaire p -adique de poids $k + 2h_i$. Comme $\theta^{h_i} f$ tend vers $f|_{R_h}$ lorsque $i \rightarrow \infty$, on voit bien que $f|_{R_h}$ est modulaire p -adique de poids $k + 2h$.

Remarque

On a les formules : $(\theta f)|_U = p \theta(f|_U)$, $f|_{R_h}|_U = 0$,

$$\theta(f|_V) = p(\theta f)|_V, \quad (\theta f)|_{k+2} T_\ell = \ell \theta(f|_k T_\ell), \quad f|_V|_{R_h} = 0,$$

et
$$(f|_{R_h})|_{k+2h} T_\ell = \ell^h (f|_k T_\ell)|_{R_h}$$

pour tout ℓ premier $\neq p$.

Exemples

Pour $h = 0$, on a

$$f|_{R_0} = \lim_{m \rightarrow \infty} \theta^{(p-1)p^m} f = f|(1 - UV) = \sum_{(n,p)=1} a_n q^n.$$

Pour $h = (0, \frac{p-1}{2}) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$, $p \geq 3$, on a :

$$f|_{R_h} = \lim_{m \rightarrow \infty} \theta^{(p-1)p^m/2} f = \sum \left(\frac{n}{p}\right) a_n q^n.$$

2.2. Une propriété de contraction

Les opérateurs de Hecke T_ℓ et T_p laissent stable l'espace M_k des formes modulaires de poids k à coefficients p -entiers. Par réduction (mod. p) ils opèrent donc sur $\tilde{M}_k$; comme $T_p \equiv U \pmod{p}$, on en conclut que U opère sur $\tilde{M}_k$, donc aussi sur les espaces

$$\tilde{M}^\alpha = \bigcup_{k \in \alpha} \tilde{M}_k \quad (\alpha \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}, \quad \text{cf. n}^\circ 1.2).$$

En fait, U "contracte" les $\tilde{M}_k$. De façon plus précise, nous allons démontrer le théorème suivant, en rapport étroit avec des résultats d'Atkin [2], Koike [15] et Dwork :

THÉORÈME 6.

- (i) Si $k > p + 1$, U applique $\tilde{M}_k$ dans $\tilde{M}_{k'}$, avec $k' < k$.
- (ii) La restriction de U à $\tilde{M}_{p-1}$ est bijective.

Lorsque $p = 2$ ou 3 , on a $\tilde{M} = \mathbf{F}_p[\tilde{\Delta}]$, et $\tilde{M}_k$ est l'espace des polynômes en $\tilde{\Delta}$ de degré $\leq k/12$. Utilisant la formule $(g^p f)|U \equiv g \cdot (f|U) \pmod{p}$,

on vérifie que $\tilde{\Delta}^i|U = 0$ si $i \not\equiv 0 \pmod{p}$ et $\tilde{\Delta}^i|U = \tilde{\Delta}^{i/p}$ sinon. On en conclut que U applique $\tilde{M}_k$ dans $\tilde{M}_{k'}$, avec $k' = [k/p]$, d'où le théorème dans ce cas.

Supposons maintenant $p \geq 5$. Si f est un élément d'un $\tilde{M}^\alpha$, notons $w(f)$ la filtration de f (cf. [20], [27]), i.e. la borne inférieure des k tels que $f \in \tilde{M}_k$.

LEMME 1.

(a) On a $w(\theta f) \leq w(f) + p + 1$, et il y a égalité si et seulement si $w(f) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

(b) On a $w(f^i) = i w(f)$ pour tout $i \geq 1$.

L'assertion (a) est démontrée dans [27], Lemme 5 et dans [20], cor.3 au th.5.

Pour prouver (b), on peut supposer $f \neq 0$, i.e. $w(f) \neq -\infty$. Ecrivons alors f comme polynôme isobare $F(\tilde{Q}, \tilde{R})$ en $\tilde{Q}, \tilde{R}$, de poids $k = w(f)$. Le polynôme F n'est pas divisible par le polynôme $\tilde{A}$ du n° 1.2 ([27], loc. cit.). Comme $\tilde{A}$ est sans facteur multiple, il en résulte que F^i n'est pas non plus divisible par $\tilde{A}$, d'où le fait que $f^i = F^i(\tilde{Q}, \tilde{R})$ est de filtration ik .

LEMME 2.

(i) On a $w(f|U) \leq p + (w(f) - 1)/p$.

(ii) Si $w(f) = p-1$, on a $w(f|U) = p-1$.

On a l'identité

$$(f|U)^p = f - \theta^{p-1}f \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathbf{F}_p[[q]].$$

Si l'on pose $k = w(f)$ et $k' = w(f|U)$, le lemme 1 montre que

$$w((f|U)^p) = pk' \quad \text{et} \quad w(\theta^{p-1}f) \leq k + p^2 - 1.$$

On en conclut que $pk' \leq \text{Sup}(k, k + p^2 - 1) = k + p^2 - 1$, ce qui démontre (i).

Supposons maintenant que $k = p-1$. Si l'on calcule $\theta^2 f$ au moyen de la formule $12\theta = kP + \partial$ (cf. [27] pour la définition de la dérivation ∂), on trouve que $12^2 \theta^2 f = Qf + \partial^2 f$, d'où $\theta^2 f \in \tilde{M}_{p+3}$. La filtration h de $\theta^2 f$ est donc $-\infty, 4$ ou $p+3$. Dans le premier cas, on aurait $\theta^2 f = 0$, d'où $\theta^{p-1} f = 0$ et f serait égal à $(f|U)^P$, ce qui est absurde, puisque la filtration de f n'est pas divisible par p . Dans le cas $h = 4$, $\theta^2 f$ serait multiple non nul de Q , ce qui est également absurde puisque son terme constant est nul. On a donc nécessairement $w(\theta^2 f) = p+3$. Appliquant le Lemme 1, on en conclut que

$$w(\theta^i \theta^2 f) = p + 3 + i(p+1) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq p-3.$$

(Observer que $p + 3 + i(p+1)$ n'est pas divisible par p si $i \leq p-4$.)

En particulier, on a $w(\theta^{p-1} f) = p + 3 + (p-3)(p+1) = p(p-1)$, d'où $w((f|U)^P) = p(p-1)$, et $w(f|U) = p-1$.

Le théorème 6 est maintenant immédiat. L'assertion (i) résulte du Lemme 2 (i), compte tenu de ce que $p + (k-1)/p$ est $< k$ si $k > p+1$. D'autre part, si f est un élément non nul de $\tilde{M}_{p-1}$, on a, soit $w(f) = 0$, et f est une constante, d'où $f|U = f \neq 0$, soit $w(f) = p-1$ et le Lemme 2 (ii) montre que $w(f|U) = p-1$, d'où $f|U \neq 0$; ainsi, la restriction de U à $\tilde{M}_{p-1}$ est injective, donc bijective, puisque $\tilde{M}_{p-1}$ est de dimension finie.

Le th.6 entraîne aussitôt le résultat suivant :

COROLLAIRE. Soit α un élément pair de $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$, $p \geq 5$.

(i) On peut décomposer $\tilde{M}^\alpha$ de façon unique en $\tilde{M}^\alpha = \tilde{S}^\alpha \oplus \tilde{N}^\alpha$, de telle sorte que U soit bijectif sur $\tilde{S}^\alpha$ et localement nilpotent sur $\tilde{N}^\alpha$. On a $\tilde{S}^\alpha \subset \tilde{M}_j$, où $j \in \alpha$ est tel que $4 \leq j \leq p+1$; en particulier, $\tilde{S}^\alpha$ est de dimension finie.

(ii) Pour $\alpha = 0$, on a $j = p-1$ et $\tilde{S}^0 = \tilde{M}_{p-1}$.

Lorsque $p = 2$ ou 3 , on a une décomposition analogue de $\tilde{M} = \mathbf{F}_p[\tilde{\Delta}]$ en $\tilde{M} = \tilde{S} \oplus \tilde{N}$, avec $\tilde{S} = \tilde{M}_0 = \mathbf{F}_p$ et $\tilde{N} = \tilde{\Delta} \cdot \tilde{M}$; l'endomorphisme U est l'identité sur $\tilde{S}$, et est localement nilpotent sur $\tilde{N}$.

Remarque

Lorsque $\alpha \neq 0$, il peut se faire que $\tilde{S}^\alpha$ soit distinct de $\tilde{M}_j$, i.e. que la restriction de U à $\tilde{M}_j$ admette 0 pour valeur propre; c'est le cas pour $\alpha = j = 16$ et $p = 59$. On a toutefois $\tilde{S}^\alpha = \tilde{M}_j$ dans chacun des cas suivants :

$\alpha = 2$, $j = p+1$; les seules valeurs propres de U sur $\tilde{M}_{p+1}$ sont en effet ± 1 , cf. n° 3.3, cor. au th.11.

$\alpha = j = 4, 6, 8, 10, 14$; $\tilde{M}_j$ est alors réduit aux multiples de la série d'Eisenstein $\tilde{G}_j$, et celle-ci est invariante par U .

Pour $\alpha = j = 12$ (et $p \geq 11$), les valeurs propres de U sur $\tilde{M}_j$ sont 1 et $\tau(p)$. On a donc $\tilde{S}^\alpha \neq \tilde{M}_j$ si et seulement si $\tau(p) \equiv 0 \pmod{p}$; d'après M. Newman, c'est le cas pour $p = 2411$.

2.3. Application au calcul de terme constant d'une forme modulaire p-adique

Si f est une série formelle en q , nous conviendrons de noter $a_n(f)$ son n -ième coefficient; nous dirons que f est parabolique si son terme constant $a_0(f)$ est nul.

Soit f une forme modulaire p -adique de poids $k \in X$. Nous allons voir que, si $k \neq 0$, $a_0(f)$ peut se "calculer" en fonction des $a_n(f)$, $n \geq 1$. Commençons par un cas particulier simple :

THÉORÈME 7. Si f est une forme modulaire p -adique de poids $k \neq 0$, et si $p = 2, 3, 5$ ou 7 , on a

$$(*) \quad a_0(f) = \frac{1}{2} \zeta^*(1-k) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{p^n}(f).$$

Comme p est régulier, on a $\zeta^*(1-k) \neq 0$, cf. n° 1.6, et la série d'Eisenstein p -adique G_k^* a un terme constant $\neq 0$. On peut donc écrire f

comme somme d'une forme parabolique et d'un multiple de G_k^* . On est ainsi ramené à démontrer le th.7 dans les deux cas suivants :

a) $f = G_k^*$.

On a alors $a_0(f) = \frac{1}{2}\zeta^*(1-k)$ et $a_{p^n}(f) = \sigma_{k-1}^*(p^n) = 1$; la formule est évidente.

b) f est parabolique.

On doit prouver que $a_{p^n}(f)$ tend vers 0. Comme $a_{p^n}(f) = a_1(f|U^n)$, il suffit de prouver :

LEMME 3. Si f est parabolique, et $p \leq 7$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f|U^n = 0.$$

Quitte à faire une homothétie sur f , on peut supposer que $v_p(f) = 0$. Soit $\tilde{f}$ la réduction (mod. p) de f , et soit α l'image de k dans $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ on a $f \in \tilde{M}^\alpha$. Utilisons la décomposition $\tilde{M}^\alpha = \tilde{S}^\alpha \oplus \tilde{N}^\alpha$ fournie par le corollaire au th.6. Du fait que $p \leq 7$, l'entier j correspondant est ≤ 8 , et $\tilde{S}^\alpha$ est simplement l'ensemble des multiples de $\tilde{E}_k$; il en résulte que $\tilde{N}^\alpha$ est l'ensemble des éléments paraboliques de M . On a donc $\tilde{f} \in \tilde{N}^\alpha$, et il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\tilde{f}|U^m = 0$, i.e.

$$v_p(f|U^m) \geq 1.$$

Appliquons ce résultat à la forme parabolique $\frac{1}{p} f|U^m$. On en déduit qu'il existe un entier $m' \geq 1$ tel que

$$v_p(f|U^{m+m'}) \geq 2.$$

D'où, par une récurrence évidente, le fait que $v_p(f|U^n)$ tend vers 1' infini avec n , ce qui démontre le lemme (et le th.7).

Remarque

Lorsque $p \geq 11$, la formule (*) reste valable pourvu que l'on ait

$k \equiv 4, 6, 8, 10, 14 \pmod{(p-1)}$; la démonstration est la même. Le cas $p = 11$, $f = \Delta$ montre qu'une hypothèse sur k est nécessaire.

Nous allons maintenant établir une formule analogue à (*), valable pour tout k divisible par $p-1$.

THÉOREME 8. Il existe un polynôme H en U et les T_ℓ , à coefficients entiers, tel que, pour tout $k \in X$ divisible par $p-1$, on ait :

$$(i) \quad E_k^* | H = c(k) E_k^*, \text{ avec } c(k) \text{ inversible dans } \mathbf{Z}_p,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f | H^n = 0$$

pour toute forme modulaire p -adique f de poids k qui est parabolique.

(Noter que H ne dépend pas de k , mais que son action sur f en dépend; lorsque l'on désire mettre ce fait en évidence, on écrit $f|_k H$ au lieu de $f|H$.)

COROLLAIRE. Pour toute forme modulaire p -adique f , de poids $k \neq 0$, avec $k \equiv 0 \pmod{(p-1)}$, on a

$$(**) \quad a_0(f) = \frac{1}{2} \zeta^*(1-k) \lim_{n \rightarrow \infty} c(k)^{-n} a_1(f|H^n).$$

En effet, il suffit de vérifier la formule (**) lorsque $f = E_k^*$ et lorsque f est parabolique; dans le premier cas elle résulte de (i), et dans le second de (ii).

(On notera que, pour k fixé, $a_1(f|H^n)$ est combinaison $\mathbf{Z}_p$ -linéaire des $a_m(f)$, $m \geq 1$; la formule (**) donne donc bien un procédé de calcul de $a_0(f)$ en fonction des $a_m(f)$.)

Démonstration du théorème 8

Si $p = 2, 3, 5, 7$ on prend $H = U$, cf. th.7. On peut donc supposer que $p \geq 11$. Tout revient à construire un polynôme $\tilde{H}$ en U et les T_ℓ , à coefficients dans $\mathbf{F}_p$, tel que :

$$(i)' \quad 1 | \tilde{H} = c, \text{ avec } c \neq 0 \text{ dans } \mathbf{F}_p.$$

$$(ii)' \quad f \mapsto f | \tilde{H} \text{ est localement nilpotent sur l'ensemble } \tilde{P}^0 \text{ des éléments}$$

paraboliques de $\tilde{M}^0$.

