

ОБ АДДИТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ЧИСЕЛ¹⁾.

Л. Г. Шнирельман.

Назовем последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ последовательностью плотности больше α ($\alpha > 0$), если нижний предел отношения $\frac{k}{n_k}$ больше α .

Первая основная лемма. Какова бы ни была последовательность $n_1, n_2, \dots$ плотности, большей $\alpha > 0$, можно разложить всякое число x на сумму $2\left[\frac{1}{\alpha}\right]$ членов этой последовательности, с точностью до слагаемого, не превосходящего фиксированной константы A (не зависящей от разлагаемого x , а только от последовательности $n_1, n_2, \dots$).

Обозначим через $N(x)$ число членов последовательности $n_1, n_2, \dots$, не превосходящих x .

Если $N(x) > \frac{x}{2}$, то число x , очевидно, разлагается на сумму двух членов последовательности. В самом деле, рассмотрим последовательность $x - n_1, x - n_2, \dots, x - n_k, \dots$; число членов этой последовательности, не превосходящих x , таково же, как и предыдущей, т. е. больше $\frac{x}{2}$. Поэтому существует такой член n_i первой последовательности, который равен некоторому члену $x - n_j$ второй последовательности. Отсюда выводим: $x = n_i + n_j$.

Пусть $N(x) \leq \frac{x}{2}$. Если плотность последовательности превосходит $\alpha > 0$, то существует число p , обладающее следующим свойством: каково бы ни было $m \geq p$, имеет место соотношение $N(m) \geq (\alpha - \sigma)m$ (σ есть как угодно малое положительное число).

Предположим, что $x \geq p$.

Рассмотрим сумму $R(x)$ всех разностей $n_{i+1} - n_i$, которые больше, чем p , при $n_i < n_{i+1} \leq x$.

Возможны два случая: 1) $R(x) \leq \frac{1}{2}x$, 2) $R(x) > \frac{1}{2}x$.

В первом случае количество всех целых чисел, отличающихся от членов последовательности $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ не более чем на $\frac{1}{2}(p+1)$, больше чем $\frac{1}{2}x$. Поэтому можно разложить x на сумму двух членов последовательности $n_1, n_2, \dots$ и одного слагаемого, не превосходящего $p+1$.

¹⁾ Впервые опубликовано в „Известиях Донского Политехнического Института в Новочеркасске“, т. XIV (1930), стр. 3—27.

Во втором случае введем между каждыми двумя последовательными членами n_i и n_{i+1} нашей последовательности такими, что $n_{i+1} - n_i > p$, следующий ряд чисел: $n_i + n_1, n_i + n_2, \dots, n_i + n_j$ (до наибольшего $n_i + n_j$, не превосходящего n_{i+1}). В силу свойств числа p мы получаем $j \geq (\alpha - \sigma)(n_{i+1} - n_i)$. Общее число введенных членов превосходит $(\alpha - \sigma) \sum (n_{i+1} - n_i) = (\alpha - \sigma) R(x) \geq \frac{1}{2} (\alpha - \sigma) x$. Обозначим члены новой последовательности через $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$. Эта последовательность содержит более чем $(\alpha - \sigma)x + \frac{\alpha - \sigma}{2}x$ членов, не превосходящих x . Если это число больше, чем $\frac{x}{2}$, то x может быть разложено на сумму двух членов новой последовательности, т. е. четырех членов первоначальной. В противном случае повторим предыдущее рассуждение применительно к новой последовательности $m_1, m_2, \dots$.

Образуем снова сумму $R_1(x)$ всех разностей $m_{i+1} - m_i$, не превосходящих p ; опять возможны два случая: $R_1(x) \leq \frac{x}{2}$ и $R_1(x) > \frac{x}{2}$. В первом случае можно разложить x на сумму двух членов последовательности $m_1, m_2, \dots$, т. е. четырех членов первоначальной последовательности, во втором случае, или число x разлагается на сумму восьми членов первоначальной последовательности, или можно снова повторить предыдущий процесс.

Продолжая это рассуждение, мы докажем, что или число x разлагается на сумму k членов первоначальной последовательности и слагаемого, не превосходящего $p+1$, или возможно построить последовательность, состоящую из $(k+1)$ -кратных сумм членов первоначальной последовательности и притом такую, что количество членов этой новой последовательности, не превосходящих x , больше чем $(\alpha - \sigma)x + \frac{k}{2}(\alpha - \sigma)x = \frac{k+2}{2}(\alpha - \sigma)x$. Когда $\frac{k+2}{2}(\alpha - \sigma)$ превзойдет $\frac{1}{2}$, т. е. $k \geq \left[\frac{1}{\alpha - \sigma} \right] - 1$, то наш процесс заканчивается, так как в последней последовательности число членов ее, не превосходящих x , больше $\frac{1}{2}x$. Таким образом x разложится на сумму не более чем $2 \left[\frac{1}{\alpha - \sigma} \right]$ членов первоначальной последовательности и на слагаемое, не превосходящее $p+1$. Это доказывает лемму при $A = p+1$ (так как при достаточно малом $\sigma > 0$ $\left[\frac{1}{\alpha - \sigma} \right] = \left[\frac{1}{\alpha} \right]$).

Лемма вторая. Рассмотрим последовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, где $n_j < Cj^\varphi(j)$ ($\varphi(j)$ есть возрастающая функция от j , такая, что $\varphi(j) = o(\sqrt{j})$).

Обозначим через $A(u, x)$ число решений уравнения $n_j - n_i = u$, где $n_i < n_j \leq x$, и через $T(x, s)$ сумму $\sum_{u=1}^s A^2(u, x)$.

Если при любом $x > 0$ $T(x, s) < ks \frac{x^2}{\varphi^4(x)}$, то всякое число x разлагается на сумму ограниченного числа L членов последовательности $n_1, n_2, \dots$ и одного слагаемого, не превосходящего A . L и A не зависят от разлагаемого числа x , а только от последовательности $n_1, n_2, \dots$.

