LE CONTINU MATHÉMATIQUE
Par H. Poincaré

Si l'on veut savoir ce que les mathématiciens entendent par un continu, ce n'est pas à la géométrie qu'il faut le demander. Le géomètre cherche toujours plus ou moins à se représenter les figures qu'il étudie ; mais ses représentations ne sont pour lui que des instruments ; il fait de la géométrie avec de l'étendue comme il en fait avec de la craie ; aussi doit-il prendre garde d'attacher trop d'importance à des accidents qui n'en ont souvent pas plus que la blancheur de la craie.

L'analyste pur n'a pas à craindre cet écueil. Il a dégagé la science mathématique de tous les éléments étrangers, et il peut répondre à notre question : qu'est-ce au juste que ce continu sur lequel les mathématiciens raisonnent ? Beaucoup d'entre eux, qui savent réfléchir sur leur art, l'ont fait déjà ; M. Tannery, par exemple, dans son "Introduction à la Théorie des Fonctions d'une variable".

Partons de l'échelle des nombres entiers ; entre deux échelons consécutifs, intercalons un ou plusieurs échelons intermédiaires, puis entre ces échelons nouveaux d'autres encore, et ainsi de suite indéfiniment. Nous aurons ainsi un nombre illimité de termes, ce seront les nombres que l'on appelle fractionnaires, rationnels ou commensurables. Mais ce n'est pas assez encore ; entre ces termes qui sont pourtant déjà en nombre infini, il faut encore en intercaler d'autres, que l'on appelle irrationnels ou incommensurables.

Avant d'aller plus loin, faisons une première remarque. Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais extérieurs les uns aux autres. Ce n'est pas là la conception ordinaire, où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est l'unité dans la multiplicité, la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu. Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens.

On dira peut-être aussi que les mathématiciens qui se contentent de cette définition sont dupes de mots ; qu'il faudrait dire d'une façon précise ce que sont chacun de ces échelons intermédiaires, expliquer comment il faut les intercaler et démontrer qu'il est possible de le faire. Mais ce serait à tort ; la seule propriété de ces échelons qui

Retranscription en Latex Denise Vella-Chemla, juin 2022.
Référence : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/hp-pdf/hp1893rm.pdf.

intervienne dans leurs raisonnements [1], c'est celle de se trouver avant ou après tels autres échelons ; elle doit donc seule aussi intervenir dans la définition.

Ainsi il n'y a pas à s'inquiéter de la manière dont on doit intercaler les termes intermédiaires ; d'autre part, personne ne doutera que cette opération ne soit possible, à moins d'oublier que ce dernier mot, dans le langage des géomètres, signifie simplement exempt de contradiction.

Notre définition toutefois n'est pas complète encore, et j'y reviens après cette trop longue digression.

Définition des incommensurables.

Les mathématiciens de l'École de Berlin, M. Kronecker en particulier, se sont préoccupés de construire cette échelle continue des nombres fractionnaires et irrationnels sans se servir d'autres matériaux que du nombre entier. Le continu mathématique serait, dans cette manière de voir, une pure création de l'esprit où l'expérience n'aurait aucune part.

La notion du nombre rationnel ne leur semblant pas présenter de difficulté, ils se sont surtout efforcés de définir le nombre incommensurable. Mais avant de reproduire ici leur définition, je dois faire une observation afin de prévenir l'étonnement qu'elle ne manquerait pas de provoquer chez les lecteurs peu familiers avec les habitudes des géomètres.

Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre des objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse.

Si l'on ne s'en souvenait, on ne comprendrait pas que M. Kronecker désigne par le nom de "nombre incommensurable" un simple symbole, c'est-à-dire quelque chose de très différent de l'idée que l'on croit se faire d'une quantité, qui doit être mesurable et presque tangible.

Voici maintenant quelle est la définition de M. Kronecker.

On peut répartir d'une infinité de manières les nombres commensurables en deux classes en s'assujettissant à cette condition qu'un nombre quelconque de la première

1. Avec celles qui sont contenues dans les conventions spéciales qui servent à définir l'addition.

classe soit plus grand qu'un nombre quelconque de la seconde classe.

Il peut arriver que parmi les nombres de la première classe il y en ait un qui soit plus petit que tous les autres ; si par exemple on range dans la première classe tous les nombres plus grands que 2 et 2 lui-même et dans la seconde classe tous les nombres plus petits que 2, il est clair que 2 sera le plus petit de tous les nombres de la première classe. Le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.