En effet, si l'on dispose d'un tel $\tilde{H}$, on prend pour H un polynôme à coefficients entiers dont la réduction (mod. p) est égale à $\tilde{H}$. Comme $E_k^*|U = E_k^*$ et $E_k^*|T_\ell = (1 + \ell^{k-1})E_k^*$, on a

$$E_k^*|H = c(k) E_k^*, \quad \text{avec } c(k) \in \mathbf{Z}_p;$$

de plus, l'image de $c(k)$ dans $\mathbf{F}_p$ est égale à c , ce qui montre que $c(k)$ est inversible dans $\mathbf{Z}_p$, d'où (i). Le fait que (ii)' entraîne (ii) se démontre par l'argument utilisé pour le th.7.

Construction de $\tilde{H}$

Faisons opérer U et les T_ℓ sur l'espace vectoriel $\tilde{S}^0 = \tilde{M}_{p-1}$, cf. cor. au th.6. Ces opérateurs commutent entre eux et respectent la décomposition de $\tilde{M}_{p-1}$ en $\mathbf{F}_p \oplus \tilde{P}_{p-1}$, où $\tilde{P}_{p-1}$ désigne le sous-espace des formes paraboliques. Les valeurs propres de U et T_ℓ sur le sous-espace $\tilde{M}_0 = \mathbf{F}_p$ sont respectivement 1 et $1 + \ell^{-1}$.

Par contre :

LEMME 4. Il n'existe pas d'élément $f \neq 0$ de $\tilde{P}_{p-1}$ tel que

$$f|U = f \quad \text{et} \quad f|T_\ell = (1 + \ell^{-1})f$$

pour tout ℓ premier $\neq p$.

En effet, supposons qu'un tel f existe, et écrivons-le $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$.

On a par hypothèse

$$a_{pn} = a_n, \quad a_{\ell n} = (1 + \ell^{-1})a_n \quad \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{\ell},$$

$$a_{\ell n} = (1 + \ell^{-1})a_n - \ell^{-1}a_{n/\ell} \quad \text{si } n \equiv 0 \pmod{\ell}.$$

Ces formules permettent de calculer par récurrence a_n à partir de a_1 .

On trouve $a_n = a_1 \sigma_{-1}^*(n) = a_1 \sigma_{p-2}(n)$, i.e. $f = a_1 \tilde{\phi}$, où

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{p-2}(n) q^n.$$

Mais, d'après le lemme de [20], p.416-11, la série $\tilde{\phi}$ n'appartient pas à $\tilde{M}^0$; on obtient donc une contradiction.

Le lemme suivant est élémentaire :

LEMME 5. Soient k un corps commutatif, Y un k -espace vectoriel de dimension finie, $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de Y , et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de k . On suppose que les U_i commutent entre eux, et qu'il n'existe aucun élément $y \neq 0$ de Y tel que $U_i y = \lambda_i y$ pour tout $i \in I$. Il existe alors un polynôme $F \in k[(X_i)_{i \in I}]$ tel que $F((U_i)_{i \in I}) = 0$ et $F((\lambda_i)_{i \in I}) \neq 0$.

Appliquons ce lemme aux endomorphismes U et T_ℓ de l'espace $Y = \tilde{P}_{p-1}$, et aux scalaires 1 et $1 + \ell^{-1}$, cf. lemme 4. On en déduit l'existence d'un polynôme F en U et les T_ℓ dont la restriction à $\tilde{P}_{p-1}$ est nulle, et qui ne s'annule pas sur $\mathbf{F}_p$. Le polynôme $\tilde{H} = U.F$ répond alors à la question. En effet, il vérifie évidemment (i)'. D'autre part, on a $\tilde{P}^0 = \tilde{P}_{p-1} \oplus \tilde{N}^0$, et F est nul sur $\tilde{P}_{p-1}$, tandis que U est localement nilpotent sur $\tilde{N}^0$, cf. cor.au. th.6; comme U et F commutent, il en résulte que $U.F$ est localement nilpotent sur $\tilde{P}^0$, ce qui achève la démonstration.

Exemples

$p \leq 11$: $H = U$ et $c(k) = 1$;

$p = 13$: $H = U(U + 5)$ et $c(k) = 6$; $H = U(T_2 - 2)$ et $c(k) = 2^{k-1} - 1$;

$p = 17$: $H = U(T_2 + 5)$ et $c(k) = 2^{k-1} + 6$.

Passons maintenant au cas d'un poids non divisible par $p-1$. Faute de mieux, je me bornerai à un théorème d'existence :

THÉORÈME 9. Soit k un élément pair de X , non divisible par $p-1$. Il existe une suite $(\lambda_{m,n})_{m,n \geq 1}$ d'éléments de $\mathbf{Z}_p$ telle que :

a) pour tout n , on a $\lambda_{m,n} = 0$ pour m assez grand;

b) si l'on pose

$$u_n(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{m,n} a_m(f),$$

on a

$$(***) \quad a_0(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(f)$$

pour toute forme modulaire p-adique f de poids k.

(Précisons que les coefficients $\lambda_{m,n}$ dépendent du poids k choisi.)

Notons $M(k)$ le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des formes modulaires p-adiques de poids k.

LEMME 6. Soit Y un sous-espace de dimension finie de $M(k)$. Il existe des éléments $(\lambda_m)_m$ $\lambda_m > 1$ de $\mathbb{Z}_p$, nuls sauf un nombre fini d'entre eux, tels que

$$a_0(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m(f) \quad \text{pour tout } f \in Y.$$

Soit Y_0 le sous- $\mathbb{Z}_p$ -module de Y formé des éléments f tels que $v_p(f) \geq 0$.

Il est facile de voir que Y_0 est un $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang $r = \dim V$.

Soit $f_1, \dots, f_r$ une base de Y_0 . On peut trouver r indices

$m_1, \dots, m_r > 1$ tels que

$$\det(a_{m_i}(f_j)) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Sinon en effet il existerait des $c_j \in \mathbb{Z}_p$, non tous divisibles par p, tels que

$$a_m\left(\sum_{j=1}^r c_j f_j\right) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{pour tout } m > 1;$$

si l'on pose

$$f = \sum_{j=1}^r c_j f_j,$$

le cor.1 au th.1' du n° 1.5 montrerait que $v_p(f) \geq 1$, contrairement au

fait que les c_j ne sont pas tous divisibles par p . Ceci étant, il est clair que les formes linéaires $a_{m_1}, \dots, a_{m_r}$ forment une base du dual du $\mathbf{Z}_p$ -module Y_0 , et comme a_0 est une forme linéaire sur Y_0 , on peut écrire a_0 sous la forme

$$a_0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_{m_i}, \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbf{Z}_p,$$

d'où le lemme.

Soit maintenant $M(k)_0$ l'ensemble des $f \in M(k)$ tels que $v_p(f) \geq 0$. Si α est l'image de k dans $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$, on a $M(k)_0/pM(k)_0 \subset \tilde{M}^\alpha$ (il y a même égalité), et par suite l'ensemble $M(k)_0/pM(k)_0$ est dénombrable. Il en résulte que l'on peut trouver dans $M(k)$ une suite croissante

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$$

de $\mathbf{Q}_p$ -sous-espaces vectoriels de dimensions finies dont la réunion est dense dans $M(k)$. Pour chacun des V_n , le lemme 6 montre qu'il existe une combinaison $\mathbf{Z}_p$ -linéaire u_n des a_m ($m \geq 1$) telle que $a_0(f) = u_n(f)$ pour tout $f \in V_n$. Comme la famille des u_n est équicontinue, le fait qu'elle converge vers a_0 sur une partie dense de $M(k)$ entraîne qu'elle converge partout, et l'on a donc bien

$$a_0(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(f) \quad \text{pour tout} \quad f \in M(k).$$

Remarques

1) La démonstration ci-dessus peut aussi s'exprimer en disant que le $\mathbf{Z}_p$ -module engendré par les a_m ($m \geq 1$) est faiblement dense dans la boule unité du dual de l'espace de Banach p -adique $M(k)$.

2) Dans le cas archimédien (i.e. pour les formes modulaires usuelles de poids $k > 0$), le problème consistant à exprimer $a_0(f)$ à partir des $a_n(f)$, $n \geq 1$, a une solution très simple, due à Hecke : on forme la

série de Dirichlet

$$\phi_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) n^{-s},$$

on la prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$, et l'on prend sa valeur $\phi_f(0)$ au point $s = 0$: c'est $-a_0(f)$.

§3. Formes modulaires sur $\Gamma_0(p)$

Le but de ce § est de justifier le principe suivant, bien connu expérimentalement : toute forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$ est p-adiquement sur $SL_2(\mathbf{Z})$. La méthode suivie est due à Atkin; elle repose sur les propriétés des coefficients des séries d'Eisenstein. Une autre méthode, basée sur un théorème de Deligne ([6], §7), est exposée dans Katz [12] et Koike [15].

3.1. Rappels

a) Notation

Soit f une fonction sur le demi-plan de Poincaré $H = \{z | \text{Im}(z) > 0\}$; soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle de déterminant > 0 , et k un entier; on définit une fonction $f|_k \gamma$ sur H par la formule

$$(f|_k \gamma)(z) = \det(\gamma)^{k/2} (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

On a $(f|_k \gamma)|_k \gamma' = f|_k \gamma \gamma'$ et $f|_k \gamma = f$ si γ est une homothétie > 0 . Lorsque k est sous-entendu, on écrit $f|\gamma$ au lieu de $f|_k \gamma$.

b) Formes modulaires sur $\Gamma_0(p)$

Le groupe $\Gamma_0(p)$ est défini comme le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ formé des

matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0 \pmod{p}$; il est d'indice $p + 1$ dans $SL_2(\mathbf{Z})$; il est normalisé dans $GL_2(\mathbf{Q})$ par la matrice $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

Soit k un entier. Une forme modulaire de poids k sur $\Gamma_0(p)$ est une fonction holomorphe f sur H telle que :

- (i) $f|_k \gamma = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(p)$;
- (ii) f est holomorphe aux pointes de $\Gamma_0(p)$.

En fait, $\Gamma_0(p)$ n'a que deux pointes, $i\infty$ et 0 , qui sont permutées par W . La condition (ii) équivaut donc à la suivante :

- (ii') Les fonctions f et $f|_k W$ ont des développements en série

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad f|_k W = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$$

$$(q = e^{2\pi i z}, \quad a_n \in \mathbf{C}, \quad b_n \in \mathbf{C})$$

qui convergent pour tout $z \in H$ (i.e. pour tout q tel que $|q| < 1$).

Si f est modulaire, il en est de même de $f|W$, et $f|W^2 = f$.

Lorsque k est < 0 , ou impair, toute forme modulaire de poids k est nulle. Dans ce qui suit, nous supposons donc k pair ≥ 0 .

c) Trace d'une forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$

Soit f une forme modulaire de poids k sur $\Gamma_0(p)$. Choisissons des représentants $\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1}$ de l'espace homogène $\Gamma_0(p) \backslash SL_2(\mathbf{Z})$, et posons

$$\text{Tr}(f) = \sum_{j=1}^{p+1} f|_k \gamma_j.$$

On vérifie immédiatement que $\text{Tr}(f)$ ne dépend pas du choix des γ_j , et que c'est une forme modulaire de poids k sur $SL_2(\mathbf{Z})$; on l'appelle la trace de f . Nous aurons besoin de son développement en série :

LEMME 7. Si $f = \sum a_n q^n$ et $f|_k W = \sum b_n q^n$, on a

$$\text{Tr}(f) = \sum a_n q^n + p^{1-k/2} \sum b_{pn} q^n = f + p^{1-k/2} (f|_k W)|U.$$

On choisit pour représentants $\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix}$, $1 \leq j \leq p$, et $\gamma_{p+1} = 1$.
 Le terme $f|_k \gamma_{p+1}$ donne f . Pour calculer les autres termes, posons
 $g = f|_k W$, et écrivons γ_j ($1 \leq j \leq p$) sous la forme $W\beta_j$, où
 $\beta_j = \begin{pmatrix} 1/p & j/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\sum_{j=1}^p f|_k \gamma_j = \sum_{j=1}^p g|_k \beta_j;$$

c'est la fonction

$$z \mapsto p^{-k/2} \sum_{j=1}^p g\left(\frac{z+j}{p}\right).$$

Or un calcul simple montre que

$$\sum_{j=1}^p g\left(\frac{z+j}{p}\right) = p(g|U)(z).$$

D'où le lemme.

Remarques

1) Le calcul ci-dessus s'applique plus généralement aux fonctions modulaires de poids k , non nécessairement holomorphes; la seule différence est que les séries considérées peuvent avoir des exposants négatifs.

2) Le lemme 7, appliqué à $f|_k W$ donne

$$\text{Tr}(f|_k W) = f|_k W + p^{1-k/2} f|U,$$

ce qui montre que $f|U$ est une forme modulaire de poids k sur $\Gamma_0(p)$.

Si de plus f est modulaire sur $SL_2(\mathbf{Z})$, on a $f|_k W = p^{k/2} f|V$ comme on le voit en écrivant $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en remarquant que f est invariant par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où :

$$\text{Tr}(f|_k W) = p^{k/2} f|V + p^{1-k/2} f|U = p^{1-k/2} f|_k T_p$$

On a ainsi ramené l'opérateur de Hecke T_p à l'opérateur Tr .

3) Supposons $k > 4$. Les formes modulaires f de poids k sur $\Gamma_0(p)$ telles que $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(f|_k W) = 0$ ne sont autres que les combinaisons linéaires des "new forms" d'Atkin-Lehner [3].

d) Propriétés de rationalité et d'intégralité

Soit $j_p = j|_V$ la fonction $z \mapsto j(pz)$. On sait que le corps des fonctions modulaires (de poids 0) sur $\Gamma_0(p)$ est le corps $\mathbb{C}(j, j_p)$ et que j et j_p sont liés par une équation absolument irréductible à coefficients dans $\mathbb{Q}$. En d'autres termes, la courbe complexe $Y_{\mathbb{C}}$ compactifiée de $H/\Gamma_0(p)$ provient par extension des scalaires d'une courbe Y définie sur $\mathbb{Q}$, caractérisée par le fait que son corps des fonctions rationnelles est $\mathbb{Q}(j, j_p)$. Si F est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut donc parler d'une fonction (ou d'une forme différentielle) sur $Y_{\mathbb{C}}$ qui est rationnelle sur F . Ceci s'applique en particulier aux formes modulaires de poids k , identifiables à des formes différentielles de poids $k/2$ par $f \mapsto f(dq/q)^{k/2}$. Comme j et j_p ont des développements en série à coefficients rationnels, on vérifie facilement qu'une forme modulaire $f = \sum a_n q^n$ est rationnelle sur F si et seulement si ses coefficients a_n appartiennent à F . De plus, le corps de rationalité de $f|_W$ est le même que celui de f ; cela résulte de ce que l'automorphisme W de $Y_{\mathbb{C}}$ est rationnel sur $\mathbb{Q}$.