Доказательство. Образует таблицу с двойным входом

$n_1,$	$n_2,$	$\dots,$	n_k
$2n_1,$	$n_1 + n_2,$	$\dots,$	$n_1 + n_k$
$n_2 + n_1,$	$2n_2,$	$\dots,$	$n_2 + n_k$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$n_l + n_1,$	$n_l + n_2,$	$\dots,$	$n_l + n_k$

и оценим количество различных членов этой таблицы, не превосходящих x .

Пусть $n_k \leq x < n_{k+1}$. Первая строка таблицы содержит более чем $\frac{x}{C\varphi(x)}$ членов, вторая — более чем $\frac{x-n_1}{C\varphi(x-n_1)} - A(n, x)$ новых членов, третья — более чем $\frac{x-n_2}{C\varphi(x-n_2)} - A(n_2, x) - A(n_2-n_1, x)$ членов, не принадлежащих первым двум строкам, и т. д.

Вся таблица содержит $M(x)$ различных членов, где

$$\begin{aligned} M(x) &\geq \frac{x}{C\varphi(x)} + \frac{x-n_1}{C\varphi(x-n_1)} - A(n_1, x) + \\ &+ \frac{x-n_2}{C\varphi(x-n_2)} - A(n_2, x) - A(n_2-n_1, x) + \dots + \\ &+ \frac{x-n_l}{C\varphi(x-n_l)} - A(n_l, x) - A(n_l-n_1, x) - \dots - A(n_l-n_{l-1}, x) = \\ &= \frac{1}{C} \sum_{j=1}^l \frac{x-n_j}{\varphi(x-n_j)} - \sum_{u=1}^n A(u, x) A(u, n_l), \end{aligned}$$

так как каждое $A(u, x)$ встречается столько раз, сколькими способами число u может быть представлено в виде разности $n_j - n_i$, где $n_i < n_j \leq n_l$, т. е. $A(u, n_l)$ раз.

На основании теоремы Шварца имеем

$$\begin{aligned} M(x) &\geq \frac{1}{C} \sum_{j=1}^l \frac{x-n_j}{\varphi(x-n_j)} - \sqrt{\sum_{u=1}^{n_l} A^2(u, x) \sum_{u=1}^{n_l} A^2(u, n_l)} = \\ &= \frac{1}{C} \sum_{j=1}^l \frac{x-n_j}{\varphi(x-n_j)} - \sqrt{T(x, n_l) T(n_l, n_l)}. \end{aligned}$$

Выберем $l = \alpha\varphi(x)$ (α есть вещественное число, большее 0).

Мы имеем $n_l < C\alpha\varphi(x)\varphi[\alpha\varphi(x)]$. Так как $\varphi(x) = o(\sqrt{x})$, то $\frac{x-n_j}{\varphi(x-n_j)} > (1-\eta) \frac{x}{\varphi(x)}$ (где η как угодно мало, x достаточно велико).

Вставляя эти выражения в предыдущее неравенство, получаем, на основании условия леммы,

$$\begin{aligned} M(x) &\geq \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - \sqrt{\frac{kn_l x^2}{\varphi^4(x)} \frac{kn_l n_l^2}{\varphi^4(n_l)}} = \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - k \frac{xn_l^2}{\varphi^2(x) \varphi^2(n_l)} = \\ &= \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - kx \frac{\{C\alpha\varphi(x)\varphi[\alpha\varphi(x)]\}^2}{\varphi^2(x) \varphi^2\{C\alpha\varphi(x)\varphi[\alpha\varphi(x)]\}} \geq \\ &\geq \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - \alpha^2 C^2 kx \frac{\{\varphi[\alpha\varphi(x)]\}^2}{\{\varphi[\alpha\varphi(x)]\}^2} = \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - \alpha^2 C^2 kx \end{aligned}$$

(ибо при достаточно большом x $\varphi\{\alpha\varphi(x)\varphi[\alpha\varphi(x)]\} > \varphi[\alpha\varphi(x)]$).

Выбирая $\alpha = \frac{1-\eta}{2kC^3}$, получаем $M(x) > \frac{(1-\eta)^2}{4kC^4} x$, т. е. при достаточно большом x таблица содержит больше чем $\frac{(1-\eta)^2}{4kC^4} x$ членов, не превосходящих x .

Располагая члены таблицы в порядке возрастания, мы получаем последовательность, плотность которой не меньше чем $\frac{(1-\eta)^2}{4kC^4}$.

Лемма вторая есть, таким образом, следствие первой леммы.

Лемма третья. Для последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ имеют место соотношения: $\varphi(x) = \ln x$, $C = 1 + \varepsilon$ и $A(u, x) < \frac{100x}{\ln^2 x} S(u)$, $S(u) = \prod \left(\frac{p_i - 1}{p_i - 2} \right)$, где произведение распространено на все различные нечетные простые делители p_i числа u (ε как угодно мало).

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству формулы $Z(x) < \frac{100x}{\ln^2 x}$, данному Viggo Brun'ом, где $Z(x)$ есть число простых близнецов, не превосходящих x .

Лемма четвертая. Положим $S(u) = \prod \left(\frac{p_i - 1}{p_i - 2} \right)$, как в лемме 3.

Мы имеем $\sum_{u=1}^r S^2(u) < kr$, где k есть постоянная.

Доказательство. Рассмотрим произведение $P(u) = \prod \left(1 + \frac{1}{p_i} \right)$, распространенное на все различные нечетные простые множители p_i числа u .

Имеем

$$\frac{S(u)}{P(u)} = \prod \frac{p-1}{p-2} \frac{p}{p+1} = \prod \frac{p^2-p}{p^2-p-2} = \prod \left(1 + \frac{2}{p^2-p-2} \right) < \prod_{p=3}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{p^2-p-2} \right) = k_1,$$

где k_1 — постоянная. Следовательно,

$$\sum_{u=1}^r S^2(u) < k_1^2 \sum_{u=1}^r P^2(u).$$

Мы имеем $P(u) = \sum \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_j}}$, p_{i_j} суть простые делители числа u .