Il peut se faire au contraire que parmi les nombres de la seconde classe il y en ait un qui soit plus grand que tous les autres ; c'est ce qui a lieu par exemple si la première classe comprend tous les nombres plus grands que 2, et la seconde tous les nombres plus petits que 2 et 2 lui-même. Ici encore le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.

Mais il peut arriver également que l'on ne puisse trouver ni dans la première classe un nombre plus petit que tous les autres, ni dans la seconde un nombre plus grand que tous les autres. Supposons par exemple que l'on mette dans la première classe tous les nombres commensurables dont le carré est plus grand que 2 et dans la seconde tous ceux dont le carré est plus petit que 2. On sait qu'il n'y en a aucun dont le carré soit précisément égal à 2. Il n'y aura évidemment pas dans la première classe de nombre plus petit que tous les autres, car quelque voisin que le carré d'un nombre soit de 2, on pourra toujours trouver un nombre commensurable dont le carré soit encore plus rapproché de 2.

Dans la manière de voir de M. Kronecker, le nombre incommensurable $\sqrt{2}$ n'est autre chose que le symbole de ce mode particulier de répartition des nombres commensurables ; et à chaque mode de répartition correspond ainsi un nombre, commensurable ou non, qui lui sert de symbole.

Mais se contenter de cela, ce serait trop oublier l'origine de ces symboles ; il reste à expliquer comment on a été conduit à leur attribuer une sorte d'existence concrète ; et, d'autre part, comme l'a fait observer le P. Carbonnel, la difficulté ne commence-t-elle pas pour les nombres fractionnaires eux-mêmes ? Aurions-nous la notion de ces nombres, si nous ne connaissions d'avance une matière que nous concevons comme divisible à l'infini, c'est-à-dire comme un continu ?

Le continu physique.

On en vient alors à se demander si la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont nos sensations, seraient susceptibles de mesure. On pourrait être tenté de croire qu'il en est bien ainsi puisque l'on s'est, dans ces derniers temps, efforcé de les mesurer et que l'on a même formulé une loi d'après laquelle la sensation serait proportionnelle au logarithme de l'excitation.

Mais si l'on examine de près les expériences par lesquelles on a cherché à établir cette loi, on sera conduit à une conclusion toute contraire. On a observé par exemple qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A < C$$

qui peuvent être regardées comme la formule du *continu physique*.

Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraint à inventer le continu mathématique.

On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l'esprit, mais que c'est l'expérience qui lui en a fourni l'occasion.

Nous ne pouvons croire que deux quantités égales à une même troisième ne soient pas égales entre elles, et c'est ainsi que nous sommes amenés à supposer que A est différent de B et B de C, mais que l'imperfection de nos sens ne nous permet pas de les discerner.

Création du continu mathématique.

Premier stade.

Jusqu'ici il pourrait nous suffire, pour rendre compte des faits, d'intercaler entre A et B un petit nombre de termes qui resteraient discrets. Qu'arrive-t-il maintenant si nous avons recours à quelque instrument pour suppléer à l'infirmité de nos sens, si par exemple nous faisons usage d'un microscope ? Des termes que nous ne pouvions discerner l'un de l'autre, comme étaient tout à l'heure A et B, nous apparaissent maintenant comme distincts ; mais entre A et B devenus distincts s'intercalera un terme nouveau D que nous ne pourrons distinguer ni de A, ni de B. Malgré l'emploi des méthodes les plus perfectionnées, les résultats bruts de notre expérience présenteront toujours les caractères du continu physique avec la contradiction qui y est inhérente.

Nous n'y échapperons qu'en intercalant sans cesse des termes nouveaux entre les termes déjà discernés, et cette opération devra être poursuivie indéfiniment. Nous ne pourrions concevoir qu'on dût l'arrêter que si nous nous représentions quelque instrument assez puissant pour décomposer le continu physique en éléments discrets, comme le télescope résout la voie lactée en étoiles. Mais nous ne pouvons nous imaginer cela ; en effet, c'est toujours avec nos sens que nous nous servons de nos instruments ; c'est avec l'œil que nous observons l'image agrandie par le microscope, et cette image doit par conséquent toujours conserver les caractères du continu physique.

Rien ne distingue une longueur observée directement de la moitié de cette longueur doublée par le microscope. Le tout est homogène à la partie ; c'est là une nouvelle contradiction, ou plutôt c'en serait une si le nombre de termes était supposé fini ; il est clair en effet que la partie, contenant moins de termes que le tout, ne saurait être semblable au tout.