Il résulte de ceci que les formes modulaires de poids k sur $\Gamma_0(p)$ ont une base formée de fonctions rationnelles sur $\mathbb{Q}$. En fait, il existe même une base formée de fonctions dont les coefficients a_n sont entiers; ce résultat, nettement moins évident, peut se démontrer, soit en utilisant l'existence d'un modèle de Y sur $\mathbb{Z}$ pour lequel q est une uniformisante à l'infini (Igusa, Deligne), soit en se ramenant au fait que les valeurs propres des opérateurs de Hecke sont des entiers algébriques (Shimura [22], p.85, th.3.52). Une conséquence de ceci est que, si $f = \sum a_n q^n$ est une forme modulaire à coefficients rationnels, les dénominateurs des a_n sont bornés. (On notera que, si les coefficients a_n de f sont entiers, il n'en est pas nécessairement de même des coefficients b_n de

$f|_k W$: les b_n sont rationnels, mais peuvent avoir pour dénominateurs des puissances de p .)

3.2. Passage de $\Gamma_0(p)$ à $SL_2(\mathbb{Z})$

THÉORÈME 10. Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire de poids k sur $\Gamma_0(p)$. Supposons que les coefficients a_n soient rationnels. Alors f est une forme modulaire p -adique de poids k (au sens du n° 1.4).

(En d'autres termes, f est limite de formes modulaires f_m sur $SL_2(\mathbb{Z})$ dont les poids k_m tendent vers k dans l'espace X du n° 1.4.)

Choisissons un entier pair $a \geq 4$, divisible par $p-1$. Posons

$$g = E_a - p^{a/2} E_a|_a W = E_a - p^a E_a|V,$$

où E_a est la série d'Eisenstein de poids a , cf. n° 1.1. Il est clair que g est une forme modulaire de poids a sur $\Gamma_0(p)$, cf. n° 3.1. De plus :

LEMME 8. On a $g \equiv 1 \pmod{p}$ et $g|_a W \equiv 0 \pmod{p^{1+a/2}}$.

(Précisons que, dans ces congruences, on considère g et $g|_a W$ comme des séries en q , à coefficients rationnels.)

Le fait que $g \equiv 1 \pmod{p}$ provient de ce que $E_a \equiv 1 \pmod{p}$.

D'autre part, on a

$$g|_a W = E_a|_a W - p^{a/2} E_a = p^{a/2} (E_a|V - E_a).$$

Comme $E_a \equiv 1 \equiv E_a|V \pmod{p}$, on en déduit bien que $g|_a W$ est congru à 0 $\pmod{p^{1+a/2}}$.

Passons maintenant à la démonstration du th.10. L'hypothèse faite sur f signifie que f est rationnelle sur $\mathbb{Q}$, et il en est de même de $f|_k W$, cf. n° 3.1. Si m est un entier ≥ 0 , la fonction $\check{f}g^{p^m}$ est une forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$, de poids $k_m = k + ap^m$, et rationnelle sur $\mathbb{Q}$.

Sa trace $f_m = \text{Tr}(fg^{p^m})$ est donc une forme modulaire sur $SL_2(\mathbf{Z})$, à coefficients rationnels, et de poids k_m . Comme les k_m tendent vers k dans X , le théorème sera démontré si l'on prouve que $\lim f_m = f$, i.e. que $v_p(f_m - f)$ tend vers l'infini avec m . Or cela résulte du lemme plus précis suivant :

LEMME 9. On a $v_p(f_m - f) \geq \inf(m + 1 + v_p(f), p^m + 1 + v_p(f|_k W) - \frac{k}{2})$.

(Noter que, si $f \neq 0$, $v_p(f)$ et $v_p(f|_k W)$ sont finis, puisque les séries f et $f|_k W$ ont des coefficients à dénominateurs bornés, cf. n° 3.1.)

Ecrivons $f_m - f$ sous la forme $(f_m - fg^{p^m}) + f(g^{p^m} - 1)$. D'après le lemme 8, on a $g \equiv 1 \pmod{p}$ d'où $g^{p^m} \equiv 1 \pmod{p^{m+1}}$, et

$$v_p(f(g^{p^m} - 1)) \geq m + 1 + v_p(f).$$

D'autre part, le lemme 7 montre que

$$f_m - fg^{p^m} = p^{1-k_m/2} (fg^{p^m}|_{k_m} W)|U,$$

$$\text{d'où } v_p(f_m - fg^{p^m}) \geq 1 - k_m/2 + v_p(f|_k W) + p^m v_p(g|_a W);$$

en appliquant le lemme 8, on en déduit :

$$\begin{aligned} v_p(f_m - fg^{p^m}) &\geq 1 - (k + ap^m)/2 + v_p(f|_k W) + p^m(1 + a/2) \\ &\geq p^m + 1 + v_p(f|_k W) - k/2. \end{aligned}$$

Le lemme 9 résulte de ces formules et de l'inégalité évidente :

$$v_p(f_m - f) \geq \inf(v_p(f_m - fg^{p^m}), v_p(f(g^{p^m} - 1))).$$

Remarque

Nous avons supposé f holomorphe aux deux pointes i^∞ et 0 . Il suffira en fait que f soit holomorphe en i^∞ et méromorphe en 0 . La démonstration est la même que ci-dessus; on remarque que la forme g s'annule en 0 , donc que fg^{p^m} est une forme modulaire pour m assez grand, et l'on a ici encore $f = \lim. \text{Tr}(fg^{p^m})$.

Ainsi, si l'on pose

$$j = Q^3/\Delta = q^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n,$$

on peut appliquer le th.10 à la fonction $f = j|U = \sum c(pn) q^n$, qui a un pôle d'ordre p à la pointe 0 . On en conclut que $j|U$ est une forme modulaire p -adique de poids 0 ; on retrouve - sous une forme plus faible un théorème de Deligne ([6], §7).

3.3. Réduction (mod. p) des formes de poids 2 sur $\Gamma_0(p)$

Le th.10 montre que la réduction (mod. p) d'une forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$, à coefficients p -entiers, est une forme modulaire (mod. p) sur $SL_2(\mathbf{Z})$, au sens du n° 1.2. Dans le cas du poids 2 , on peut donner un résultat plus précis :

THÉOREME 11. On suppose $p \geq 3$. Soit f une forme modulaire de poids 2 sur $\Gamma_0(p)$, à coefficients rationnels p -entiers.

(a) On a $f|_2 W = -f|U$; c'est une forme à coefficients p -entiers.

(b) La réduction $\tilde{f}$ de f (mod. p) appartient à l'espace $\tilde{M}_{p+1}$ du n° 1.2.

(c) Inversement, tout élément de $\tilde{M}_{p+1}$ est réduction (mod. p) d'une forme modulaire de poids 2 sur $\Gamma_0(p)$, à coefficients p -entiers.

(En d'autres termes, il y a identité entre :

réduction (mod. p) des formes modulaires de poids 2 sur $\Gamma_0(p)$

et

réduction (mod. p) des formes modulaires de poids $p+1$ sur $SL_2(\mathbf{Z})$.)

L'assertion (a) est bien connue (Hecke [8], p.777). On la démontre en remarquant que toute forme de poids 2 sur $SL_2(\mathbb{Z})$ est nulle, et que l'on a donc $\text{Tr}(f|_2 W) = 0$; or d'après le lemme 7, $\text{Tr}(f|_2 W)$ est égal à $f|_2 W + f|U$.

Démontrons (b) et (c) en supposant d'abord $p \geq 5$. Posons

$$g = E_{p-1} - p^{(p-1)/2} E_{p-1}|W = E_{p-1} - p^{p-1} E_{p-1}|V,$$

cf. démonstration du th.10. La fonction fg est une forme modulaire de poids $p+1$ sur $\Gamma_0(p)$, à coefficients p -entiers; sa trace $\text{Tr}(fg)$ appartient à M_{p+1} . De plus, le lemme 9 du n° 3.2, appliqué à $m = 0$ et $k = 2$, montre que $v_p(\text{Tr}(fg) - f) \geq 1$, i.e. que

$$f \equiv \text{Tr}(fg) \pmod{p},$$

d'où $\tilde{f} \in \tilde{M}_{p+1}$, ce qui démontre (b) pour $p \geq 5$. Soit maintenant N le sous-espace vectoriel de $\tilde{M}_{p+1}$ formé des fonctions telles que $\tilde{f}$. La dimension de N est égale à la dimension de l'espace des formes modulaires de poids 2 sur $\Gamma_0(p)$, i.e. $1 + g(Y)$ où $g(Y)$ désigne le genre de la courbe Y définie par $\Gamma_0(p)$. La valeur de $g(Y)$ est bien connue (cf. par exemple Hecke [8], p.810) : si l'on écrit $p = 12a + b$, avec $b = 1, 5, 7, 11$, on a $g(Y) = a - 1, a, a, a + 1$ respectivement. D'autre part, on sait que

$$\dim.M_k = \begin{cases} [k/12] & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ 1 + [k/12] & \text{si } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases} \quad (k \text{ pair } \geq 0)$$

On en déduit que $\dim.\tilde{M}_{p+1} = 1 + g(Y) = \dim.N$, d'où le fait que $N = \tilde{M}_{p+1}$, ce qui démontre (c) dans le cas $p \geq 5$.

Reste le cas $p = 3$. L'espace $\tilde{M}_4$ a pour base $\tilde{Q} = 1$. D'autre part, on a $g(Y) = 0$, et les formes de poids 2 sur $\Gamma_0(3)$ sont simplement les multiples de la série d'Eisenstein $E_2^* = P - 3P|V$, cf. Hecke [8], p.817.

Comme $\tilde{E}_2^* = \tilde{P} = 1$, les assertions (b) et (c) sont évidentes.

COROLLAIRE. Les valeurs propres de U sur $\tilde{M}_{p+1}$ sont égales à ± 1 .

En effet, le th.11 montre que $\tilde{f}|U^2 = \tilde{f}|W^2 = \tilde{f}$ pour tout $\tilde{f} \in \tilde{M}_{p+1}$.

Remarque. Cette démonstration a également été obtenue par Atkin.

Exemples

1) Pour $p = 11, 17, 19$, le genre de Y est 1. Il existe une unique forme parabolique de poids 2 sur $\Gamma_0(p)$:

$$f_p = a_1 q + a_2 q^2 + \dots, \quad \text{avec } a_1 = 1.$$

La série de Dirichlet correspondante $\sum a_n/n^s$ est essentiellement la fonction zêta de Y ([22], p.182). D'après le th.11, f_p est congru (mod. p) à une forme parabolique de poids 12, 18, 20 sur $SL_2(\mathbf{Z})$; on en déduit les congruences :

$$f_{11} \equiv \Delta \pmod{11}; \quad f_{17} \equiv R\Delta \pmod{17}; \quad f_{19} \equiv Q^2\Delta \pmod{19}.$$

La première de ces congruences peut aussi se déduire de l'identité :

$$f_{11} = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2 (1 - q^{11n})^2, \quad \text{cf. [22], p.49.}$$

2) Pour $p = 23, 31$, le genre de Y est 2. Le nombre de classes du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ est 3. Soit χ un caractère d'ordre 3 du groupe des classes d'idéaux de corps, et posons

$$g_p = \sum \chi(a) q^{Na} = \begin{cases} q - q^2 - q^3 + q^6 + \dots & (p = 23) \\ q - q^2 - q^5 - q^7 + \dots & (p = 31) \end{cases},$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux entiers a . Il n'est pas difficile de voir que $g_p = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$, où θ_1 (resp. θ_2) est la série

thêta associée à la forme binaire $m^2 + mn + \frac{p+1}{4} n^2$ (resp. à la forme $2m^2 + mn + \frac{p+1}{8} n^2$). Il en résulte (cf. [8], p.478-479) que g_p est une forme modulaire de poids 1 sur $\Gamma_0(p)$, de "Nebentypus" au sens de Hecke (cf. n° 3.4 ci-après). Son carré est une forme de poids 2, commençant par le terme q^2 . Appliquant le th.11, on en déduit les congruences

$$g_{23}^2 \equiv \Delta^2 \pmod{23} \quad \text{et} \quad g_{31}^2 \equiv Q^2 \Delta^2 \pmod{31},$$

d'où, en extrayant les racines carrées,

$$g_{23} \equiv \Delta \pmod{23} \quad \text{et} \quad g_{31} \equiv Q\Delta \pmod{31}.$$

La première de ces congruences peut aussi se déduire de l'identité

$$g_{23} = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{23n});$$

elle est due à Wilton; voir là-dessus [27], p.34.

3.4. Formes de "Nebentypus" sur $\Gamma_0(p)$

On suppose $p \geq 3$. Soit ϵ un caractère $(\text{mod. } p)$, i.e. un homomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ dans $\mathbf{C}^*$. Si n est un entier de réduction mod. p égale à $\tilde{n}$, on pose

$$\epsilon(n) = 0 \quad \text{si} \quad \tilde{n} = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon(n) = \epsilon(\tilde{n}) \quad \text{sinon.}$$

On étend ϵ à $\Gamma_0(p)$ par :

$$\epsilon(\gamma) = \epsilon(a)^{-1} = \epsilon(d) \quad \text{si} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Cela a un sens puisque $ad \equiv 1 \pmod{p}$.

Soit $k \in \mathbf{Z}$. Une fonction f sur H est appelée une forme modulaire de

type (k, ϵ) sur $\Gamma_0(p)$ si elle est holomorphe sur H et vérifie les deux conditions :

- (i) $f|_k \gamma = \epsilon(\gamma)f$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(p)$;
- (ii) f est holomorphe aux pointes de $\Gamma_0(p)$.

Lorsque $\epsilon' = 1$ ("Haupttypus" de Hecke [8], p.809), on retrouve la notion de forme modulaire de poids k , au sens du n° 3.1; le cas $\epsilon \neq 1$ est celui appelé "Nebentypus" par Hecke.

Si $f \neq 0$, on a $k \geq 0$, et $\epsilon(-1) = (-1)^k$; autrement dit, k est pair si $\epsilon(-1) = 1$ et impair si $\epsilon(-1) = -1$.