Далее, $P^2(u) = \sum \frac{2^{\mu}}{p_{i_1} \dots p_{i_{\mu}} p_{i_{\mu+1}}^2 \dots p_{i_{\nu}}^2}$, так как число способов, коими можно разложить произведение $p_{i_1} \dots p_{i_{\mu}} p_{i_{\mu+1}}^2 \dots p_{i_{\nu}}^2$ на произведения вида $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_j}$, есть 2^{μ} . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^r P^2(u) &= \sum 2^{\mu} \left[\frac{r}{p_{i_1} \dots p_{i_{\mu}} p_{i_{\mu+1}}^2 \dots p_{i_{\nu}}^2} \right] < \sum \frac{2^{\mu} r}{p_{i_1}^2 \dots p_{i_{\mu}}^2 p_{i_{\mu+1}}^3 \dots p_{i_{\nu}}^3} < \\ &< \sum \frac{2^{\mu} r}{p_{i_1}^{\frac{3}{2}} \dots p_{i_{\mu}}^{\frac{3}{2}} p_{i_{\mu+1}}^3 \dots p_{i_{\nu}}^3} < r \prod_{u=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_u^{\frac{3}{2}}} \right) = k_2 r. \end{aligned}$$

(Последнее произведение распространено на все простые числа i , очевидно, сходится.)

Получаем окончательно

$$\sum_{u=1}^r S_2(u) < (k_1 k_2)^2 r = kr \quad (k = k_1^2 k_2^2).$$

Из предшествующих лемм вытекают следующие предложения:

Теорема 1. *Всякое целое число x может быть разложено на сумму ограниченного числа L простых чисел, где L не зависит от x .*

Справедливость этой теоремы вытекает из третьей и четвертой лемм.

Теорема 2. *Какова бы ни была подпоследовательность $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}, \dots$ простых чисел положительной относительной плотности (т. е. такая, что отношение $\frac{p_k}{p_{i_k}}$ больше $\alpha > 0$), всякое число x может быть разложено на ограниченное число L членов этой подпоследовательности и на слагаемое, не превосходящее фиксированной величины A (L и A не зависят от x).*

Справедливость этой теоремы вытекает из тех же лемм, что и предыдущей.

Следствие. В частности, можно разложить x на сумму ограниченного числа L простых чисел, заключенных в арифметической прогрессии $at + b$ (a и b взаимно простые), и слагаемого, не превосходящего A (L и A не зависят от x).

Теорема. *Всякое число $x > 0$ можно разложить на 26 множителей вида n^n (n — целое) с относительной точностью до ограниченного фактора x_0 ($1 \leq x_0 < A$, где A не зависит от разлагаемого числа).*

Доказательство. Оценим число решений уравнения $[n \ln n] - [m \ln m] = u$, где u — некоторое целое число, удовлетворяющее неравенству $\ln^3 x \leq u \leq \ln^4 x$, а n и m удовлетворяют неравенствам $m \ln m < n \ln n \leq x$. Число решений рассматриваемого уравнения не превосходит числа решений неравенства $u - 1 < k \ln n + m \ln \left(1 + \frac{k}{m}\right) < u + 1$.

Число тех из решений этого неравенства, для которых $n < x^{1-\varepsilon}$, не более чем $x^{1-\varepsilon}$, ввиду того, что каждому значению n отвечает не более одного решения уравнения $[n \ln n] - [m \ln m] = u$.

Рассмотрим поэтому, сколько имеется решений, для которых $n > x^{1-\varepsilon}$. Ввиду $k < u$ и $u < \ln^4 x$, $k = o(m)$ [ибо $k = o(x^{1-\varepsilon})$].

Поэтому можно рассмотреть число решений неравенства $u - 1 < k \ln n + k < u + 1$, т. е. при данном k : $\frac{u-1}{k} < \ln n + 1 < \frac{u+1}{k}$.

Число различных значений n не более чем

$$e^{\frac{u+1}{k}-1} - e^{\frac{u-1}{k}-1} = e^{\frac{u-1}{k}-1} (e^{\frac{2}{k}} - 1) < \frac{2+\Theta}{k} e^{\frac{u-1}{k}-1}.$$

Θ сколь угодно мало при больших x ввиду $x^{1-\varepsilon} < n$, а следовательно,

$$k > \frac{u-1}{\ln n} > \frac{\ln^3 x}{\ln x} = \ln^2 x.$$

Число всех возможных решений (при различных значениях k) не более чем

$$\sum_{\frac{u}{\ln x} < k < \frac{(1+\varepsilon)u}{\ln x}} \frac{2}{k} e^{\frac{u-1}{k}-1} = \sum_{v=1}^{\varepsilon \ln x} \sum_{t=\frac{u}{\ln x}+v}^{\frac{u}{\ln x}+(v+1)\frac{u}{\ln^2 x}} \frac{2+\Theta}{t} e^{\frac{u-1}{t}-1}.$$

Имеем

$$e^{\frac{u-1}{k+\frac{u}{\ln^2 x}}} = e^{\frac{u-1}{k}} e^{-\left(\frac{u-1}{k} - \frac{u-1}{k+\frac{u}{\ln^2 x}}\right)} < e^{\frac{u-1}{k}} e^{-(u-1)\frac{\frac{u}{\ln^2 x}}{(1+\varepsilon)^2 \frac{u^2}{\ln^2 x}}} < e^{\frac{u-1}{k}} e^{-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}.$$

Имеем $\frac{u-1}{k} - 1 < \ln n$, $n \ln n < x$; отсюда

$$e^{\frac{u-1}{k}-1} < \frac{x}{\ln x - \ln \ln x} < \frac{x}{\ln x} (1 + \varepsilon).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\alpha \ln x} \sum_{t=\frac{u}{\ln x}+v}^{\frac{u}{\ln x}+(v+1)\frac{u}{\ln^2 x}} \frac{2+\Theta}{t} e^{\frac{u-1}{t}-1} &< \max \frac{2+\Theta}{k} \max e^{\frac{u-1}{k}-1} \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\frac{v}{(1+\varepsilon)^2}} \frac{u}{\ln^2 x} \leq \\ &\leq \frac{(2+\Theta)(1+\varepsilon)}{\frac{u}{\ln x}} \frac{x}{\ln x} \frac{u}{\ln^2 x} \frac{1}{1-\frac{1}{e^{\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}}} = \frac{(2+\Theta)e^{\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}(1+\varepsilon)}{e^{\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}-1} \frac{x}{\ln^2 x} < 3,2 \frac{x}{\ln^2 x} \end{aligned}$$

(при достаточно малых ε и Θ).

