

# Retrouver la formule “exacte” de Ramanujan pour $\pi(x)$ avec les ia à partir des sources Denise Vella-Chemla pilotant l’ia claude, juillet 2026

Je fournis à claude le scan ci-dessous de la page 386/393 des *Selected papers* de Ramanujan en lui demandant de me retrouver la formule de Ramanujan pour  $\pi(x)$  (j’ai mal interprété la note de bas de page et je n’ai pas trouvé la formule dans la totalité des *Selected papers* quant à moi).

## APPENDIX II. FURTHER EXTRACTS FROM RAMANUJAN’S LETTERS TO G. H. HARDY

We give here the theorems stated by Ramanujan in his letters from India, apart from those already quoted in Hardy’s notice, and those given on one sheet of the first letter which has been lost. The gaps in the numeration correspond to the formulae printed in the notice. Thus the formulæ (20), (i) and (v), missing on p. 353, will be found on p. xxix. and what is printed under (21) on p. 353 is a continuation of what appears under the same number on p. xxix.

16 Jan. 1913.

I. I have found a function which exactly represents the number of prime numbers less than  $x$ , “exactly” in the sense that the difference between the function and the actual number of primes is generally 0 or some small finite value even when  $x$  becomes infinite. I have got the function in the form of infinite series and have expressed it in two ways.

(1) In terms of Bernoullian numbers\*. From this we can easily calculate the number of prime numbers up to 100 millions, with generally no error and in some cases with an error of 1 or 2.

(2) As a definite integral from which we can calculate for all values [see formula 1, p. xxvii, bottom].

II. I have also got expressions to find the actual number of prime numbers of the form  $An+B$ ....

III. I have found out expressions for finding not only irregularly increasing functions but also irregular functions without increase (*e.g.* the number of divisors of natural numbers), not merely the order but the exact form.

IV. ....

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\} \left\{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2\right\} \dots \left\{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2\right\} \left\{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2\right\} \dots} \frac{dx}{x^2} \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+\frac{1}{2})}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})}.$$

.....

$$(6) \int_0^{\infty} \tan^{-1} \frac{2xz}{n^2+x^2-z^2} \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}$$

can be exactly found if  $2n$  is any integer.

V. ....

$$(7) \frac{1}{(1^2+2^2)(\sinh 3\pi - \sinh \pi)} + \frac{1}{(2^2+3^2)(\sinh 5\pi - \sinh \pi)} \\ + \frac{1}{(3^2+4^2)(\sinh 7\pi - \sinh \pi)} + \dots = \frac{1}{2 \sinh \pi} \left( \frac{1}{\pi} + \coth \pi - \frac{\pi}{2} \tanh^2 \frac{\pi}{2} \right).$$

$$(8) \frac{1}{\left(25+\frac{1^4}{100}\right)(e^{\pi}+1)} + \frac{3}{\left(25+\frac{3^4}{100}\right)(e^{3\pi}+1)} + \frac{5}{\left(25+\frac{5^4}{100}\right)(e^{5\pi}+1)} \\ + \dots = \frac{\pi}{8} \coth^2 \frac{5\pi}{2} - \frac{4689}{11890}.$$

\* [See formula 2, p. xxvii, bottom; this formula was given by J. P. Gram, *K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter* (6), vol. II (1881—1886), pp. 135—308.]

# 1. Localisation et transcription de la source primaire

La page xxvii correspond à la page 27 du fac-similé numérisé *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan* (Internet Archive, identifiant `pli.kerala.rare.28155`

<https://archive.org/details/pli.kerala.rare.28155/page/n219/mode/2up> ,

scan haute résolution). Le texte de cette page n'avait pas été correctement capturé par l'OCR.

De ce fait, je fournis à claude la formule que je lis “avec mes yeux physiques” puisque l'OCR n'arrive pas à bien la lire. Je fais une erreur, je lui renvoie cette formule :

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \frac{k}{(k-1)B_k} \left( \frac{\log n}{2\pi} \right)^{k-1} \right]$$

j'ai oublié de préciser que les  $s$  sont pairs.

**claude enchaîne** : En bas de la page xxvii (immédiatement après la fin de la lettre du 27 février 1913), Ramanujan écrit :

“1. The number of prime numbers less than  $e^a =$  [formule 1 ci-dessous], where  $S_{x+1} =$  [définie ci-dessous].