Une telle forme f a un développement en série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$. Notons μ_{p-1} le groupe des racines $(p-1)$ -ièmes de 1. Nous allons voir que, si les a_n appartiennent au corps $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$, la série f "est" une forme modulaire p -adique (ce qui généralisera le th.10). De façon plus précise, on sait que p se décompose complètement dans $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ en idéaux premiers de degré 1 :

$$p_1, \dots, p_r \quad \text{avec} \quad r = \phi(p-1) = [\mathbb{Q}(\mu_{p-1}) : \mathbb{Q}].$$

Choisissons un de ces idéaux premiers, ce qui définit un plongement σ de $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ dans le corps p -adique $\mathbb{Q}_p$; comme le groupe des racines $(p-1)$ -ièmes de l'unité de $\mathbb{Q}_p$ s'identifie canoniquement à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ ("représentants multiplicatifs"), on voit que σ définit un isomorphisme de μ_{p-1} sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, et tout isomorphisme est obtenu ainsi (en choisissant convenablement p_i). En composant $\epsilon : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \rightarrow \mu_{p-1}$ et $\sigma : \mu_{p-1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ on obtient un endomorphisme de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, qui est nécessairement de la forme $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Avec ces notations, on a :

THÉORÈME 12. Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire de type (k, ϵ) sur $\Gamma_0(p)$, telle que $a_n \in \mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ pour tout n . Alors la série

$$f^\sigma = \sum a_n^\sigma q^n, \quad \text{à coefficients} \quad a_n^\sigma \in \mathbb{Q}_p,$$

est une forme modulaire p-adique de poids $k + \alpha$.

(Précisons que α est identifié à l'élément $(0, \alpha)$ du groupe des poids $X = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, et $k + \alpha$ à $(k, k+\alpha)$. On peut supposer $f \neq 0$, d'où $\epsilon(-1) = (-1)^k$, et il en résulte que $k + \alpha$ est un élément pair de X .)

Lorsque $\epsilon = 1$, f est combinaison $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ -linéaire de formes modulaires de poids k (au sens du n° 3.1) à coefficients rationnels, et le th.12 résulte du th.10; nous pouvons donc supposer $\epsilon \neq 1$.

Commençons par un cas particulier :

LEMME 10. Si $k > 1$, et $\epsilon(-1) = (-1)^k$, la série

$$G_k(\epsilon) = \frac{1}{2} L(1 - k, \epsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \epsilon(d) d^{k-1} \right) q^n$$

est une forme modulaire de type (k, ϵ) sur $\Gamma_0(p)$. Ses coefficients ap-
partiennent à $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$, et l'on a

$$G_k(\epsilon)^\sigma = G_h^*,$$

où G_h^* est la série d'Eisenstein p-adique de poids $h = k + \alpha$, au sens du
n° 1.6.

Le fait que $G_k(\epsilon)$ soit de type (k, ϵ) résulte de la détermination par Hecke des séries d'Eisenstein de niveau p (cf. [8], p.461-486, ainsi que l'Appendice du §5). De façon plus précise, avec les notations de [8], loc.cit., on vérifie que $G_k(\epsilon)$ est égale, à un facteur scalaire près, à la fonction

$$\sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \epsilon(\lambda)^{-1} G_k(z; 0, \lambda, p);$$

comme $G_k(z; 0, \lambda, p) \Big|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = G_k(z; 0, d\lambda, p)$ si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$, on en

déduit, par un calcul immédiat, que $G_k(\epsilon) \big|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \epsilon(d) G_k(\epsilon)$, ce qui montre bien que $G_k(\epsilon)$ est de type (k, ϵ) . Ses coefficients appartiennent au corps engendré par les valeurs de ϵ , qui est contenu dans $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$. Montrons maintenant que $G_k(\epsilon)^\sigma$ est égale à G_h^* . Si $n \geq 1$, le n -ième coefficient a_n^σ de $G_k(\epsilon)^\sigma$ est égal à $\sum \epsilon(d)^\sigma d^{k-1}$, la sommation portant sur les diviseurs d de n qui sont premiers à p . Écrivons d dans $\mathbb{Q}_p$ sous la forme $\omega(d) \langle d \rangle$, avec $\omega(d)^{p-1} = 1$, et $\langle d \rangle \equiv 1 \pmod{p}$, cf. Iwasawa [11], p.18. On a alors $\epsilon(d)^\sigma = \omega(d)^\alpha = d^\alpha$, vu la définition de α . D'où

$$a_n^\sigma = \sum d^{k+\alpha-1} = \sigma_{h-1}^*(n),$$

ce qui est bien le n -ième coefficient de G_h^* . D'autre part, $L(1-k, \epsilon)^\sigma$ est égal à $-b_k(\omega^\alpha)/k = L_p(1-k, \omega^{k+\alpha})$, avec les notations de [11], §3. Vu le th.3 du n° 1.6, on a donc

$$L(1-k, \epsilon)^\sigma = \zeta^*(1-k, 1-k-\alpha) = \zeta^*(1-h);$$

le terme constant de $G_k(\epsilon)^\sigma$ est égal à celui de G_h^* , ce qui achève la démonstration du lemme.

Revenons maintenant au th.12. Choisissons une suite d'entiers $k_n \geq 1$ tendant vers α dans X , et tels que $k_n - \alpha \in (p-1)X$ pour tout n . Posons

$$g_n = \lambda_n^{-1} G_{k_n}(\epsilon^{-1}),$$

où λ_n est le terme constant de la série $G_{k_n}(\epsilon^{-1})$, cf. lemme 10. Le produit $f g_n$ est une forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$ de type $(k + k_n, 1)$; il en résulte, comme on l'a dit plus haut, que $f^\sigma g_n^\sigma$ est une forme modulaire p -adique de poids $k + k_n$. D'autre part, d'après le lemme 10 appliqué à k_n et ϵ^{-1} , on a $g_n^\sigma = E_{h_n}^*$, où $h_n = k_n - \alpha$. Comme h_n tend vers 0 dans X , il en résulte que g_n^σ tend vers $E_0^* = 1$, d'où $\lim f^\sigma g_n^\sigma = f^\sigma$, ce qui

montre que f^σ est modulaire p-adique de poids $k + \alpha = \lim.(k + k_n)$ et achève la démonstration.

Remarque

Sous les hypothèses du th.12, on peut démontrer que $f|_k W$ est de type (k, ϵ^{-1}) , et que ses coefficients appartiennent à $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$; on a $f|_k W^2 = \epsilon(-1)f$.

§4. Familles analytiques de formes modulaires p-adiques

4.1. L'algèbre d'Iwasawa ($p \neq 2$)

a) Notations

Si $n \geq 1$, on note U_n le sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^*$ formé des entiers p-adiques u tels que $u \equiv 1 \pmod{p^n}$. On sait que

$$U_1 \simeq \varprojlim (U_1/U_n)$$

est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Si $s \in \mathbb{Z}_p$ et $u \in U_1$, on définit de façon évidente $u^s \in U_1$, cf. n° 1.4, a).

On note F l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{Z}_p$, à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$. Si $u \in U_1$, on note f_u la fonction $s \mapsto u^s$. Les f_u ($u \in U_1$) engendrent un sous- $\mathbb{Z}_p$ -module L de F , qui est une sous-algèbre. D'après le théorème d'indépendance des caractères (Dedekind), les f_u forment une base de L , et l'on peut identifier L à l'algèbre $\mathbb{Z}_p[U_1]$ du groupe U_1 . Un élément de L s'écrit donc, de façon unique, sous la forme

$$s \mapsto f(s) = \sum_{u \in U_1} \lambda_u u^s, \quad \text{avec } \lambda_u \in \mathbb{Z}_p,$$

les λ_u étant presque tous nuls.

b) L'algèbre $\bar{L}$

On définit $\bar{L}$ comme l'adhérence de L dans F , pour la topologie de la convergence uniforme. Notons d'ailleurs que les éléments de L sont équicontinus : si $f \in L$ et $n \geq 0$, on a

$$s \equiv s' \pmod{p^n} \Rightarrow f(s) \equiv f(s') \pmod{p^{n+1}}.$$

La même propriété est donc vraie pour $\bar{L}$; de plus, sur $\bar{L}$, la topologie de la convergence uniforme coïncide avec celle de la convergence simple sur un sous-espace dense, et cette topologie fait de $\bar{L}$ un espace compact.

c) L'algèbre Λ

C'est l'algèbre $\mathbf{Z}_p[[U_1]] = \varprojlim \mathbf{Z}_p[U_1/U_n]$, cf. [10], [11]. On sait qu'elle est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{Z}_p[[T]]$ des séries formelles en une indéterminée T . L'isomorphisme s'obtient en choisissant un générateur topologique $u = 1 + \pi$ de U_1 , avec $v_p(\pi) = 1$, et en associant à l'élément f_u de $\mathbf{Z}_p[U_1]$ l'élément $1 + T$ de $\mathbf{Z}_p[[T]]$.

L'anneau Λ est un anneau local régulier de dimension 2; il joue un rôle essentiel dans les travaux d'Iwasawa sur les classes d'idéaux des extensions cyclotomiques (le groupe U_1 intervenant alors comme un groupe de Galois). On notera que Λ est compact pour la topologie définie par les puissances de son idéal maximal; lorsqu'on identifie Λ à $\mathbf{Z}_p[[T]]$, cette topologie devient celle de la convergence simple des coefficients; le groupe topologique Λ est donc isomorphe à un produit infini de groupe $\mathbf{Z}_p$.

d) Identification de $\bar{L}$ à Λ .

Les algèbres $\bar{L}$ et Λ contiennent toutes deux $L = \mathbf{Z}_p[U_1]$ comme sous-algèbre dense. Il s'impose de les comparer :

LEMME 11. Il existe un unique isomorphisme d'algèbres topologiques

$$\epsilon : \Lambda \rightarrow \bar{L}$$

dont la restriction à $\mathbf{Z}_p[U_1]$ soit l'identité.

L'unicité de ϵ résulte de ce que $\mathbf{Z}_p[U_1]$ est dense dans Λ . Pour en montrer l'existence, identifions comme ci-dessus Λ à $\mathbf{Z}_p[[T]]$ au moyen du choix d'un générateur topologique u de U_1 . Si $f = \sum a_n T^n$ est un élément de Λ , on définit $\epsilon(f)$ comme la fonction

$$s \mapsto f(u^s - 1) = \sum a_n (u^s - 1)^n,$$

ce qui a un sens car $u^s - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Il est clair que ϵ est un homomorphisme continu de Λ dans F , et que $\epsilon(f_u) = f_u$; il en résulte que ϵ est l'identité sur L ; par continuité, on a donc $\epsilon(\Lambda) = \bar{L}$. Le fait que ϵ soit injectif est immédiat; comme Λ est compact, c'est un homéomorphisme.

Remarques

1) Dans ce qui suit, nous identifierons Λ à $\bar{L}$ au moyen de ϵ . Comme on vient de le voir, cela revient à passer d'une série en T à une fonction de s par le "changement de variables"

$$T = u^s - 1 = vs + \dots + v^n s^n / n! + \dots, \quad \text{où } v = \log(u).$$

2) Il y a une troisième interprétation de Λ , due à B.Mazur, qui est souvent utile : c'est l'algèbre des "distributions" (ou "mesures") à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$ sur l'espace U_1 . On appelle ainsi toute fonction $U \mapsto \mu(U)$, définie sur les ouverts compacts de U_1 , simplement additive, et à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$; une telle mesure se prolonge par continuité en une forme linéaire

$$f \mapsto \int_{U_1} f(u) \mu(u)$$

sur l'espace des fonctions continues sur U_1 à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. Si l'on associe à μ la fonction $s \mapsto \int_{U_1} u^s \mu(u)$,

on obtient un élément de Λ ; tout élément de Λ s'obtient ainsi, de manière unique; les éléments de L correspondent aux mesures discrètes.

e) Zéros d'un élément de Λ

Tout élément $f \neq 0$ de $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ a une "décomposition de Weierstrass canonique :

$$f = p^\mu (T^\lambda + a_1 T^{\lambda-1} + \dots + a_\lambda) u(T),$$

avec $\lambda, \mu \geq 0$, $v_p(a_i) \geq 1$, et u inversible dans Λ . En particulier, le nombre de zéros de $f(s)$ est fini et $\leq \lambda$.

Comme application, signalons :

LEMME 12. Soit $f_1, \dots, f_n, \dots$ une suite d'éléments de Λ . On suppose que $\lim f_n(s)$ existe pour tout élément s d'une partie infinie S de $\mathbb{Z}_p$. Alors les f_n convergent uniformément sur $\mathbb{Z}_p$ vers une fonction f appartenant à Λ .

Sinon, vu la compacité de Λ , on pourrait extraire de la suite (f_n) deux suites convergeant vers des éléments distincts f' et f'' de Λ . La fonction $f' - f''$ s'annulerait sur S , donc aurait une infinité de zéros, contrairement à ce que l'on vient de voir.

(La famille Λ se comporte comme une "famille normale" au sens de Montel.)

4.2. L'algèbre d'Iwasawa ($p = 2$)

On définit encore U_n comme le sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^*$ formé des entiers 2 -adiques u tels que $u \equiv 1 \pmod{2^n}$. On a

$$\mathbb{Z}_p^* = U_1 = \{\pm 1\} \times U_2$$

et U_2 est isomorphe à $\mathbf{Z}_2$; si $u \in U_1$, on note $\omega(u)$ sa composante dans $\{1\}$ et $\langle u \rangle$ sa composante dans U_2 , cf. [11], p.18.

On définit les algèbres L et Λ au moyen du groupe U_2 (et non plus du groupe U_1). De façon plus précise, L est l'algèbre engendrée par les fonctions $f_u : s \mapsto u^s$, avec $u \in U_2$. On montre, comme au n° 4.1, que l'adhérence $\bar{L}$ de L s'identifie à l'algèbre d'Iwasawa

$$\Lambda = \mathbf{Z}_2[[U_2]] = \varprojlim \mathbf{Z}_2[U_2/U_n].$$

Ici encore, cette algèbre est isomorphe à $\mathbf{Z}_2[[T]]$, l'isomorphisme s'obtenant en choisissant un générateur topologique u de U_2 et en associant à l'élément f_u de $\mathbf{Z}_2[U_2]$ l'élément $1 + T$ de $\mathbf{Z}_2[[T]]$, cf. [11], p.69.

Les autres résultats du n° 4.1 se transposent de manière évidente au cas $p = 2$.

4.3. Caractérisation des éléments de Λ par leurs développements en série

Nous allons voir que les fonctions f appartenant à Λ peuvent être caractérisées comme des séries de Taylor convergentes

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n,$$

dont les coefficients a_n vérifient certaines congruences. Pour écrire commodément ces congruences, définissons des entiers c_{in} ($1 \leq i \leq n$) par l'identité

$$\sum_{i=1}^n c_{in} Y^i = Y(Y-1)(Y-2) \dots (Y-n+1) = n! \binom{Y}{n}.$$

On a alors :

THÉOREME 13. Pour qu'une fonction $f \in F$ appartienne à Λ , il faut et il suffit qu'il existe des entiers p -adiques b_n ($n = 0, 1, \dots$) tels que

$$a) \quad f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n s^n / n! \quad \text{pour tout } s \in \mathbf{Z}_p,$$

$$b) \quad v_p \left(\sum_{i=1}^n c_i n^{b_i} \right) > v_p(n!) \quad \text{pour tout } n > 1.$$

(Si $p = 2$, on doit modifier a) en remplaçant p^n par 4^n .)