Рассмотрим последовательность

$$p_1 = 1 \ln 1 = 0, \quad p_2 = 2 \ln 2, \quad \dots, \quad p_k = k \ln k, \quad \dots$$

и выберем из нее ряд членов $q_1 = k_1 \ln k_1$ порядка $\ln^3 x$, т. е. $k_1 = \left\lfloor \frac{\ln^3 x}{3 \ln \ln x} \right\rfloor$, и аналогично $q_2 = k_2 \ln k_2 \sim 2 \ln^3 x$, $q_3 = k_3 \ln k_3 \sim 3 \ln^3 x$, ... и т. д., до $q_{\alpha \ln x} = k_{\alpha \ln x} \ln k_{\alpha \ln x} \sim \alpha \ln^4 x$.

Образует таблицу

$$\begin{array}{cccc} p_1, & p_2, & \dots, & p_t \\ p_1 + q_1, & p_2 + q_1, & \dots, & p_t + q_1 \\ p_1 + q_2, & p_2 + q_2, & \dots, & p_t + q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 + q_{\alpha \ln x}, & p_2 + q_{\alpha \ln x}, & \dots, & p_t + q_{\alpha \ln x}, \end{array}$$

где $p_t \leq x < p_{t+1}$. Число различных членов этой таблицы не менее чем

$$\begin{aligned} \frac{x}{\ln x} + \left[\frac{x}{\ln x} - A(q_1, x) \right] + \left[\frac{x}{\ln x} - A(q_2, x) - A(q_2 - q_1, x) \right] + \dots \\ \dots + \left[\frac{x}{\ln x} - A(q_j, x) - \dots - A(q_j - q_{j-1}, x) \right] + \dots \end{aligned}$$

В данном случае все разности $q_i - q_j$ заключены между $\ln^3 x$ и $\ln^4 x$. Поэтому все $A(q_i - q_j, x) < 3,2 \frac{x}{\ln^2 x}$, и число различных членов таблицы не менее чем

$$\alpha \frac{x}{\ln x} \ln x - 3,2 x \frac{x}{\ln x} \sum_{n=1}^{\alpha \ln x} n = \alpha x - 3,2 \frac{\alpha^2 \ln^2 x}{2 \ln^2 x} x = x(\alpha - 1,6\alpha^2).$$

Полагая $\alpha = \frac{1}{3,2}$, имеем $x(\alpha - 1,6\alpha^2) = \frac{x}{6,4}$. Таким образом, если расположить таблицу в ряд по возрастающим величинам, то число членов этого ряда до x (при достаточно большом x) не менее $\frac{x}{6,4}$. Плотность этой последовательности не менее $\frac{1}{6,4}$. Отсюда следует возможность разложения всякого числа с точностью до ограниченной величины на сумму 13 членов ряда сумм $p_i + p_j$, а следовательно, 26 членов ряда $p_1 = 0, p_2 = 2 \ln 2, \dots, p_n = n \ln n, \dots$

Для доказательства теоремы достаточно представить $\ln x$ в виде суммы

$$n_1 \ln n_1 + n_2 \ln n_2 + \dots + n_{26} \ln n_{26} + \ln x_0,$$

где

$$0 \leq \ln x_0 < \ln A \quad (A \text{ — абсолютная константа}).$$

$$\text{Отсюда } x = x_0 n_1^{n_1} n_2^{n_2} \dots n_{26}^{n_{26}}.$$

Точно так же можно представить всякое число $x > 0$ в виде

$$x = x_0 n_1! n_2! \dots n_{26}!.$$

Вторая основная лемма. Пусть дана последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$

Обозначим через $f_x(t)$ сумму

$$e^{2\pi i n_1 t} + e^{2\pi i n_2 t} + \dots + e^{2\pi i n_k t},$$

где $n_k \leq x < n_{k+1}$.

Если при любом $x > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_x(t)|^{2u} dt < C \frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{x}, \quad (1)$$

где C — постоянная, не зависящая от x , а $N(z)$ — число членов ряда $n_1, n_2, \dots$ не превосходящих z , то всякое число $x > 0$ разлагается на сумму ограниченного (не зависящего от x) числа членов ряда $n_1, n_2, \dots$ с точностью до ограниченного ($< A$) по величине слагаемого (A не зависит от x).

Доказательство.

$$f_x(t) = \sum_{j=1}^k \cos 2\pi n_j t + i \sum_{j=1}^k \sin 2\pi n_j t,$$

$$[f_x(t)]^u = A_0 + A_1 e^{2\pi i t} + A_2 e^{2\pi i \cdot 2t} + \dots + A_{un_k} e^{2\pi i un_k t},$$

где A_j есть число разложений j на u слагаемых, членов ряда $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ не превосходящих x .

Имеем

$$\begin{aligned} |f_x(t)|^{2u} &= \left(\sum_{j=1}^{un_k} A_j \cos 2\pi j t \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{un_k} A_j \sin 2\pi j t \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2 + \sum_{j=1}^{un_k} \sum_{k=1}^{un_k} 2A_j A_k \cos 2\pi t(j-k), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_x(t)|^{2u} dt &= \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{j=1}^x A_j^2 \leq \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2 < C \frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{x}$$

(по условию леммы). Далее,

$$\sum_{j=1}^x A_j \geq \sum_{j=1}^x A_j^1 = \left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^u,$$

где A_j^1 суть числа разложений числа j на сумму u членов ряда $n_1, n_2, \dots$, не превосходящих $\frac{x}{u}$.

Обозначим через $\mu(x)$ число A_j , не равных нулю, где $j \leq x$. Тогда

$$\sum_{j=1}^x A_j < \sqrt{\mu(x)} \sqrt{\sum_{j=1}^x A_j^2}.$$

т. е.

$$\left(\sum_{j=1}^x A_j\right)^2 < \mu(x) \sum_{j=1}^x A_j^2,$$

откуда

$$\mu(x) > \frac{\left(\sum_{j=1}^x A_j\right)^2}{\sum_{j=1}^x A_j^2} > \frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{C \frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{x}} = \frac{x}{C},$$

т. е. $\mu(x) > \frac{x}{C}$ при любом x .