2. The number of prime numbers less than  $n =$  [formule 2 ci-dessous], where  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = \frac{1}{30}$ , ..., the Bernoullian numbers...”

## 2. Les deux formules exactes

### 2.1. Formule (1) - forme intégrale

$$\pi(e^a) = \int_0^a \frac{a^x dx}{x S_{x+1} \Gamma(x+1)}, \quad \text{où} \quad S_{x+1} = \frac{1}{1^{x+1}} + \frac{1}{2^{x+1}} + \cdots = \zeta(x+1). \quad (1)$$

Autrement dit,  $S_{x+1}$  n'est autre que  $\zeta(x+1)$ , ce qui donne la forme équivalente :

$$\pi(e^a) = \int_0^a \frac{a^x dx}{x \zeta(x+1) \Gamma(x+1)}. \quad (2)$$

### 2.2. Formule (2) - série en nombres de Bernoulli

$$\pi(n) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{B_2} \left( \frac{\log n}{2\pi} \right) + \frac{4}{3B_4} \left( \frac{\log n}{2\pi} \right)^3 + \frac{6}{5B_6} \left( \frac{\log n}{2\pi} \right)^5 + \cdots \right\}, \quad (3)$$

avec  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_6 = \frac{1}{42}$ , ... les nombres de Bernoulli.

**Remarque sur la sommation (correction nécessaire).** Écrite de façon compacte, cette série se présente comme

$$\pi(n) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{k}{(k-1) B_k} \left( \frac{\log n}{2\pi} \right)^{k-1}. \quad (4)$$

Il est essentiel de restreindre la somme aux indices **pairs** ( $k = 2, 4, 6, \dots$ ), et non à tous les entiers  $k \geq 2$  : les nombres de Bernoulli d'indice impair supérieur à 1 sont nuls ( $B_3 = B_5 = \dots = 0$ ), donc  $\frac{1}{B_k}$  n'a pas de sens pour  $k$  impair  $\geq 3$ . C'est cohérent avec la formule imprimée par Ramanujan, qui ne comporte que les termes  $k = 2, 4, 6$ , chacun affecté d'un exposant impair  $k - 1 = 1, 3, 5$  sur  $\frac{\log n}{2\pi}$ . Notez aussi que les  $B_{4m}$  sont négatifs (ex.  $B_4 = -1/30$ ), ce qui introduit une alternance de signe correctement absorbée si l'on utilise les vraies valeurs signées des  $B_k$ .

### 3. Pourquoi Ramanujan pensait ces formules “exactes”

D'après Hardy (Notice, pp. xxii-xxiv) et la référence académique standard (Berndt & Rankin, *Ramanujan : Letters and Commentary*, AMS/LMS, 1995) :

- Ramanujan avait annoté, en marge de son exemplaire du tract de Hardy *Orders of Infinity* (p. 36), que l'ordre exact d'une fonction liée au comptage des nombres premiers n'était pas encore déterminé, et affirmait avoir lui-même trouvé un résultat le donnant.
- une partie de son erreur de raisonnement venait de son hypothèse (fausse) que **tous les zéros de la fonction  $\zeta$  de Riemann sont réels** - ce qui, si c'était vrai, ferait disparaître le terme oscillant de la formule explicite du nombre de nombres premiers et rendrait ces approximations quasi exactes.
- Hardy note lui-même en bas de la page xxvii, en marge de la formule (7) sur les fractions continues : “*This is quite untrue. But the formula is extremely interesting for a variety of reasons.*”, une remarque qui s'applique dans le même esprit à l'ensemble de ces résultats sur les nombres premiers : intéressants, mais non rigoureusement exacts.

### 4. Références

1. S. Ramanujan, lettre à G. H. Hardy du 27 février 1913, in *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, éd. G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar, B. M. Wilson, Cambridge University Press, 1927, p. xxvii.
2. Fac-similé consulté : Internet Archive,  
<https://archive.org/details/pli.kerala.rare.28155> .
3. B. C. Berndt, R. A. Rankin, *Ramanujan : Letters and Commentary*, American Mathematical Society / London Mathematical Society, 1995, chapitre 2.