Remarques

1) Comme $c_{nn} = 1$, la condition b) équivaut à dire que chacun des b_n est congru (mod. $n! \mathbf{Z}_p$) à une certaine combinaison $\mathbf{Z}$ -linéaire des b_j , $j < n$.

2) On a

$$v_p(b_n p^n / n!) > n - v_p(n!) > n \frac{p-2}{p-1} \quad \text{si } p \neq 2$$

$$v_2(b_n 4^n / n!) > 2n - v_2(n!) > n \quad \text{si } p = 2.$$

Il en résulte que la série entière donnant f converge dans un disque p -adique strictement plus grand que le disque unité; a fortiori, elle converge sur $\mathbf{Z}_p$, ce qui donne un sens à a).

Démonstration du th.13

Je me borne au cas $p \neq 2$; le cas $p = 2$ est analogue.

(i) Le développement

$$T = v s + \dots + v^n s^n / n! + \dots, \quad \text{avec } v_p(v) = 1,$$

donné au n° 4.1 montre que T , ainsi que ses puissances, a un développement en série du type a). Par linéarité et passage à la limite, on voit qu'il en est de même de toute fonction f de Λ . De plus les coefficients $b_n = b_n(f)$ de f dépendent continûment de f . On en conclut que l'application $f \mapsto (b_n(f))$ est un isomorphisme du groupe compact Λ sur un certain sous-module fermé S_Λ du $\mathbf{Z}_p$ -module produit $S = (\mathbf{Z}_p)^N$ des suite

$(b_n)_{n \geq 0}$. Tout revient donc à montrer que S_Λ coïncide avec le sous-module S_b de S défini par les congruences b).

(ii) Tout élément u de U_1 s'écrit $\exp(py)$, avec $y \in \mathbf{Z}_p$. On en conclut que

$$u^S = \exp(pys) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n p^n s^n / n!,$$

i.e. que $b_n(f_u) = y^n$. Or la suite (y^n) appartient à S_b . On a en effet

$$\sum c_{in} y^n = y(y-1)\dots(y-n+1) = n! \binom{y}{n},$$

et l'on sait que $\binom{y}{n}$ est un entier p -adique; cela montre bien que $\sum c_{in} y^n$ est divisible par $n!$ dans $\mathbf{Z}_p$.

Par linéarité et passage à la limite on conclut de là que S_Λ est contenu dans S_b . Il reste à voir que S_Λ est égal à S_b ; vu ce qui précède, cela équivaut à dire que les suites de la forme (y^n) , avec $y \in \mathbf{Z}_p$, engendrent un sous- $\mathbf{Z}_p$ -module dense de S_b .

(iii) Soit $m \geq 1$ et soient $b_0, \dots, b_m \in \mathbf{Z}_p$ satisfaisant aux congruences b) pour $n \leq m$. Nous allons montrer qu'il existe $f \in \Lambda$ tel que $b_i(f) = b_i$ pour $0 \leq i \leq m$, ce qui achèvera la démonstration.

On procède par récurrence sur m , le cas $m = 0$ étant évident. Vu l'hypothèse de récurrence, il existe $g \in \Lambda$ tel que $b_i(g) = b_i$ pour $i \leq m-1$; tout revient à trouver $h \in \Lambda$ tel que $b_i(h) = 0$ pour $i \leq m-1$ et $b_m(h) = b_m - b_m(g)$. On est donc ramené au cas où les b_i sont nuls pour $i \leq m-1$; vu la congruence b) il en résulte que b_m est de la forme $m! z$, avec $z \in \mathbf{Z}_p$. On prend alors pour f le monôme $z(p/v)^{m_T m}$, avec les notations de (i); il est clair qu'il répond à la question.

COROLLAIRE. Soit $f \in \Lambda$, et soient b_n les coefficients correspondants.
On a $b_n \equiv b_{n+p-1} \pmod{p}$ pour tout $n \geq 1$.

En effet, cette congruence est évidente lorsque la suite (b_n) est de la forme (y^n) , avec $y \in \mathbf{Z}_p$, et le cas général s'en déduit par linéarité

et passage à la limite. (Bien entendu, on peut aussi utiliser b).)

Remarque

Signalons une autre propriété de stabilité de l'algèbre Λ :

$$\text{si } f \in \Lambda, \text{ on a } \frac{df}{ds} \in p\Lambda \text{ si } p \neq 2 \text{ et } \frac{df}{ds} \in 4\Lambda \text{ si } p = 2.$$

Cela résulte de la formule $\frac{df}{ds} = v(1 + T)\frac{df}{dT}$.

4.4. Caractérisation des éléments de Λ par des propriétés d'interpolation

Soient $s_0, s_1 \in \mathbb{Z}_p$ et $f \in F$. Posons $a_n = a_n(f) = f(s_0 + ns_1)$ pour $n = 0, 1, \dots$ et désignons par $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, \dots$ les différences successives de la suite (a_n) :

$$\delta_0 = a_0, \quad \delta_1 = a_1 - a_0, \quad \delta_2 = a_2 - 2a_1 + a_0, \dots,$$

$$\delta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_{n-i}.$$

THÉOREME 14. Posons

$$h = 1 + v_p(s_1) \text{ si } p \neq 2 \text{ et } h = 2 + v_2(s_1) \text{ si } p = 2.$$

Si $f \in \Lambda$, on a

$$a) \quad \delta_n \equiv 0 \pmod{p^{nh}} \text{ pour tout } n \geq 0,$$

$$b) \quad v_p\left(\sum_{i=1}^n c_{in} \delta_i p^{-ih}\right) \geq v_p(n!) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

(On rappelle que c_{in} est le coefficient de Y^i dans le polynôme $Y(Y-1)\dots(Y-n+1)$, cf. n° 4.3.)

Il suffit de considérer le cas où $f(s) = u^s$ avec $u \in U_1$ (resp. avec $u \in U_2$ si $p = 2$); le cas général s'en déduira par linéarité et passage

à la limite. On a alors

$$a_n = u^{s_0} u^{ns_1} \quad \text{et} \quad \delta_n = u^{s_0} (u^{s_1} - 1)^n.$$

Or $u^{s_1} - 1$ est de la forme $p^h y$, avec $y \in \mathbf{Z}_p$. On a donc $v_p(\delta_n) \geq nh$, ce qui prouve a). L'assertion b) provient de ce que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_{in} \delta_i p^{-ih} &= u^{s_0} (\sum c_{in} y^i) = u^{s_0} y(y-1)\dots(y-n+1) \\ &= n! u^{s_0} \binom{y}{n} \equiv 0 \pmod{n! \mathbf{Z}_p}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE. Posons $e_n = \delta_n p^{-nh}$. On a $e_n \equiv e_{n+p-1} \pmod{p}$ pour tout $n \geq 1$.

La démonstration est la même que celle du corollaire au th.13.

En fait, les congruences de th.14 caractérisent les éléments de l'algèbre d'Iwasawa Λ . De façon plus précise, prenons $s_0 = 0$ et $s_1 = 1$, de sorte que $a_n = f(n)$, et que les δ_n sont les coefficients d'interpolation usuels; on sait (critère de Mahler, cf. [1]) que, si f est continue, les δ_n tendent vers 0, et que l'on a

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \binom{s}{n} \quad \text{pour tout } s \in \mathbf{Z}_p.$$

THÉOREME 15. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$, et soient $\delta_n = \sum (-1)^i \binom{n}{i} f(n-i)$ ses coefficients d'interpolation. Pour que f appartienne à Λ , il faut et il suffit que :

a) $\delta_n \equiv 0 \pmod{p^n}$ pour tout $n \geq 0$,

b) $v_p(\sum_{i=1}^n c_{in} \delta_i p^{-ih}) \geq v_p(n!)$ pour tout $n \geq 1$.

(Si $p = 2$, on doit remplacer p^n par 4^n dans a), et p^{-i} par 4^{-i} dans b).)

La nécessité résulte du th.14. Prouvons la suffisance, en nous bornant au cas $p \neq 2$ (le cas $p = 2$ est analogue). Soit S_b l'ensemble des suites (b_n) d'entiers p -adiques tels que

$$v_p(\sum c_{in} b_i) > v_p(n!) \quad \text{pour tout } n > 1.$$

On a vu au n° 4.2 que les suites de la forme (y^n) , avec $y \in \mathbf{Z}_p$, engendrent un sous-module dense de S_b pour la topologie produit. Par hypothèse, la suite $(\delta_n p^{-n})$ appartient à S_b . Pour tout entier m on peut donc choisir des éléments λ_i, y_i de $\mathbf{Z}_p$, en nombre fini, tels que

$$\delta_n p^{-n} = \sum \lambda_i y_i^n \quad \text{pour tout } n \leq m.$$

Posons

$$f_m(s) = \sum \lambda_i (1 + p y_i)^s.$$

On a $f_m \in \Lambda$ (et même $f_m \in L$); de plus les formules ci-dessus montrent que les coefficients d'interpolation de f_m sont les mêmes que ceux de f jusqu'à l'indice m ; on a donc $f_m(n) = f(n)$ pour $n \leq m$, et la suite (f_m) tend vers f pour la topologie de la convergence simple sur l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers ≥ 0 . Comme $\mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$, cela entraîne que $f = \lim f_m$, cf. n° 4.1 b), et par suite on a bien $f \in \Lambda$.

4.5. Exemple : coefficients des séries d'Eisenstein p -adiques

Considérons la série

$$G_k^* = \frac{1}{2} \zeta^*(1-k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(n) q^n \quad (k \in X, \text{ } k \text{ pair} \neq 0)$$

définie au n° 1.6. Ecrivons k sous la forme $k = (s, u)$, avec :

$$s \in \mathbf{Z}_p, \quad u \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}, \quad u \text{ pair (si } p \neq 2), \quad s \text{ pair (si } p = 2).$$

Les coefficients de $G_k^* = G_{s,u}^*$ sont :

$$a_0(G_{s,u}^*) = \frac{1}{2} \zeta^*(1-s, 1-u)$$

$$a_n(G_{s,u}^*) = \sigma_{k-1}^*(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d,p)=1}} d^{k-1} \quad \text{si } n \geq 1.$$

Décomposons l'unité p-adique d en $\omega(d) \langle d \rangle$, avec

$$\omega(d)^{p-1} = 1, \quad \langle d \rangle \in U_1 \quad \text{si } p \neq 2,$$

$$\omega(d) = \pm 1, \quad \langle d \rangle \in U_2 \quad \text{si } p = 2.$$

On a alors :

$$a_n(G_{s,u}^*) = \sum d^{-1} \omega(d)^k \langle d \rangle^k = \sum d^{-1} \omega(d)^u \langle d \rangle^s \quad (n \geq 1).$$

On en conclut que, pour u et n fixés (avec $n \geq 1$) la fonction

$$s \mapsto a_n(G_{s,u}^*)$$

appartient à l'algèbre L du n° 4.1, et a fortiori à son adhérence Λ .

(Noter que, si $u = 0$, cette fonction n'est définie que pour $s \neq 0$; si $p = 2$, elle n'est même définie que pour $s \in 2\mathbb{Z}_2$, $s \neq 0$.)

On a un résultat analogue, mais beaucoup moins évident, pour le terme constant $a_0(G_{s,u}^*)$:

THÉOREME 16 (Iwasawa).

a) Si u est un élément pair $\neq 0$ de $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, la fonction

$$s \mapsto a_0(G_{s,u}^*) = \frac{1}{2} \zeta^*(1-s, 1-u)$$

appartient à l'algèbre Λ .

b) Si $u = 0$, la fonction

$$s \mapsto a_0(G_{s,u}^*) = \frac{1}{2} \zeta^*(1-s, 1)$$

est de la forme $T^{-1}g(T)$, où g est un élément inversible de Λ .

(Dans b), on a identifié Λ à $\mathbf{Z}_p[[T]]$, cf. n° 4.1 et 4.2.)

Cet énoncé est simplement une reformulation des principaux résultats de [10], compte tenu de ce que $\zeta^*(1-s, 1-u) = L_p(1-s; \omega^u)$, cf. n° 1.6, th.3 (i). Voir aussi [11], §6.

Remarques

- 1) Dans le cas $u \neq 0$, le th.16, combiné avec le th.14 a) redonne les classiques congruences de Kummer (cf. Fresnel [7] et Shiratani [23]) le th.14 b) donne des congruences supplémentaires, peut-être nouvelles
- 2) Dans le cas $u = 0$, le th.16 montre que la fonction

$$s \mapsto 2\zeta^*(1-s, 1)^{-1}$$

appartient à Λ et est divisible par T (elle a un "zéro simple" en $T = 0$)

Il en résulte que les coefficients $a_n(E_{s,0}^*)$ de la série

$$E_{s,0}^* = \frac{2}{\zeta^*(1-s, 1)} G_{s,0}^*$$

appartiennent à Λ et sont divisibles par T si $n \geq 1$.

4.6. Familles de formes modulaires p-adiques (poids non divisible par $p - 1$)

Considérons une forme modulaire p-adique f_s dépendant d'un paramètre $s \in \mathbf{Z}_p$ et de poids $k(s) \in 2X$. On suppose que $k(s)$ est de la forme (rs, u) , avec $r \in \mathbf{Z}$ et $u \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ indépendants de s . On suppose en outre que u est $\neq 0$ (ce qui entraîne $p \neq 2, 3$); le cas $u = 0$ sera traité au n° suivant.

THÉOREME 17. Supposons que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $s \mapsto a_n(f_s)$ appartienne à l'algèbre d'Iwasawa Λ . Il en est alors de même de la fonction $s \mapsto a_0(f_s)$.

Nous allons utiliser la série d'Eisenstein p -adique E_{-rs}^* de poids $-rs$, normalisée de telle sorte que son terme constant soit 1, cf. n° 1.6. Ecrivons-la sous la forme

$$E_{-rs}^* = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(s) q^n, \quad \text{avec } e_0(s) = 1.$$

On a vu au n° précédent que les coefficients de E_s^* appartiennent à Λ ; il en est donc de même des $e_n(s)$; on a de plus $e_n(0) = 0$ si $n \geq 1$ puisque $E_0^* = 1$.