La contradiction cesse dès que le nombre des termes est regardé comme infini ; rien n'empêche par exemple de considérer l'ensemble des nombres entiers comme semblable à l'ensemble des nombres pairs qui n'en est pourtant qu'une partie ; et, en effet, à chaque nombre entier correspond un nombre pair qui en est le double.

Mais ce n'est pas seulement pour échapper à cette contradiction contenue dans les données empiriques que l'esprit est amené à créer le concept d'un continu, formé d'un nombre indéfini de termes.

Tout se passe comme pour la suite des nombres entiers. Nous avons la faculté de concevoir qu'une unité peut être ajoutée à une collection d'unités ; c'est grâce à l'expérience que nous avons l'occasion d'exercer cette faculté et que nous en prenons conscience ; mais, dès ce moment, nous sentons que notre pouvoir n'a pas de limite et que nous pourrions compter indéfiniment, quoique nous n'ayons jamais eu à compter qu'un nombre fini d'objets.

De même, dès que nous avons été amenés à intercaler des moyens entre deux termes consécutifs d'une série, nous sentons que cette opération peut être poursuivie au delà de toute limite et qu'il n'y a pour ainsi dire aucune raison intrinsèque de s'arrêter.

Qu'on me permette, afin d'abréger le langage, d'appeler continu mathématique du premier ordre tout ensemble de termes formé d'après la même loi que l'échelle des nombres commensurables. Si nous y intercalons ensuite des échelons nouveaux d'après la loi de formation des nombres incommensurables, nous obtiendrons ce que nous appellerons un continu du deuxième ordre.

Deuxième stade.

Nous n'avons fait encore que le premier pas ; nous avons expliqué l'origine des continus du premier ordre ; mais il faut voir maintenant pourquoi ils n'ont pu suffire encore et pourquoi il a fallu inventer les nombres incommensurables.

Si l'on veut s'imaginer une ligne, ce ne pourra être qu'avec les caractères du continu physique, c'est-à-dire qu'on ne pourra se la représenter qu'avec une certaine largeur. Deux lignes nous apparaîtront alors sous la forme de deux bandes étroites, et si l'on se contente de cette image grossière, il est évident que si les deux lignes se traversent, elles auront une partie commune.

Mais le géomètre pur fait un effort de plus ; sans renoncer tout à fait au secours de ses sens, il veut arriver au concept de la ligne sans largeur, du point sans étendue. Il n'y peut parvenir qu'en regardant la ligne comme la limite vers laquelle tend une bande de plus en plus mince, et le point comme la limite vers laquelle tend une aire de plus en plus petite. Et alors, nos deux bandes, quelque étroites qu'elles soient, auront toujours une aire commune, d'autant plus petite qu'elles seront moins larges et dont la limite sera ce que le géomètre pur appelle un point.

C'est pourquoi l'on dit que *deux lignes qui se traversent ont un point commun* et cette vérité paraît intuitive.

Mais elle impliquerait contradiction si l'on concevait les lignes comme des continus du premier ordre ; ou plutôt la contradiction se produirait dès que l'on admettrait d'autres propositions qui semblent également intuitives et dont l'origine est analogue ; dès qu'on affirmerait par exemple l'existence des droites et des cercles.

Pour éviter des développements qui devraient être assez longs, je ne démontrerai pas qu'il y a effectivement contradiction ni comment l'introduction des nombres incommensurables suffit pour la faire cesser.

Telle est l'origine du continu du deuxième ordre, qui est le continu mathématique proprement dit.

Résumé.

En résumé, l'esprit a la faculté de créer des symboles et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison.

Dans le cas qui nous occupe, cette raison était la notion du continu physique, tirée des données brutes des sens. Mais cette notion conduit à une série de contradictions dont il faut s'affranchir successivement. C'est ainsi que nous sommes contraints à imaginer un système de symboles de plus en plus compliqué. Celui auquel nous nous arrêterons est non seulement exempt de contradiction interne, il en était déjà ainsi à toutes les étapes que nous avons franchies, mais il n'est pas non plus en contradiction avec diverses propositions dites intuitives et qui sont tirées de notions empiriques plus ou moins élaborées.

Remarques diverses.

Il me reste quelques remarques à faire.

