

Quand gemini t'explique ce que tu fais "au feeling"!, Denise Vella-Chemla, mai 2026.

Bonjour, en décembre 2024, à cette adresse [lien](#) j'avais proposé une formule ultra-simple pour calculer les zéros de ζ et ils étaient tout de même très bien approchés.

Pourrais-tu m'expliquer pourquoi cette formule, dont je te donne aussi l'image, peut marcher... (Il te faut utiliser un langage très simple : je suis informaticienne, pas mathématicienne ;).

$$\text{Valeurs des zéros non triviaux de } \zeta \approx \frac{2\pi x}{W\left(\frac{x}{e}\right)}$$

FIGURE 1 : Formule qui calcule les parties imaginaires des zéros non triviaux de ζ .

RÉPONSE DE L'IA GEMINI : Bonjour ! C'est une excellente question et votre intuition de lier les zéros de la fonction zêta (ζ) de Riemann à la fonction W de Lambert est très élégante.

Pour expliquer pourquoi cette "formule magique" fonctionne de manière si surprenante avec des mots simples (et des concepts d'informaticienne), il faut regarder comment sont répartis ces zéros.

1. Le "compteur" de zéros (l'algorithme de base)

En mathématiques, on sait que les zéros non triviaux de la fonction zêta se situent sur une ligne verticale (l'axe critique) et apparaissent à des hauteurs particulières, qu'on appelle t .

Il existe une formule célèbre (la formule de Riemann-von Mangoldt) qui permet de compter approximativement combien il y a de zéros entre la hauteur 0 et une hauteur t donnée. Appelons ce compteur $N(t)$. Quand t devient grand, ce compteur se comporte à peu près comme cela :

$$N(t) \approx \frac{t}{2\pi} \ln\left(\frac{t}{2\pi e}\right)$$

Pour une informaticienne, vous pouvez voir $N(t)$ comme une fonction qui prend en entrée une hauteur t et renvoie son "index" (le numéro du zéro).

2. Le problème inverse (trouver la hauteur à partir de l'index)

Votre objectif est inverse : vous ne voulez pas donner une hauteur t pour trouver l'index. Vous voulez donner un index (que vous avez appelé x dans votre formule) et trouver la hauteur estimée du x -ième zéro (que nous allons appeler t).

En informatique, cela revient à chercher la fonction inverse de $N(t)$. On veut résoudre l'équation :

$$x = \frac{t}{2\pi} \ln \left(\frac{t}{2\pi e} \right)$$

On cherche à isoler t en fonction de x .

3. Pourquoi la fonction W de Lambert apparaît ?

C'est là que la "magie" opère. La fonction W de Lambert a été inventée précisément pour résoudre des équations où une variable est à la fois "toute seule" et "bloquée" à l'intérieur d'un logarithme ou d'une exponentielle (par exemple, résoudre $y = u \cdot \ln(u)$ ou $y = u \cdot e^u$).

Si on manipule un peu notre équation mathématique pour l'adapter au profil de la fonction W , on s'aperçoit que la solution exacte pour isoler t est :

$$t \approx \frac{2\pi x}{W\left(\frac{x}{e}\right)}$$

En conclusion : pourquoi ça marche ?

Votre formule n'est pas un hasard : elle est la réponse algébrique exacte au problème d'inversion du compteur de zéros.

Comme la formule de Riemann-von Mangoldt donne une excellente approximation globale de la position des zéros (la courbe lisse suit de très près la réalité, même s'il y a de petites fluctuations locales d'un zéro à l'autre), l'inversion que vous avez trouvée grâce à la fonction de Lambert donne instantanément une estimation ultra-rapide et très propre de la valeur du $x^{\text{ième}}$ zéro.

C'est une très jolie façon d'exprimer de manière condensée et calculable un comportement asymptotique complexe !