La fonction $f'_s = f_s E_{-rs}^*$ est une forme modulaire p -adique de poids $(0, u)$ indépendant de s . Ses coefficients sont donnés par :

$$a_m(f'_s) = e_m(s) a_0(f_s) + \sum_{i=1}^m e_{m-i}(s) a_i(f_s).$$

D'après le th.9 du n° 2.3, appliqué à $k = (0, u)$, il existe une suite $(\lambda_{m,n})_{m,n \geq 1}$ d'éléments de $\mathbf{Z}_p$, avec $\lambda_{m,n} = 0$ pour m assez grand (dépendant de n), telle que

$$a_0(f'_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_m \lambda_{m,n} a_m(f'_s).$$

Comme f_s et f'_s ont même terme constant, ceci peut se récrire :

$$a_0(f_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_m \lambda_{m,n} e_m(s) a_0(f_s) + \sum_{m,i \geq 1} \lambda_{m,n} e_{m-i}(s) a_i(f_s) \right).$$

Posons $g_n(s) = \sum_m \lambda_{m,n} e_m(s)$. Les fonctions g_n appartiennent à Λ , qui est compact. Quitte à remplacer la suite (n) par une sous-suite, on peut donc supposer que les $g_n(s)$ convergent dans Λ vers un élément g ; comme $g_n(0) = 0$ pour tout n , on a $g(0) = 0$. La formule ci-dessus peut alors se récrire :

$$(1 - g(s))a_0(f_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(s),$$

$$\text{avec } b_n(s) = \sum_{m,i \geq 1} \lambda_{m,n} e_{m-i}(s) a_i(f_s).$$

Vu l'hypothèse faite sur les $a_i(f_s)$, les fonctions b_n appartiennent à Λ pour tout n . Comme ces fonctions convergent simplement vers la fonction

$$s \mapsto (1 - g(s))a_0(f_s),$$

on en déduit que cette dernière fonction appartient à Λ , cf. n° 4.1, lemme 12. Mais le fait que $g(0) = 0$ entraîne que g appartient à l'idéal maximal de Λ , et $1 - g$ est inversible dans Λ . On en conclut bien que $s \mapsto a_0(f_s)$ appartient à Λ .

4.7. Familles de formes modulaires p-adiques (poids divisible par p-1)

Considérons, comme au n° précédent, une forme modulaire p-adique f_s dépendant d'un paramètre s . Nous supposons maintenant que f_s est défini pour tout $s \neq 0$ de $\mathbb{Z}_p$ (resp. pour tout $s \neq 0$ de $2\mathbb{Z}_2$ si $p = 2$), et que son poids $k(s)$ est de la forme $rs = (rs, 0)$ où r est un entier non nul.

Convenons de dire qu'une fonction sur $\mathbb{Z}_p - \{0\}$ (resp. sur $2\mathbb{Z}_2 - \{0\}$) appartient à Λ si elle est la restriction d'une fonction de Λ .

THÉORÈME 18. Supposons que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $s \mapsto a_n(f_s)$

appartienne à Λ . Il en est alors de même de la fonction

$$s \mapsto 2\zeta^*(1 - rs, 1)^{-1} a_0(f_s).$$

Identifions Λ à $\mathbf{Z}_p[[T]]$ comme d'habitude. D'après le th.16, la fonction $s \mapsto 2\zeta^*(1 - s, 1)^{-1}$ est de la forme $T.h(T)$, où h est un élément inversible de Λ . Comme $s \mapsto rs$ correspond à $1 + T \mapsto (1 + T)^r$, on en conclut que la fonction $s \mapsto 2\zeta^*(1 - rs, 1)^{-1}$ est de la forme $((1 + T)^r - 1)g(T)$, avec g inversible dans Λ . D'où :

COROLLAIRE. La fonction $s \mapsto a_0(f_s)$ appartient au corps des fractions de Λ ; on peut l'écrire $c(T)/((1 + T)^r - 1)$, avec $c \in \Lambda$.

Remarque

Si q est la plus grande puissance de p qui divise r , on peut mettre $(1 + T)^r - 1$ sous la forme $u(T)((1 + T)^q - 1)$, où u est un élément inversible de Λ . On peut donc récrire la fonction $s \mapsto a_0(f_s)$ comme une fraction $d(T)/((1 + T)^q - 1)$, avec $d \in \Lambda$.

Démonstration du th.18

Choisissons un polynôme H en U et les T_ℓ , à coefficients entiers, qui satisfasse aux conditions du th.8 du n° 2.3 : pour tout $k \in \mathbf{Z}_p$, on a

- (i) $E_k^*|_k H = c(k) E_k^*$ avec $c(k)$ inversible dans $\mathbf{Z}_p$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f|_k H^n = 0$ pour toute forme modulaire p -adique f de poids k

qui est parabolique.

D'après le cor. au th.8, on a

$$2\zeta^*(1 - rs, 1)^{-1} a_0(f_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(rs)^{-n} a_1(f_s|_{rs} H^n),$$

et tout revient à montrer que les fonctions

$$s \mapsto c(rs)^{-n} \quad \text{et} \quad s \mapsto a_1(f_s|_{rs} H^n)$$

appartiennent à Λ (en effet, on sait qu'une suite de fonctions de Λ qui converge en tout point d'une partie infinie de $\mathbf{Z}_p$ converge uniformément vers une fonction de Λ , cf. n° 4.1, lemme 12). Or on a le résultat suivant :

LEMME 13. Soit R un polynôme en U et les T_ℓ , à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$. Il existe une famille de fonctions $k \mapsto c_{ij}(R, k)_{i,j} \geq 0$, appartenant à sous-algèbre L de Λ (cf. n° 4.1) et telles que, pour tout $i \geq 0$, on ait :

- a) $c_{ij}(R, k) = 0$ pour j assez grand, pour $j = 0$ si $i \geq 1$, et pour $j \geq 1$ si $i = 0$;
- b) $a_i(f|_k R) = \sum_j c_{ij}(R, k) a_j(f)$ pour toute série formelle p -adique f , et tout $k \in 2\mathbf{Z}_p$.

Lorsque R est égal à U , ou à l'un des T_ℓ , le lemme résulte des formules donnant $f|U$ et $f|_k T_\ell$, cf. n° 2.1. Le cas général s'en déduit en remarquant que, si l'énoncé est vrai pour deux polynômes R_1 et R_2 , il l'est aussi pour $R_1 R_2$ et $R_1 + R_2$.

Revenons à la démonstration du th.18. On a

$$a_1(f_s|_{rs} H^n) = \sum_{j \geq 1} c_{1j}(H^n, rs) a_j(f_s),$$

et cette formule montre bien que $s \mapsto a_1(f_s|_{rs} H^n)$ appartient à Λ .

On a d'autre part $c(k) = a_0(E_k^*|_k H) = c_{00}(H, k)$, ce qui montre que $k \mapsto c(k)$ appartient à L , et il en est de même de $s \mapsto c(rs)$. De plus, d'après (i), les valeurs prises par $c(rs)$ sont des unités p -adiques. Si l'on écrit $s \mapsto c(rs)$ comme une série en T , le terme constant de cette série est inversible dans $\mathbf{Z}_p$; la série elle-même est donc inversible dans $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[T]]$, et l'on en conclut que $s \mapsto c(rs)^{-n}$ appartient à Λ quel que soit n , ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque

Dans les ths. 17 et 18, il n'est pas nécessaire de supposer f_s définie pour tout $s \in \mathbf{Z}_p$ (ou tout $s \neq 0$); il suffit de se donner les f_s pour s appartenant à une partie infinie S de $\mathbf{Z}_p$, et de faire l'hypothèse suivante : pour tout $n \geq 1$, la fonction $s \mapsto a_n(f_s)$ est la restriction à S d'une fonction appartenant à Λ .

§5. Fonctions zêta p-adiques5.1. Notations

La lettre K désigne un corps de nombres algébriques totalement réel de degré r sur $\mathbf{Q}$: $K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ est isomorphe à $\mathbf{R}^r$. L'anneau des entiers de K est noté $\mathcal{O}_K$, sa différentielle (par rapport à $\mathbf{Z}$) est notée d et son discriminant Δ .

Si x (resp. $\mathfrak{a}$) est un élément (resp. un idéal) de K , on note Nx (resp. $N\mathfrak{a}$) sa norme, qui est un élément (resp. un élément positif) de $\mathbf{Q}$; par exemple $\Delta = N d$. On note $\text{Tr}(x)$ la trace de x .

Un élément x de K est dit totalement positif si $\sigma(x) > 0$ pour tout plongement $\sigma : K \rightarrow \mathbf{R}$. On écrit alors $x \gg 0$; on a $\text{Tr}(x) > 0$.

La fonction zêta de K est définie par la formule

$$\zeta_K(s) = \sum Na^{-s} = \prod (1 - Np^{-s})^{-1}$$

où a (resp. p) parcourt l'ensemble des idéaux $\neq 0$ (resp. des idéaux premiers $\neq 0$) de $\mathcal{O}_K$. Cette formule vaut pour $\text{Re}(s) > 1$. On prolonge ζ_K en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, ayant pour seul pôle (simple) le point $s = 1$. La fonction

$$d^{s/2} \pi^{-rs/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^r \zeta_K(s)$$

est invariante par $s \mapsto 1 - s$ ("équation fonctionnelle"). On en déduit que, si n est un entier ≥ 1 , on a

$$\zeta_K(1 - n) = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair (le cas } r = 1, n = 1 \text{ excepté)}$$

$$\zeta_K(1 - n) \neq 0 \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

De plus, d'après un théorème énoncé par Hecke ([8], p.387) et démontré par Siegel [24], les $\zeta_K(1 - n)$, $n \geq 1$, sont des nombres rationnels.

5.2. Formes modulaires attachées à K

Soit k un entier pair ≥ 2 . Définissons une série formelle g_k

$$g_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g_k) q^n$$

par les formules :

$$a_0(g_k) = 2^{-r} \zeta_K(1 - k),$$

$$a_n(g_k) = \sum_{\substack{\text{Tr}(x)=n \\ x \in d^{-1} \\ x \gg 0}} \sum_{a|xd} (Na)^{k-1} \quad (n \geq 1),$$

où x parcourt les éléments totalement positifs de d^{-1} de trace n , et a les idéaux de $\mathcal{O}_K$ contenant xd . (Il revient au même de dire que l'on somme sur les couples (x, a) tels que a soit entier, $x \in d^{-1}a$, $x \gg 0$ et $\text{Tr}(x) = n$; c'est une somme finie.)

THÉORÈME 19 (Hecke-Siegel). Mis à part le cas $r = 1$, $k = 2$, la série g_k est une forme modulaire sur $SL_2(\mathbf{Z})$ de poids rk .

(Pour $r = 1$, i.e. $K \cong \mathbb{Q}$, on a $g_k = G_k$, d'où la nécessité d'exclure $k = 2$, cf. n° 1.1.)

Si u est un idéal fractionnaire de K , on trouve dans Siegel [25], p.93, la définition d'une certaine fonction

$$F_k(u, z_1, \dots, z_r), \quad \text{Im}(z_i) > 0,$$

qui est une série d'Eisenstein du corps K , au sens de Hecke [8], p.381-404; c'est une forme modulaire de poids k par rapport au groupe $SL_2(\mathcal{O}_K)$ opérant sur le produit H^r de r demi-plans de Poincaré. Si l'on restreint $F_k(u, z_1, \dots, z_r)$ à la diagonale H de H^r , on obtient une fonction

$$\Phi_k(u, z) = F_k(u, z, \dots, z),$$

qui est une forme modulaire de poids rk , au sens usuel. Les coefficients de $\Phi_k(u, z)$ sont donnés dans [25], p.94, formule (19). Les fonctions $F_k(u, z_1, \dots, z_r)$ et $\Phi_k(u, z)$ ne changent pas lorsqu'on multiplie u par un idéal principal. Posons alors

$$\Phi_k(z) = \sum_u \Phi_k(u, z),$$

où u parcourt un ensemble de représentants des classes d'idéaux de K . Les formules (18) et (19) de [25] donnent :

$$a_n(\Phi_k) = e_k a_n(g_k) \quad \text{pour } n \geq 1, \quad \text{où } e_k = d^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \right)^r,$$

ainsi que

$$a_0(\Phi_k) = \zeta_K(k),$$

et l'équation fonctionnelle de ζ_K permet de récrire cette dernière formule sous la forme :

$$a_o(\phi_k) = e_k 2^{-r} \zeta_K(1-k) = e_k a_o(g_k).$$

On a donc $g_k = e_k^{-1} \phi_k$, ce qui montre bien que g_k est modulaire de poids rk .

COROLLAIRE.

- (i) Si $rk \not\equiv 0 \pmod{(p-1)}$, $\zeta_K(1-k)$ est p-entier.
 (ii) Si $rk \equiv 0 \pmod{(p-1)}$, on a

$$v_p(\zeta_K(1-k)) \geq -1 - v_p(rk) \quad (p \neq 2)$$

$$v_p(\zeta_K(1-k)) \geq r - 2 - v_p(rk) \quad (p = 2).$$

Cela résulte du cor.1 au th.1' du n° 1.5, compte tenu de ce que les coefficients $a_n(g_k)$ sont entiers pour $n \geq 1$. (Voir aussi [20], th.6 et th.6'.)

Remarques

1) Le corollaire ci-dessus fournit une estimation du dénominateur de $\zeta_K(1-k)$. Cette estimation est assez grossière : elle ne fait intervenir K que par l'intermédiaire de son degré r ; pour $k = 2$, elle est moins bonne que celle donnée par la formule

$$\zeta_K(-1) = \text{caract.d'E-P. de } SL_2(O_K),$$

cf. [19], n° 3.7, prop.29-30.

2) Nous aurons besoin plus loin d'une variante du th.19, dans laquelle on modifie g_k en gardant uniquement les termes "premiers à p ". De façon plus précise, soit S l'ensemble des idéaux premiers de O_K qui divisent p , et posons

$$\begin{aligned} \zeta_{K,S}(s) &= \zeta_K(s) \prod_{p \in S} (1 - Np^{-s}) = \prod_{p \notin S} (1 - Np^{-s})^{-1} \\ &= \sum_{(a,p)=1} Na^{-s}. \end{aligned}$$

Définissons une série formelle g'_k par les formules

$$a_0(g'_k) = 2^{-r} \zeta_{K,S}(1-k) = 2^{-r} \zeta_K(1-k) \prod_{p \in S} (1 - Np^{k-1})$$

$$\text{et } a_n(g'_k) = \sum_{x,a} (Na)^{k-1} \quad (n \geq 1),$$

où la sommation porte sur les couples (x,a) , avec a entier premier à p , $x \in d^{-1}a$, $x \gg 0$ et $\text{Tr}(x) = n$.

On a alors :

THÉORÈME 19'. La série g'_k est une forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$ de poids rk (cf. n° 3.1).

(Noter qu'ici le cas $r = 1$, $k = 2$ n'est plus exclu.)

La démonstration est analogue à celle du th.19, à cela près que l'on doit utiliser des séries d'Eisenstein de niveau p , cf. Kloosterman [14] et Siegel [26]. Pour plus de détails, voir l'exemple 2) de l'Appendice placé à fin de ce §.