Мы получили, что число членов ряда, образованного из u -кратных сумм членов ряда $n_1, n_2, \dots$, не превосходящих x , превосходит $\frac{x}{C}$ (при любом x). Следовательно, этот последний ряд имеет положительную плотность $\geq \frac{1}{C}$.

Справедливость основной второй леммы вытекает, таким образом, из основной первой леммы.

Следствие. Условие (1) в формулировке основной второй леммы можно заменить условием

$$\frac{1}{x} \sum_{a=0}^{x-1} \left| f_x\left(\frac{a}{x}\right) \right|^{2u} < C \frac{N^{2u}\left(\frac{x}{u}\right)}{x}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{x} \sum_{a=0}^{x-1} \left| f_x\left(\frac{a}{x}\right) \right|^{2u} = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{un_k} \sum_{k=1}^{un_k} A_k A_j \left(\sum_{a=0}^{x-1} \cos 2\pi \frac{a}{x} (j-k) \right).$$

Но

$$\frac{1}{x} \sum_{a=0}^{x-1} \cos 2\pi \frac{a}{x} (j-k) = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

смотря по тому, делится ли $j-k$ на x или не делится.

Мы имеем поэтому

$$\frac{1}{x} \sum_{a=0}^{x-1} \left| f_x \left(\frac{a}{x} \right) \right|^{2u} > \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_x(t)|^{2u} dt.$$

Лемма v. d. Corput'a. Пусть $g(v)$ — функция вещественного переменного v .

Если $\Theta \leq g(v+1) - g(v) \leq \pi$ и $g(v+1) - 2g(v) + g(v-1) > 0$, то

$$\left| \sum_{v=1}^n e^{g(v)i} \right| < \frac{1}{\Theta} + C \quad (C — абсолютная константа).$$

Доказательство.

$$e^{g(v)i} = \frac{e^{g(v+1)i} - e^{g(v)i}}{[g(v+1) - g(v)]i} \cdot \frac{[g(v+1) - g(v)]i}{e^{[g(v+1) - g(v)]i} - 1}.$$

Функция $\frac{z}{e^z - 1}$ голоморфна внутри круга радиуса 2π . Последний множитель разлагается внутри круга радиуса 2π в сходящийся степенной ряд по степеням $(v+1) - g(v)]i$, т. е.

$$\begin{aligned} e^{g(v)i} &= \frac{e^{g(v+1)i} - e^{g(v)i}}{[g(v+1) - g(v)]i} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \{i[g(v+1) - g(v)]\}^k = \\ &= \frac{e^{g(v+1)i} - e^{g(v)i}}{i[g(v+1) - g(v)]} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (e^{g(v+1)i} - e^{g(v)i}) [g(v+1) - g(v)]^{k-1} i^{k-1}. \end{aligned}$$

Согласно второй теореме о среднем, ввиду неравенств

$$\frac{1}{g(v+2) - g(v+1)} - \frac{1}{g(v+1) - g(v)} = \frac{2g(v+1) - g(v) - g(v+2)}{[g(v+2) - g(v+1)][g(v+1) - g(v)]} < 0,$$

$$[g(v+2) - g(v+1)]^k - [g(v+1) - g(v)]^k > 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v=1}^n \frac{e^{ig(v+1)} - e^{ig(v)}}{i[g(v+1) - g(v)]} \right| &< \max \frac{1}{g(v+1) - g(v)} = \frac{1}{\Theta}, \\ \left| \sum_{v=1}^n (e^{ig(v+1)} - e^{ig(v)}) [g(v+1) - g(v)]^{k-1} i^{k-1} \right| &< \\ &< \max |g(v+1) - g(v)|^{k-1} < \pi^{k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{v=1}^n e^{g(v)i} < \frac{1}{\Theta} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \pi^{k-1} = \frac{1}{\Theta} + C,$$

так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| z^k$ сходится внутри круга радиуса 2π .

Лемма Weyl'a. Положим $p(n) = \gamma n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \dots$ есть полином p -й степени по n со старшим коэффициентом γ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum(n, p, \gamma) \right|^{2p-1} &= |e^{p(1)2\pi i} + e^{p(2)2\pi i} + \dots + e^{p(n)2\pi i}|^{2p-1} < \\ &< 4^{2p-1} \left(n^{2p-1} + n^{2p-1-p} \sum_{1 \leq h_i \leq n} \frac{1}{\{p! h_1 \dots h_{p-1}\}} \right), \end{aligned}$$

где символ $\frac{1}{\{a\}}$ означает наименьшую из величин: n или обратная величина разности между a и ближайшим целым числом.

Доказательство. При $p=1$ имеем

$$\left| \sum_{i=1}^n e^{p(i)2\pi i} \right| = \left| \frac{e^{\gamma(n+1)2\pi i} - 1}{e^{\gamma 2\pi i} - 1} \right| < \left| \frac{1}{\sin \gamma \pi} \right| < \frac{1}{\{\gamma\}},$$

т. е. для $p=1$ лемма верна.

Пусть она проверена для полинома $(p-1)$ -й степени.