Je ne me suis préoccupé jusqu'ici que de l'ordre dans lequel nos termes sont rangés. Mais cela ne suffit pas pour la plupart des applications. Il faut apprendre à comparer l'intervalle qui sépare deux termes quelconques à celui qui sépare deux autres termes quelconques. C'est à cette condition seulement que le continu devient une grandeur *mesurable* et qu'on peut lui appliquer les opérations de l'arithmétique. (Voir la note au bas de la page 27[2].)

Cela ne peut se faire qu'à l'aide d'une convention nouvelle et spéciale. On *conviendra* que dans tel cas l'intervalle compris entre les termes A et B est égal à l'intervalle qui sépare C et D. Par exemple, au début de notre travail, nous sommes partis de l'échelle des nombres entiers et nous avons supposé que l'on intercalait entre deux échelons consécutifs n échelons intermédiaires ; eh bien, ces échelons nouveaux seront *par convention* regardés comme équidistants.

Je ne veux pas ici traiter cette question en détail ; cela m'entraînerait trop loin de mon sujet ; ce nouvel attribut que l'on ajoute ainsi au concept du continu mathématique n'en fait pas en effet partie essentielle.

Je me bornerai donc à renvoyer à une œuvre magistrale de von Helmholtz ; je veux parler de sa *Jubelschrift* écrite en l'honneur d'Edouard Zeller et intitulée *Zählen und Messen*.

Nous pouvons nous poser plusieurs questions importantes :

---

2. Page 2 de cette retranscription.

1° *La puissance créatrice de l'esprit est-elle épuisée par la création du continu mathématique ?*

Non : les travaux de Du Bois-Reymond le démontrent d'une manière frappante.

On sait que les mathématiciens distinguent des infiniment petits de différents ordres et que ceux du deuxième ordre sont infiniment petits, non seulement d'une manière absolue, mais encore par rapport à ceux du premier ordre. Il n'est pas difficile d'imaginer des infiniment petits d'ordre fractionnaire ou même irrationnel, et nous retrouvons ainsi cette échelle du continu mathématique qui a fait l'objet des pages qui précèdent.

Mais il y a plus ; il existe des infiniment petits qui sont infiniment petits par rapport à ceux du premier ordre, et infiniment grands, au contraire, par rapport à ceux de l'ordre $1+\varepsilon$, et *cela quelque petit que soit* ε. Voilà donc des termes nouveaux intercalés dans notre série, et si l'on veut me permettre de revenir au langage que j'employais tout à l'heure et qui est assez commode, bien qu'il ne soit pas consacré par l'usage, je dirai que l'on a créé ainsi une sorte de continu du troisième ordre.

Il serait aisé d'aller plus loin, mais ce serait un vain jeu de l'esprit ; on n'imaginerait que des symboles sans application possible, et personne ne s'en avisera. Le continu du troisième ordre auquel conduit la considération des divers ordres d'infiniment petits est lui-même trop peu utile pour avoir conquis droit de cité, et les géomètres ne le regardent que comme une simple curiosité. L'esprit n'use de sa faculté créatrice que quand l'expérience lui en impose la nécessité.

2° *Une fois en possession du concept du continu mathématique, est-on à l'abri de contradictions analogues à celles qui lui ont donné naissance ?*

Non, et j'en vais donner un exemple :

Il faut être bien savant pour ne pas regarder comme évident que toute courbe a une tangente ; et en effet si l'on se représente cette courbe et une droite comme deux bandes étroites, on pourra toujours les disposer de façon qu'elles aient une partie commune sans se traverser. Que l'on imagine ensuite la largeur de ces deux bandes diminuant indéfiniment, cette partie commune pourra toujours subsister et, à la limite pour ainsi dire, les deux lignes auront un point commun sans se traverser, c'est-à-dire qu'elles se toucheront.

Le géomètre qui raisonnerait de la sorte, consciemment ou non, ne ferait pas autre chose que ce que nous avons fait plus haut pour démontrer que deux lignes qui se traversent ont un point commun, et son intuition pourrait paraître tout aussi légitime.

Elle le tromperait cependant. On peut démontrer qu'il y a des courbes qui n'ont pas de tangente, si cette courbe est définie comme un continu analytique du deuxième ordre.

Sans doute quelque artifice analogue à ceux que nous avons étudiés plus haut aurait permis de lever la contradiction ; mais, comme celle-ci ne se rencontre que dans des cas très exceptionnels, on ne s'en est pas préoccupé. Au lieu de chercher à concilier l'intuition avec l'analyse, on s'est contenté de sacrifier l'une des deux, et comme l'analyse doit rester impeccable, c'est à l'intuition que l'on a donné tort.

H. Poincaré.