5.3. La fonction zêta p -adique du corps K

Soit k un élément pair de X tel que $rk \neq 0$. Nous allons associer à k une forme modulaire p -adique g_k^* , de poids rk , par passage à la limite à partir des formes g_k du n° 5.2. Le procédé est le même que celui utilisé au n° 1.6 dans le cas de $\mathbf{Q}$. On choisit une suite d'entiers pairs $k_i \geq 4$ tels que $|k_i| \rightarrow \infty$ et $k_i \rightarrow k$ dans X . Si u est un entier p -adique, on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u^{k_i} = 0 \quad \text{si } u \equiv 0 \pmod{p}, \text{ et } \lim_{i \rightarrow \infty} u^{k_i} = u^k \quad \text{sinon,}$$

la convergence étant uniforme en u . On en conclut que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_n(g_{k_i}) = \sum_{x,a} (Na)^{k-1}, \quad (n \geq 1),$$

où la sommation porte sur les couples (x, a) , avec a idéal de $\mathcal{O}_K$ premier à p , $x \in d^{-1}a$, $x \gg 0$ et $\text{Tr}(x) = n$; de plus, la convergence est uniforme en n . Appliquant alors le cor.2 au th.1' du n° 1.5, on en déduit que les g_{k_i} ont une limite g_k^* qui est une forme modulaire p-adique de poids rk , indépendante de la suite k_i choisie. Le terme constant de g_k^* sera noté $2^{-r}\zeta_K^*(1-k)$, de sorte que l'on a

$$a_0(g_k^*) = 2^{-r}\zeta_K^*(1-k) = 2^{-r} \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_K(1-k_i),$$

$$a_n(g_k^*) = \sum_{\substack{\text{Tr}(x)=n \\ x \in d^{-1} \\ x \gg 0}} \sum_{\substack{a|xd \\ (a,p)=1}} (Na)^{k-1}, \quad n \geq 1.$$

La fonction ζ_K^* ainsi définie sera appelée la fonction zêta p-adique du corps K ; elle prend ses valeurs dans $\mathbb{Q}_p$.

THÉORÈME 20. Si k est un entier pair ≥ 2 , on a

$$\zeta_K^*(1-k) = \zeta_{K,S}(1-k) = \zeta_K(1-k) \prod_{p \in S} (1 - Np^{k-1}).$$

(Rappelons que S est l'ensemble des idéaux premiers p qui divisent p .)

En effet, revenons à la série g'_k du n° précédent. D'après le th.19', cette série est une forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$ de poids rk , donc aussi une forme modulaire p-adique de poids rk , cf. n° 3.2, th.10. Comme $a_n(g'_k) = a_n(g_k^*)$ pour $n \geq 1$, on en déduit que $a_0(g'_k) = a_0(g_k^*)$, d'où le théorème.

Remarque

Il est immédiat que ζ_K^* est continue sur l'ensemble des $1-k$, avec k pair et $rk \neq 0$. Le th.20 en fournit donc une caractérisation : c'est le prolongement par continuité de la fonction

$$m \mapsto \zeta_{K,S}(m),$$

définie sur l'ensemble des entiers impairs ≤ 0 . (En particulier, lorsque χ est spécial sur $\mathbb{Q}$, ζ_χ^* coïncide avec la fonction zêta p-adique de χ au sens de Kubota-Leopoldt, cf. [11], p.62, puisque cette dernière a la même propriété.)

Le fait, ζ_χ^* est même analytique. De façon plus précise, décomposons $\chi \in \chi$ en (s, u) , avec $s \in \mathbb{Z}_p$, $u \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, de sorte que la condition $rs \neq 0$ signifie simplement que $s \neq 0$ ou $ru \neq 0$. Écrivons $\zeta_\chi^*(1-s)$ sous la forme $\zeta_\chi^*(1-s, 1-u)$. On a alors :

THÉORÈME 21. Soit u un élément pair de $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, $p \neq 2$.

(a) Si $ru \neq 0$, la fonction $s \mapsto \zeta_\chi^*(1-s, 1-u)$ appartient à l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ du §4.

(b) Si $ru = 0$, la fonction $s \mapsto \zeta_\chi^*(1-s, 1-u)$ est de la forme $h(T)/((1+T)^p - 1)$, avec $h \in \Lambda$.

THÉORÈME 21'. Si $p = 2$, la fonction $s \mapsto \zeta_\chi^*(1-s)$ est de la forme $2^r h(T)/((1+T)^p - 1)$, avec $h \in \Lambda$.

(Noter que, pour $p = 2$, $\zeta_K^*(1-s)$ est défini pour $s \in 2\mathbb{Z}_2$, $s \neq 0$.)

Posons $\chi = (s, u)$. Si $u \neq 1$, la fonction $s \mapsto a_\chi(g_K^*)$ est somme de fonctions de la forme $s \mapsto (Na)^{k-1}$, où Na est une unité p-adique. En décomposant Na à la façon habituelle (cf. n° 4.5) en $\omega(Na) \langle Na \rangle$, on a

$$(Na)^{k-1} = Na^{-1} \omega(Na)^u \langle Na \rangle^s,$$

ce qui montre que $s \mapsto a_\chi(g_K^*)$ appartient à l'algèbre L du n° 4.1. Les théorèmes 21 et 21' résultent alors des ths.17 et 18 du §4, appliqués à la famille (g_K^*) .

COROLLAIRE 1. Si $ru \neq 0$ et $p \neq 2$, la fonction $s \mapsto \zeta_\chi^*(1-s, 1-u)$ est holomorphe (au sens strict) dans un disque strictement plus grand que le disque unité.

En effet, le th.21 (a), combiné au th.13 du n° 4.3, montre que la fonction en question est donnée par une série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n, \quad \text{avec} \quad v_p(c_n) \geq n \frac{p-2}{p-1}.$$

Une telle série converge dans un disque strictement plus grand que le disque unité.

COROLLAIRE 2. Si $ru = 0$, la fonction $s \mapsto \zeta_K^*(1-s, 1-u)$ est méromorphe (au sens strict) dans un disque strictement plus grand que le disque unité; si elle n'est pas holomorphe, elle a pour unique pôle le point $s = 0$, et c'est un pôle simple.

Cela se démontre de la même manière, en tenant compte du dénominateur $(1+T)^r - 1 = u^{rs} - 1$, où u est un générateur topologique de U_1 (resp. de U_2 si $p = 2$); on vérifie en effet que $u^{rs} - 1$ peut s'écrire sous la forme $s/\phi(s)$, où ϕ est une série de Taylor convergeant dans un disque strictement plus grand que le disque unité.

COROLLAIRE 3. Soient a et b des entiers positifs. On suppose que a est pair ≥ 2 , $ra \not\equiv 0 \pmod{(p-1)}$, et $b \equiv 0 \pmod{(p-1)}$. Les différences successives δ_n de la suite $a_n = \zeta_{K,S}(1-a-nb)$ satisfont alors aux congruences

$$\delta_n \equiv 0 \pmod{p^n} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n c_i n \delta_i p^{-i} \equiv 0 \pmod{n! \mathbb{Z}_p}, \quad \text{cf. n}^\circ 4.4.$$

(Le fait que $\delta_n \equiv 0 \pmod{p^n}$ est une généralisation des congruences de Kummer.)

Vu le th.20, on a $a_n = \zeta_K^*(1-a-nb, 1-a)$. Le corollaire résulte de là, et des ths.21 et 14.

5.4. Complément : calcul de $\zeta_K^*(1-k, 1-u)$ pour k entier ≥ 1

On suppose u pair et $p \neq 2$. Le cas où $k \equiv u \pmod{(p-1)}$ est réglé par le th.20 : on a $\zeta_K^*(1-k, 1-u) = \zeta_{K,S}(1-k)$. On va voir qu'il y a un résultat analogue dans le cas général, la fonction zêta étant remplacée par une fonction L .

De façon plus précise, soit ϵ un homomorphisme de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ dans $\mathbf{C}^*$ tel que $\epsilon(-1) = (-1)^k$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal premier à p , posons $\epsilon_K(\mathfrak{a}) = \epsilon(N\mathfrak{a})$; la fonction ϵ_K définit un caractère du corps de nombres K ; l'ensemble des idéaux premiers où ce caractère est ramifié est un sous-ensemble S_ϵ de S . Nous aurons besoin de la fonction $L(s, \epsilon_K)$ de ϵ_K , ainsi que de la fonction $L_S(s, \epsilon_K)$ déduite de $L(s, \epsilon_K)$ par suppression des facteurs non premiers à p ; on a :

$$\begin{aligned} L_S(s, \epsilon_K) &= \prod_{p \notin S} (1 - \epsilon_K(p) Np^{-s})^{-1} \\ &= L(s, \epsilon_K) \prod_{p \in S-S_\epsilon} (1 - \epsilon_K(p) Np^{-s}). \end{aligned}$$

Choisissons maintenant un plongement σ du corps $\mathbf{Q}(\mu_{p-1})$ dans $\mathbf{Q}_p$, cf. n° 3.4, de sorte que ϵ devient $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$.

THÉORÈME 22. On a $L_S(1-k, \epsilon_K)^\sigma = \zeta_K^*(1-k, 1-u)$, où $u = k + \alpha$.

(Pour u, k et σ donnés, il existe un ϵ et un seul tel que $u = k + \alpha$; le th.22 fournit donc bien un procédé de calcul de $\zeta_K^*(1-k, 1-u)$.)

Considérons la série $f_{k,\epsilon}$ donnée par :

$$\begin{aligned} a_0(f_{k,\epsilon}) &= 2^{-r} L_S(1-k, \epsilon_K), \\ a_n(f_{k,\epsilon}) &= \sum_{x,a} \epsilon_K(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{k-1}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

où la sommation porte comme ci-dessus sur les $(x, \mathfrak{a})$, avec $\mathfrak{a}$ premier à p , $x \in d^{-1}\mathfrak{a}$, $x \gg 0$ et $\text{Tr}(x) = n$. La série $f_{k,\epsilon}$ est une forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$ de type (rk, ϵ^r) au sens du n° 3.4, cf. Appendice, Exemple 3). D'après le th.12 du n° 3.4, il en résulte que la série p -adique $f_{k,\epsilon}^\sigma$ est une forme modulaire p -adique de poids $rk + r\alpha$. Or, si $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
 a_n(f_{k,\epsilon}^\sigma) &= \sum_{x,a} \epsilon_K(a)^\sigma (Na)^{k-1} = \sum_{x,a} \omega(Na)^\alpha (Na)^{k-1} \\
 &= \sum_{x,a} (Na)^{k+\alpha-1} = a_n(g_{k+\alpha}^*), \quad \text{cf. n}^\circ 5.3.
 \end{aligned}$$

Comme $g_{k+\alpha}$ et $f_{k,\epsilon}^\sigma$ ont même poids, et que ce poids est non nul, les formules ci-dessus entraînent $g_{k+\alpha}^* = f_{k,\epsilon}^\sigma$. On a donc

$$2^{-r} L_S(1-k, \epsilon_K)^\sigma = a_0(f_{k,\epsilon}^\sigma) = a_0(g_{k+\alpha}^*) = 2^{-r} \zeta_K^*(1-k-\alpha),$$

d'où le théorème.

Remarque

Il résulte de l'équation fonctionnelle des séries L que l'on a $L(1-k, \epsilon_K) \neq 0$. Vu la formule liant L et L_S on en conclut que $\zeta_K^*(1-k, 1-u)$ est nul si et seulement si $k=1$ et s'il existe $p \in S - S_\epsilon$ tel que $\epsilon_K(p) = 1$. (L'existence d'un tel zéro pour ζ_K^* m'a été suggérée par J.Coates - voir aussi [4], th.1.1.)

5.5. Complément : une propriété de périodicité de ζ_K^*

On suppose $p \neq 2$. Soit $K(\mu_p)$ le corps obtenu en adjoignant à K les racines p -ièmes de l'unité, et posons $b = [K(\mu_p) : K]$. Du fait que K est réel, b est pair, et divise $p-1$.

THÉOREME 23. On a $\zeta_K^*(1-s, 1-u) = \zeta_K^*(1-s, 1-u')$ si $u' \equiv u \pmod{b}$.

Notons Y_b le sous-groupe de $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ engendré par b , et identifions Y_b à un sous-groupe de X . Il s'agit de prouver que $\zeta_K^*(1-k) = \zeta_K^*(1-k')$ si $k' \equiv k \pmod{Y_b}$.

Si a est un idéal de K premier à p , on vérifie (soit directement, soit par la théorie du corps de classes) que $Na^b \equiv 1 \pmod{p}$, i.e. que $\omega(Na)$ appartient au noyau de $z \mapsto z^b$ dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Il en résulte que, si $k' \equiv k \pmod{Y_b}$, on a $(Na)^{k'} = (Na)^k$, d'où $a_n(g_{k'}^*) = a_n(g_k^*)$ pour $n \geq 1$. On a d'autre part $p-1 = ab$, où a est le degré du corps $K \cap \mathbf{Q}(\mu_p)$; il

en résulte que a divise $r = [K:Q]$, et, si $t \in Y_D$, on a $rt = 0$. Les séries g_k^* et $g_{k'}^*$, ont donc même poids rk . Vu les formules ci-dessus, on a donc $g_k^* = g_{k'}^*$, d'où le théorème.

Remarque

Notons $Q(\mu)$ le corps engendré sur Q par toutes les racines p^n -ièmes de l'unité ($n = 1, 2, \dots$). Le degré de $K \cap Q(\mu)$ est de la forme $a p^m$, avec $m \geq 0$. On peut montrer (par un argument analogue à celui du th.23) que, pour tout u , la fonction

$$s \mapsto \zeta_K^*(1-s, 1-u)$$

appartient au corps des fractions de $\mathbf{Z}_p[[T_m]]$, où $T_m = (1+T)^{p^m} - 1$. Si $ru \neq 0$, cette fonction appartient même à $\mathbf{Z}_p[[T_m]]$.

5.6. Questions

1) Comportement de $\zeta_K^*(1-s, 1-u)$ pour $s = 0$

Supposons d'abord $ru \neq 0$, de sorte que $\zeta_K^*(1-s, 1-u)$ est défini en $s = 0$. Peut-on calculer ce nombre (en termes de logarithmes p -adiques d'unités de $K(\mu_p)$, par exemple) ? C'est le cas lorsque K est abélien sur Q , en vertu d'un résultat de Leopoldt ([11], §5).

Lorsque $ru = 0$, on aimerait savoir si $s = 0$ est effectivement un pôle. Il paraît probable que ce n'est le cas que si $au = 0$, où a est le degré de $K \cap Q(\mu_p)$, cf. n° 5.5; cela résulterait en tout cas des conjectures faites dans [19], n° 3.7 et dans [4].