Применяя теорему Шварца, получаем

$$\begin{aligned} |\Sigma^2(n, p, \gamma)|^{2^{p-2}} &= \left| \sum_{j, k=1, \dots, n} e^{2\pi i[p(j)-p(k)]} \right|^{2^{p-2}} = \\ &= \left| \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i[p\gamma k^{p-1}h + \dots]} \right|^{2^{p-2}} < \\ &< \left(\sum_{h=-n+1}^{n-1} \left| \sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i(p\gamma h k^{p-1} + \dots)} \right| \right)^{2^{p-2}} < \\ &< (V 2n)^{2^{p-2}} \left(\sqrt{\sum_{h=-n+1}^{n-1} \left| \sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i(p\gamma h k^{p-1} + \dots)} \right|^2} \right)^{2^{p-2}} < \\ &< (2n)^{2^{p-3}} (2n)^{2^{p-2}} \left(\sum_{h=-n+1}^{n-1} \left| \sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i(p\gamma h k^{p-1} + \dots)} \right|^4 \right)^{2^{p-3}} < \dots \end{aligned}$$

Продолжая применять теорему Шварца, получаем

$$|\Sigma(n, p, \gamma)|^{2^{p-1}} < (2n)^{2^{p-3} + 2^{p-4} + \dots + 1} \sum_{h=-n+1}^{n-1} \left| \sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i(p\gamma h k^{p-1} + \dots)} \right|^{2^{p-2}}.$$

Предположив лемму доказанной для полинома $(p-1)$ -й степени, получаем

$$\begin{aligned} |\Sigma(n, p, \gamma)|^{2^{p-1}} &< \\ &< (2n)^{2^{p-2}-1} \left\{ 2n 4^{2^{p-2}} n^{2^{p-2}-1} + n^{2^{p-2}-p+1} \sum_{-n \leq h_i < n} \frac{1}{\{p\gamma h_{p-1} h_1 \dots h_{p-2} (p-1)!\}} \right\} < \\ &< 2^{2^{p-2}-1+1} 4^{2^{p-2}p} \left\{ n^{2^{p-1}-1} + n^{2^{p-1}-p} \sum_{-n \leq h_i < n} \frac{1}{\{p! \gamma h_1 \dots h_{p-1}\}} \right\} < \\ &< 4^{2^{p-1}} \left\{ n^{2^{p-1}-1} + n^{2^{p-1}-p} \sum_{1 \leq h_i \leq n} \frac{1}{\{p! \gamma h_1 \dots h_{p-1}\}} \right\}. \end{aligned}$$

Применение к доказательству обобщенной теоремы Варинга.

Теорема. Пусть последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, n_3, \dots$ имеет плотность, большую $\alpha > 0$.

Всякое число $x > 0$ можно разложить с точностью до ограниченного слагаемого на сумму ограниченного числа p -х степеней членов этого ряда.

Доказательство этой теоремы достигается соединением метода И. М. Виноградова с применением второй основной леммы настоящей работы.

Оценка суммы $\sum_{n=1}^{\frac{1}{x^p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}$.

1-й случай: $a < \frac{x^p}{3p}$. Положим $g(n) = \frac{2\pi a}{x} n^p$,

$$g(n+1) - g(n) = \frac{2\pi a}{x} [(n+1)^p - n^p] < \frac{2\pi a p}{x} (n+1)^{p-1} < \pi$$

(если $\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1} < 1$). Разобьем $\sum_{n=1}^{\frac{1}{x^p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}$ на две части:

$$\Sigma' = \sum_1^{\frac{1}{x^p/a^{\frac{1}{p}}}} \quad \text{и} \quad \Sigma'' = \sum_{\frac{1}{x^p/a^{\frac{1}{p}}}}^{\frac{1}{x^p}}.$$

Имеем $\Sigma' < \frac{\frac{1}{x^p}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{p}}}}$, а во второй сумме

$$g(n+1) - g(n) > \frac{2\pi a p}{x} \frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{p}}}} = 2\pi p \frac{a^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

В силу леммы v. d. Cornut'a

$$\Sigma'' < \frac{\frac{1}{x^p}}{\frac{1}{2p\pi a^{\frac{1}{p}}}} + C,$$

и вся сумма

$$\sum_1^{\frac{1}{x^p}} < \frac{\frac{1}{x^p}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{p}}}}.$$

2-й случай: $a \geq \frac{x^p}{3p}$. Всегда можно выбрать дробь $\frac{q}{y}$ (q и y взаимно

простые) так, чтобы $\frac{a}{x} - \frac{q}{y} = \frac{a'}{xy}$, где $|a'| < \frac{x^p}{2p!}$, причем

$$y < 2p! x^{\frac{p-1}{p}}.$$

1-я оценка (при $y \leq x^{\frac{1}{2p}}$).

Разобьем сумму $\sum_{u=1}^{\frac{1}{x^p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}$ на ряд сумм:

$$\Sigma = \sum_{\rho=0}^{y-1} \sum_{\rho}^{\frac{1}{x^p - \rho}} e^{2\pi i \frac{a}{x} (\rho + u'y)^p}.$$

Рассмотрим одну из этих сумм Σ_ρ :

$$\begin{aligned}\Sigma_\rho &= \sum_{u'=0}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}-\rho}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} (\rho + u'y)^p} = \sum_{u'=0}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}-\rho}}} e^{2\pi i \left(\frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}\right) (\rho + u'y)^p} = \\ &= e^{2\pi i \left(\frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}\right) \rho^p} \sum_{u'=0}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}-\rho}}} e^{2\pi i \frac{a'}{x} (y^{p-1} u'^{p-1} + \dots)} = \\ &= e^{2\pi i \left(\frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}\right) \rho^p} \sum_{u'=0}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}-\rho}}} e^{g(u') i},\end{aligned}$$

где

$$g(u') = \frac{(\rho + u'y)^p - \rho^p}{y} \frac{2\pi a'}{x}.$$

Имеем

$$g(u' + 1) - g(u') < \frac{2\pi a'}{x} y^{p-1} (u' + 2)^{p-1} p < \frac{2\pi a' y^{p-1} x^{\frac{p-1}{p}}}{xy^{p-1}} < \pi.$$

Разобьем $\sum_{u'=0}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}-\rho}}} e^{g(u') i}$ на две суммы:

$$\Sigma_1 = \sum_{u'=0}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}-\rho}}} \frac{1}{y a'^{\frac{1}{p}}} \quad \text{и} \quad \Sigma_2 = \sum_{u'=0}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}-\rho}}} \frac{1}{y a'^{\frac{1}{p}}}.$$

Первая сумма меньше чем $\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{y a'^{\frac{1}{p}}}$, во второй сумме

$$g(u + 1) - g(u) > \frac{a'}{x} 2p\pi y^{p-1} u^{p-1} > 2p\pi \frac{a'^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

По лемме v. d. Corput'a $\Sigma_2 < \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{p a'^{\frac{1}{p}}} + C$, т. е. вся сумма $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$

меньше $2 \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{a'^{\frac{1}{p}}}$. Отсюда следует оценка

$$\left| \sum_{u=1}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} u^p} \right| < \sum_{\rho=0}^{y-1} |\Sigma_\rho| < \frac{2yx^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}}.$$

2-я оценка (при любых y).