Lorsque $au = 0$ (ou $u = 0$, cela revient au même d'après le th.23), on peut espérer que le résidu de $\zeta_K^*(1-s, 1-u)$ en $s = 0$ est lié au régulateur p -adique de K par la même formule que dans le cas abélien ([11], loc.cit.); en outre, on devrait pouvoir remplacer le dénominateur $(1+T)^r - 1$ du th.21 par $(1+T)^{p^m} - 1$, où p^m est la plus grande puissance de p divisant le degré de $K \cap Q(\mu)$, cf. n° 5.5.

2) Généralisations

Le cas traité ici est seulement celui des fonctions zêta. Il y a certainement des résultats analogues pour les fonctions L (abéliennes d'abord, puis non abéliennes). Il devrait être possible de les démontrer en utilisant des formes modulaires p -adiques sur d'autres groupes que $SL_2(\mathbf{Z})$, cf. Katz [12]. Pour obtenir des résultats vraiment satisfaisants (et en particulier pour se débarrasser des pôles parasites, cf. ci-dessus), il sera sans doute nécessaire de travailler sur le groupe modulaire du corps K (et non plus de $\mathbf{Q}$), i.e. d'utiliser les fonctions $F_K(u, z_1, \dots, z_r)$ et non pas seulement les fonctions d'une variable obtenues en faisant $z_1 = \dots = z_r$. Le groupe $\mathbf{Z}_p^*$ (ou son sous-groupe U_1) serait remplacé par le groupe de Galois G d'une certaine extension abélienne de K (non nécessairement cyclotomique); l'espace X serait remplacé par l'espace des caractères p -adiques de G , et l'algèbre Λ par $\mathbf{Z}_p[[G]]$.

3) Relations avec la théorie d'Iwasawa

Du point de vue développé dans [10], [11], les éléments de Λ apparaissent, non pas comme des fonctions, mais comme des relations entre éléments de certains modules galoisiens. Pour un corps K abélien sur $\mathbf{Q}$, on a des relations canoniques, les "relations de Stickelberger" qui conduisent aux fonctions zêta et L p -adiques (Iwasawa [10]). Dans le cas général, on ne dispose que de relations définies à multiplication par un élément inversible près (ce qui permet de parler de leurs zéros, cf. Coates-Lichtenbaum [4]). Il est probable que ces relations (ou fonctions) sont essentiellement les mêmes que celles considérées ici; il serait intéressant de le démontrer.

4) Corps non totalement réels

Si K n'est pas totalement réel, on a $\zeta_K(1-n) = 0$ pour tout entier $n \geq 2$; ce fait pourrait laisser croire que K ne possède pas de fonction zêta p -adique "intéressante". Cependant, pour $K = \mathbf{Q}(i)$, Hurwitz [9] a défini des nombres rationnels qui jouissent de propriétés analogues à

celles des nombres de Bernoulli; les résultats de Hurwitz, ainsi que d'autres plus récents ([5], [17]), laissent penser que les nombres en question conduisent, eux aussi, à des fonctions analytiques p-adiques. Peut-être existe-t-il, plus généralement, une théorie p-adique des fonctions L à Grössencharaktere de type (A_0) , au sens de Weil [28] ?

Appendice

Séries d'Eisenstein de niveau f

Notations

On se donne un idéal $f \neq 0$ de O_K , le conducteur. On note S_f l'ensemble des diviseurs premiers de f , et l'on écrit

$$f = \prod_{p \in S_f} p^{f(p)}, \quad \text{avec } f(p) \geq 1.$$

Si $\alpha \in K^*$, on dit que α est congru à 1 $(\text{mod. } f)$, et on écrit $\alpha \equiv 1 \pmod{f}$, si $v_p(\alpha - 1) \geq f(p)$ pour tout $p \in S_f$, où v_p désigne la valuation discrète attachée à p .

Soient a et b deux idéaux fractionnaires de K , premiers à f . On dit que a et b appartiennent à la même classe $(\text{mod. } f)$ s'il existe $\alpha \in K^*$, $\alpha \gg 0$, $\alpha \equiv 1 \pmod{f}$, tel que a soit le produit de b par l'idéal principal (α) . Le groupe des classes d'idéaux $(\text{mod. } f)$ sera noté C_f ; c'est un groupe fini.

Fonction zêta d'une classe

Soit $c \in C_f$. On lui associe la fonction zêta "partielle"

$$\zeta_{K,c}(s) = \sum_{a \in c} Na^{-s},$$

où la sommation porte sur tous les idéaux de 0_K appartenant à la classe c . Cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe dans tout $\mathbf{C}$, et ses valeurs aux entiers négatifs sont des nombres rationnels (Siegel [26], p.19).

Plus généralement, soit λ une fonction sur C_f à valeurs complexes; on identifie λ de façon évidente à une fonction sur les idéaux fractionnaires premiers à f . On pose

$$\zeta_{K,\lambda}(s) = \sum_{c \in C_f} \lambda(c) \zeta_{K,c} = \sum_{(a,f)=1} \lambda(a) N a^{-s}.$$

Ici encore, cette fonction se prolonge à tout $\mathbf{C}$; ses valeurs aux entiers négatifs sont des combinaisons $\mathbf{Q}$ -linéaires des $\lambda(c)$. (Il y a parfois intérêt à considérer des fonctions λ à valeurs, non plus dans $\mathbf{C}$, mais dans une $\mathbf{Q}$ -algèbre E - par exemple un corps p -adique - et à définir $\zeta_{K,\lambda}(1-k) \in E$ comme la somme des $\lambda(c) \zeta_{K,c}(1-k)$.)

Nous dirons que λ est paire si

$$\lambda((\alpha)a) = \lambda(a) \quad \text{pour tout } a \text{ et tout } \alpha \equiv 1 \pmod{f},$$

et que λ est impaire si

$$\lambda((\alpha)a) = \text{sgn}(N\alpha) \lambda(a) \quad \text{pour tout } a \text{ et tout } \alpha \equiv 1 \pmod{f}.$$

Forme modulaire définie par une fonction λ

On se donne un entier $k > 1$, et une fonction λ sur C_f comme ci-dessus. On suppose que λ et k ont même parité; on exclut les cas $(k=1, f=0_K)$ et $(k=2, r=1, f=0_K)$, cf. [19], p.48.

On associe à k, λ la série formelle $G_{k,\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(G_{k,\lambda}) q^n$ définie par :

$$a_0(G_{k,\lambda}) = 2^{-r} \zeta_{K,\lambda}(1-k)$$

$$a_n(G_{k,\lambda}) = \sum_{x,a} \lambda(a) N a^{k-1}, \quad n > 1,$$

où la sommation porte sur les couples (x,a) tels que a soit un idéal de 0_K premier à f , $x \in d^{-1}a$, $x \gg 0$ et $\text{Tr}(x) = n$.

Soit d'autre part f le générateur > 0 de l'idéal $\mathfrak{f} \cap \mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$. Notons $\Gamma_0(f)$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telles que $\gamma \equiv 0 \pmod{f}$, et $\Gamma_1(f)$ le sous-groupe de $\Gamma_0(f)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telles que $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{f}$.

THÉORÈME 24 (Kloosterman-Siegel).

(i) La série $G_{k,\lambda}$ définie ci-dessus est une forme modulaire de poids rk sur $\Gamma_1(f)$.

(ii) Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ appartient à $\Gamma_0(f)$, on a

$$G_{k,\lambda} \Big|_{rk} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = G_{k,\lambda_\delta},$$

où λ_δ est définie par la formule $\lambda_\delta(a) = \text{sgn}(\delta)^{rk} \lambda((\delta)a)$.

Remarque

La définition de λ_δ peut aussi se présenter de la manière suivante : on a un homomorphisme naturel $\rho : (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^* \rightarrow C_f$ obtenu en associant à un élément $\xi \in (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$ l'idéal principal (x) engendré par un élément positif x de ξ . Comme δ est inversible mod. f , on peut donc parler de $\rho(\delta) \in C_f$, et la définition de λ_δ donnée ci-dessus équivaut simplement à

$$\lambda_\delta(c) = \lambda(\rho(\delta)c) \quad \text{pour tout } c \in C_f.$$

Exemples

1) Prenons $\mathfrak{f} = (1)$, $\lambda = 1$, et k pair ≥ 2 (resp. ≥ 4 si $r = 2$). La série $G_{k,\lambda}$ n'est autre que la série g_k du n° 5.2; comme $f = 1$, on en déduit que g_k est une forme modulaire sur le groupe $SL_2(\mathbf{Z})$: on retrouve le th.19.

2) Prenons $\mathfrak{f} = (p)$, $\lambda = 1$ et k pair ≥ 2 . On a $f = p$. La série $G_{k,\lambda}$ est égale à la série g'_k du n° 5.2. Comme $\lambda_\delta = \lambda$ pour tout δ premier à p , on en déduit que g'_k est une forme modulaire sur $\Gamma_0(p)$.

3) Les notations étant celles du n° 5.4, prenons $\mathfrak{f} = (p)$, et choisissons pour λ la fonction $a \rightarrow \varepsilon_K(a) = \varepsilon(Na)$; prenons $k \geq 1$ tel que

$\varepsilon(-1) = (-1)^k$, ce qui assure que k et λ ont même parité. La série $G_{k,\lambda}$ coïncide avec la série $f_{k,\varepsilon}$ introduite dans la démonstration du th.22 du n° 5.4. Comme on a $\lambda_\delta = \varepsilon(\delta)^r \lambda$, on en déduit que $f_{k,\varepsilon}$ est une forme modulaire de type (rk, ε^r) sur $\Gamma_0(p)$.

Démonstration du th.24

Je me bornerai à indiquer comment on le déduit des résultats de Siegel [26]. Choisissons des représentants $b_1, \dots, b_h$ des éléments de C_f , et posons $a_i = b_i d^{-1} f^{-1}$. A chaque a_i , Siegel attache une certaine forme modulaire $\phi_i = \phi_{a_i}$, cf. [26], p.48, formule (98). Posons :

$$\phi_\lambda = \sum_{i=1}^h \lambda(b_i) \phi_i.$$

D'après [26], p.49, ϕ_λ est une forme modulaire de poids rk sur un certain sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Son terme constant (avec les notations de [26], loc.cit.) est

$$a_0(\phi_\lambda) = \sum_i \lambda(b_i) Q_k(a_i) = \tau_{K,\lambda}(1-k), \quad \text{cf. [26], p.48 et 19.}$$

D'autre part, un calcul sans grande difficulté, basé sur les formules (101) de [26], p.48, montre que l'on a

$$a_n(\phi_\lambda) = 2^r a_n(G_{k,\lambda}) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On en déduit que $G_{k,\lambda} = 2^{-r} \phi_\lambda$.

Si maintenant $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est un élément de $\Gamma_0(f)$, on vérifie facilement que $\phi_{\delta a} | M = \text{sgn}(\delta)^{rk} \phi_a$. Or, on peut écrire

$$\phi_\lambda = \sum_i \lambda(\delta b_i) \phi_{\delta a_i},$$

puisque les δb_i sont des représentants de C_f . On en déduit :

$$\phi_\lambda | M = \text{sgn}(\delta)^{rk} \sum_i \lambda(\delta b_i) \phi_{a_i} = \phi_{\lambda_\delta}, \quad \text{ce qui établit (i) et (ii).}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y.AMICE - Interpolation p-adique, Bull.Soc.math.France, 92, 1964, p.117-160.
- [2] A.O.L.ATKIN - Congruences for modular forms, Computers in math. research (R.F.Churchhouse et J-C.Herz ed.), p.8-19, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [3] A.O.L.ATKIN et J.LEHNER - Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math.Ann., 185, 1970, p.134-160.
- [4] J.COATES et S.LICHTENBAUM - On ℓ -adic zeta functions, à paraître aux Ann. of Math.
- [5] R.M.DAMERELL - L-functions of elliptic curves with complex multiplication I, Acta Arith., 17, 1970, p.287-301.
- [6] B.DWORK - p-adic cycles, Publ.Math.I.H.E.S., 37, 1969, p.27-115.
- [7] J.FRESNEL - Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques, Ann. Inst.Fourier, 17, 1967, p.281-333.
- [8] E.HECKE - Mathematische Werke, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1959 (zw.Aufl. 1970).
- [9] A.HURWITZ - Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen, Math.Ann., 51, 1899, p.196-226 (Math.Werke, II, p.342-373).
- [10] K.IWASAWA - On p-adic L functions, Ann.of Math., 89, 1969, p.198-205.
- [11] K.IWASAWA - Lectures on p-adic L functions, Ann.Math.Studies 74, Princeton Univ.Press, 1972.
- [12] N.KATZ - p-adic properties of modular schemes and modular forms, ce volume.
- [13] H.KLINGEN - Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion, Math. Ann., 145, 1962, p.265-272.
- [14] H.D.KLOOSTERMAN - Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen, Abh.Math.Sem. Hamb., 6, 1928, p.163-188.

- [15] M.KOIKE - Congruences between modular forms and functions and applications to a conjecture of Atkin, à paraître.
- [16] T.KUBOTA et H.W.LEOPOLDT - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J.Crelle, 214-215, 1964, p.328-339.
- [17] H.LANG - Kummersche Kongruenzen für die normierten Entwicklungskoeffizienten der Weierstrass'schen p -Funktion, Abh.Math.Sem.Hamburg., 33, 1969, p.183-196.
- [18] H.W.LEOPOLDT - Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen, Abh.Math.Sem.Hamburg., 22, 1958, p.131-140.
- [19] J-P.SERRE - Cohomologie des groupes discrets, Ann.Math.Studies 70, p.77-169, Princeton Univ.Press, 1971.
- [20] J-P.SERRE - Congruences et formes modulaires (d'après H.P.F. Swinnerton-Dyer), Sémin.Bourbaki, 1971/72, exposé 416.
- [21] J-P.SERRE - Résumé des cours 1971/72, Annuaire du Collège de France, 1972/73, Paris, p.55-60.
- [22] G.SHIMURA - Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton, 1971.
- [23] K.SHIRATANI - Kummer's congruence for generalized Bernoulli numbers and its application, Mem.Kyushu Univ., 26, 1972, p.119-138.
- [24] C.L.SIEGEL - Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III, Ann.of Math., 38, 1937, p.212-291 (Gesam.Abh. I, p.469-548).
- [25] C.L.SIEGEL - Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen, Gött.Nach., 10, 1969, p.87-102.
- [26] C.L.SIEGEL - Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Gött.Nach., 3, 1970, p.15-56.
- [27] H.P.F.SWINNERTON-DYER - On ℓ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms, ce volume.
- [28] A.WEIL - On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number field, Proc.Int.Symp. Tokyo-Nikko, 1955, p.1-7.