На основании леммы Weyl'я

$$\left| \sum_{n=1}^{\frac{1}{x^p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^{2^{p-1}} < 4^{2^{p-1}} \left[x^{\frac{2^{p-1}}{p}} + x^{\frac{2^{p-1}}{p}-1} \sum \frac{1}{\left\{ p! h_1 \dots h_{p-1} \frac{a}{x} \right\}} \right].$$

Положим

$$\left| \frac{a}{x} - \frac{q}{y} \right| < \frac{1}{2p! x^{\frac{p-1}{p}}}, \quad y < 2p! x^{\frac{p-1}{p}},$$

т. е.

$$\frac{a}{x} = \frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}, \quad a' < \frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left\{ p! h_1 \dots h_{p-1} \frac{a}{x} \right\}} &= \frac{1}{\left\{ p! h_1 \dots h_{p-1} \frac{q}{y} + \frac{p! h_1 \dots h_{p-1} a'}{xy} \right\}} = \\ &= \frac{1}{\left\{ p! h_1 \dots h_{p-1} \frac{q}{y} + \frac{\Theta}{y} \right\}} < 2 \frac{1}{\left\{ p! h_1 \dots h_{p-1} \frac{q}{y} \right\}} \end{aligned}$$

(здесь $|\Theta| < \frac{1}{2}$).

Оценим

$$\sum_{1 \leq h_i \leq n} \frac{1}{\left\{ p! h_1 \dots h_{p-1} \frac{q}{y} \right\}}.$$

Если $p! h_1 \dots h_{p-1}$ делится на y , то $\frac{1}{\left\{ \frac{q}{y} \right\}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}$. Число таких произведений $p! h_1 \dots h_{p-1}$, которые делятся на y , не более $\frac{p! x^{\frac{p-1}{p}} y^\varepsilon}{y} = \frac{p! x^{\frac{p-1}{p}}}{y^{1-\varepsilon}}$ (ε — любое > 0). Сумма всех $\frac{1}{\left\{ \frac{q}{y} \right\}}$, распространенных на подобные произведения, не превосходит $\frac{p! x^{\frac{p-1}{p}}}{y^{1-\varepsilon}}$.

Рассмотрим случай, когда y не есть делитель произведения $p! h_1 \dots h_{p-1}$.

Остатки каждого ряда чисел $q(u+1)$, $q(u+2)$, ..., $q(u+y-1)$ по модулю q , где q взаимно простое с y , а u кратно y , суть, отвлекаясь от порядка, $1, 2, \dots, y-1$.

Соответствующие значения $\frac{1}{\left\{ \frac{q}{y}(u+t) \right\}}$ суть, с точностью до порядка, y ,

$$\frac{y}{2}, \frac{y}{3}, \dots, \left[\frac{y}{2} \right], \dots, \frac{y}{3}, \frac{y}{2}, y.$$

Сумма этих значений меньше $2y \ln y$. Сумма соответствующих значений

$$\frac{1}{\left\{ \frac{a}{x}(u+t) \right\}}$$
 не превосходит удвоенной предыдущей, т. е. $4y \ln y$.

Весь ряд чисел от 1 до $p! x^{\frac{p-1}{p}}$ (не считая кратных y) может быть разбит на $\left[\frac{p! x^{\frac{p-1}{p}}}{y} \right]$ рядов предыдущего вида и один неполный подобный ряд (от $\left[\frac{p! x^{\frac{p-1}{p}}}{y} \right] y + 1$ и до $p! x^{\frac{p-1}{p}}$).

С другой стороны, среди произведений $p! h_1 \dots h_{p-1}$, которые все не более $p! x^{\frac{p-1}{p}}$, каждое число встречается не более x^ε раз (ε как угодно мало).

Поэтому вся сумма выражений $\frac{1}{\{ \frac{1}{\} \}}$, соответствующих произведениям $p! h_1 \dots h_{p-1}$, не делящимся на y , не превосходит

$$\left\{ \left[\frac{p! x^{\frac{p-1}{p}}}{y} \right] + 1 \right\} 4y \ln y \cdot x^\varepsilon < p! x^{\frac{p-1}{p} + \varepsilon'} < 3p! x^{\frac{p-1}{p} + \varepsilon'}$$

(где ε' любое $> \varepsilon$).

Выберем $\varepsilon' = \frac{1}{2p}$. Получим для $\sum \frac{1}{\{ \frac{1}{\} \}}$ оценку

$$\frac{1}{\left\{ p! h_1 \dots h_{p-1} \frac{a}{x} \right\}} < x^{1 - \frac{1}{2p}} + \frac{p! x^{\frac{1}{p}}}{y^{1 - \frac{1}{2p}}}.$$

Отсюда получается: при $a > \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$ и любом y , меньшем $p! x^{\frac{p-1}{p}}$,

$$\begin{aligned} \left(\left| \sum_{n=1}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right| \right)^{2^{p-1}} &< 4^{2^{p-1}} \left\{ x^{\frac{2^{p-1}-1}{p}} + x^{\frac{2^{p-1}-1}{p}-1} \left(\frac{p! x^{\frac{1}{p}}}{y^{1 - \frac{1}{2p}}} + x^{1 - \frac{1}{2p}} \right) \right\} < \\ &< 4^{2^{p-1}} \left(2x^{\frac{2^{p-1}-1}{p} - \frac{1}{p}} + \frac{p! x^{\frac{1}{p}}}{y^{1 - \frac{1}{2p}}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом получаем следующую сводку оценок:

1. Если $a \geq \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$, то $\sum_a < \frac{1}{a^{\frac{1}{p}}}$.

2. Если $a > \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$ и $y \leq x^{\frac{1}{2p}}$, то, обозначая соответственную сумму

$$\sum_{n=1}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} = \sum_{n=1}^{\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}} e^{2\pi i \left(\frac{q}{y} + \frac{q'}{xy} \right) n^p}$$

через (a', y) , имеем

$$|(a', y)| < \min \left\{ \frac{1}{a'^{\frac{1}{p}}}, \quad 5x^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p2^p}} + 5 \frac{x^{\frac{1}{p}}}{y^{\frac{1 - \frac{1}{2p}}{2^{p-1}}}} \right\}.$$

Наконец, при $a \geq \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$ и $y > x^{\frac{1}{2p}}$ эта сумма меньше выражения

$$5x^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p2^p} + 5 \frac{x^{\frac{1}{p}}}{1 - \frac{1}{2p}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{2^{p-1}}}}.$$

Оценим теперь

$$\sum_{a=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (\Sigma_a)^u + \sum_{y=1}^{2p! x^{\frac{p-1}{p}}} \sum_{a'=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (a', y)^u < x^{\frac{1}{p}} \sum_{a=1}^u \left(\frac{2}{a^{\frac{1}{p}}} \right)^u + \sum_{y=1}^{2p! x^{\frac{p-1}{p}}} \Sigma'_y,$$

где

$$\Sigma'_y = \sum_{a'=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (a', y)^u.$$

Имеем $a > x^{\frac{1}{p}} \frac{1}{3p}$. Если $y > x^{\frac{1}{2p}}$, то, на основании последней оценки, $|(a', y)| < 10x^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p2^p}$, так что $|(a', y)|^u$ при $u > p2^p$ меньше чем $\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x}$.

Для $y \leq x^{1 - \frac{1}{2p}}$ и $a > \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$

$$|(a', y)| > \min \left[\frac{10x^{\frac{1}{p}}}{y^{\frac{1}{2^{p-1}}}}, \frac{2x^{\frac{1}{p}} y}{a'^{\frac{1}{p}}} \right].$$

Разобьем $\sum_{a'=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (a', y)^u$ на части, определяемые неравенствами:

$$1) \quad 5a'^{\frac{1}{p}} \leq y^{2 + \frac{1}{2^{p-1}}}, \quad \text{т. е.} \quad a' \leq \frac{1}{5^p} y^{2p + \frac{2p-1}{2^{p-1}}},$$

и

$$2) \quad a' > \frac{1}{5^p} y^{2p + \frac{2p-1}{2^{p-1}}}.$$

В первой части суммы $|(a', y)| < \frac{10x^{\frac{1}{p}}}{y^{\frac{1}{2^{p-1}}}}$, во второй части

$$|(a', y)| < \frac{2x^{\frac{1}{p}} y}{a'^{\frac{1}{p}}}.$$

Сумма членов первой части меньше чем $\frac{x^{\frac{u}{p}} y^{2p + \frac{2p-1}{2^{p-1}}}}{y^{p^{2^{p-1}} u}}$.

При $\frac{2p-1}{p^{2^{p-1}}} u > 2p + \frac{2p-1}{2^{p-1}} + 2$, например при $u > 3p2^p$, она меньше чем $\frac{x^{\frac{u}{p}}}{y^2}$.

Сумма членов второй части меньше чем $x^{\frac{u}{p}} \sum \frac{(2y)^u}{a'^{\frac{u}{p}}}$, где сумма распространена на все значения a' между $\frac{1}{5p} y^{2p + \frac{2p-1}{2^{p-1}}}$ и $+\infty$. Эта сумма меньше чем

$$x^{\frac{u}{p}} \int_{\frac{1}{5p} y^{2p + \frac{2p-1}{2^{p-1}}}}^{\infty} \frac{(2y)^u}{a'^{\frac{u}{p}}} da' < \frac{K(u, p) x^{\frac{u}{p}}}{y^{u-1} + \frac{(p-1)u}{2^{p-1}}}.$$

При $u > 3$ она меньше чем $\frac{K(u, p) x^{\frac{u}{p}}}{y^2}$ (где $K(u, p)$ — постоянная, зависящая только от u и p).

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^{\frac{1}{x^{\frac{p}{2p!}}}} (\Sigma_a) + \sum_{y=1}^{\frac{p-1}{2p!} x^{\frac{p}{p}}} \sum_{a'=1}^{\frac{1}{x^{\frac{p}{2p!}}}} (a', y)^u < \\ & < 2^u x^{\frac{u}{p}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} + K(u, p) x^{\frac{u}{p}} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y^2} < K'(u, p) x^{\frac{u}{p}} \end{aligned}$$

(при $u > 3p2^p$).

Отсюда получается следующая оценка основной суммы:

$$\frac{1}{x} \left| \sum_{a=0}^{x-1} \left(\sum_{n=1}^{\frac{1}{x^{\frac{p}{2p!}}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right)^u \right| < \frac{x^{\frac{u}{p}}}{x} K'(u, p)$$

(при $u \geq 3p2^p$).

Доказательство обобщенной теоремы Варинга.

Рассмотрим последовательность чисел $n_1, n_2, \dots$ плотности $\geq \alpha > 0$. Число членов этой последовательности, не превосходящих x , не менее чем $\frac{\alpha}{2} x$ (начиная с достаточно большого x).

Число членов соответствующего ряда степеней, не превосходящих x , начиная с достаточно большого x , не менее чем $\frac{\alpha}{2} x^{\frac{1}{p}}$.

Обозначая последнее число через $N(x)$, имеем $N(x) > \frac{\alpha}{2} x^{\frac{1}{p}}$.

Обозначая через A_j число разложений j на сумму p -х степеней натуральных чисел, а через A'_j — число разложений j на сумму членов ряда $n_1^p, n_2^p, \dots$, имеем

$$\sum_{j=1}^x A_j'^2 < \sum_{j=1}^x A_j^2 < \frac{1}{x} \sum_{a=0}^{x-1} \left| \sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^{2u} < K'(u, p) \frac{x^{\frac{2u}{p}}}{x} < K_2(u, p) \frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right) \right]^{2u}}{x}.$$

Таким образом условия второй основной леммы выполнены.
Это доказывает теорему.