J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
8 (1973) 511-539

PARALLÉLISMES

PAULETTE LIBERMANN

À S. S. Chern & D. C. Spencer pour leurs 60ième anniversaires

Introduction

Dans cet article, nous reprenons les résultats obtenus dans des articles antérieurs [26], [27] concernant le parallélisme et le *parallélisme fibré* (appelé "presque parallélisme" dans ces articles), en introduisant la notion de "*connexion partielle*" (et en particulier de foncteur-connexion partielle); à une connexion partielle (qui, étant donnée une surmersion (ξ, X, π), relève une sous-variété ξ' de ξ dans l'espace $J_1\xi$ des éléments de contact de ξ transversaux aux fibres) on associe sa déviation (dont la nullité exprime qu'on a une connexion sur ξ) et sa courbure (obstacle à la pseudointégrabilité). Cette situation intervient fréquemment en Géométrie Différentielle (par exemple une connexion sur un fibré principal n'induit pas toujours une connexion sur un sous-fibré principal); nous montrons que les *connexions de Cartan* au sens de C. Ehresmann [5] ainsi que le parallélisme fibré associé à une surmersion (E, M, π) sont des connexions partielles.

Les deux premiers sections résument les résultats de [25] et [27] concernant la théorie des prolongements des variétés et des groupoïdes différentiables introduite par C. Ehresmann. Ensuite nous formulons certaines idées de M. Lazard [20] concernant le parallélisme en termes de jets et de groupoïdes différentiables; en particulier l'intégrabilité d'un parallélisme est équivalente à celle d'un foncteur-connexion.

Après avoir défini les connexions partielles, nous étudions le *parallélisme de Cartan*: toute connexion de Cartan sur un fibré principal définit un parallélisme d'un type particulier [5]; nous montrons que réciproquement tout parallélisme de Cartan est induit par une connexion de Cartan; nous montrons également en utilisant les résultats de [5] que toute connexion de Cartan intégrable au sens de C. Ehresmann induit un parallélisme intégrable et nous généralisons un résultat de S. Kobayashi [16]. Nous étudions ensuite les parallélismes de Cartan de *type réductif*; par utilisation du théorème de Frobenius, nous retrouvons (en les étendant au cas Banachique) certains résultats de A. Lichnerowicz [28], Kobayashi-Nomizu [17], concernant les espaces localement réductifs.

La considération des déplacements infinitésimaux des groupoïdes associés

Received June 12, 1973.

aux fibrés principaux [5], [7] conduit à la notion de parallélisme fibré qui généralise celle de fibration principale; un parallélisme fibré sur une surmersion (E, M, π) étant un isomorphisme de TE sur $T_{\text{red}}E \times_M E$ (où $T_{\text{red}}E \to M$ est un fibré vectoriel), si ce parallélisme fibré est pseudo-intégrable, alors le faisceau $\boldsymbol{T}_{\text{red}}E$ des germes de sections de $T_{\text{red}}E$ est un faisceau d'algèbres de Lie; si, de plus, les champs invariants sont projetables, le parallélisme fibré est intégrable (ce qui correspond à une connexion intégrable) et l'on obtient pour T_{red} E un *algébroïde de Lie* au sens de J. Pradines. Si le parallélisme fibré est intégrable et si le faisceau $\boldsymbol{T}_{\text{red}}E$ est isomorphe à $\boldsymbol{T}_{\text{red}}P$ (où P est un fibré principal), alors E est localement isomorphe à P. Cet isomorphisme est global quand les "translations" du parallélisme fibré sont définies sur E tout entier. Pour terminer, nous démontrer qu'un parallélisme fibré sur (E, M, π) induit un parallélisme fibré pour les prolongements $(\mathscr{C}^q_B E, M, \pi^q)$.

Si l'on considère une famille $\mathscr{C}_\lambda$: $\xi' \to J_1\xi$ de connexions partielles, en imposant à $\mathscr{C}_\lambda(\xi')$ d'appartenir à une sous-variété de $J_1\xi$, on pourrait définir une tenseur de structure (ce que l'on fait pour les connexions principales). Ceci peut également s'étendre à l'ordre supérieur: aux structures infinitésimales de type fini (définies localement par des systèmes de Mayer-Lie [7], [22]), correspond un parallélisme (on est amené au théorème de Frobenius d'ordre supérieur [25], [30]).

1. Definitions et notations

Pour tout couple (A, B) d'espaces de Banach, on désignera par: $L(A, B)$ (resp. $L^2(A; B)$) l'espace des applications linéaires (resp. bilinéaires) continues de A (resp. $A \times A$) dans B; $L^2_a(A; B) \subset L^2(A; B)$ l'espace des applications alternées; $L^2_S(A; B)$ l'espace des applications symétriques. De même Isom A est l'ensemble des isomorphismes de A.

Si (E, M, π) et (E', M, π') sont des fibrés vectoriels, on définira les espaces vectoriels (de base M):

$$L_M(E, F) = \bigcup_{x \in M} L(E_x ; F_x) ,$$

$$L^2_M(E ; F) = \bigcup_{x \in M} L^2(E_x ; F_x) ,$$

$$L^2_{M,a}(E ; F) = \bigcup_{x \in M} L^2_a(E_x ; F_x) ,$$

où E_x et F_x sont les fibres $\pi^{-1}(x)$ et $\pi'^{-1}(x)$.

Toutes les variétés seront supposées réelles, différentiables (c'est-à-dire) de classe C^∞) bien que certains résultats soient valables avec des conditions plus faibles. *Chaque variété sera modelée sur un espace de Banach (éventuellement de dimension finie).*

Pour toute variété M, on désignera par TM et $H(M)$ le fibré tangent et l'espace des repères.

Nous désignerons par *groupe de Lie* une variété G (*de dimension finie ou infinie*) munie d'une structure de groupe telle que les applications $(x, y) \to xy$ et $x \to x^{-1}$ soient différentiables.

Une *surmersion* ("fibre manifold") (E, M, π) est une submersion surjective $\pi: E \to M$; une fibration est une surmersion localement triviale.

Etant données deux surmersions (E, M, π) et (E', M, π'), la sous-variété de $E \times E'$, ensemble des couples $(y, y') \in E \times E$ tels que $\pi(y) = \pi'(y')$ sera désignée par produit fibré $E \times_M E$ ou bien par fibré image réciproque π^*E' de E' par π.

Le *fibré vertical* VTE est l'ensemble des vecteurs tangents aux fibres $E_x = \pi^{-1}(x)$ de la surmersion (E, M, π).

J_qE est l'espace des q-jets des sections locales de (E, M, π). En particulier J_1E s'identifie à l'espace des sous-espaces vectoriels de TE qui sont *transversaux* c'est-à-dire supplémentaires topologiques des éléments de VTE. On démontre que la surmersion $J_1E \to E$ définit sur J_1E une structure de fibré affine attaché au fibré vectoriel $L_E(\pi^*TM, VTE)$.

Une *connexion du premier ordre* pour la surmersion (E, M, π) est un relèvement différentiable

$$C: E \to J_1E;$$

c'est donc un opérateur différentiel d'ordre 1. Cette connexion s'identifie à une scission de la suite exacte de fibrés vectoriels:

$$0 \to VTE \to TE \to \pi^*TM \to 0 .$$

Si (E, M, π) est un fibré vectoriel, une connexion linéaire est, de plus, un morphisme de fibrés vectoriels. Si (P, M, π) est une fibration principale, une connexion principale est une connexion dont les espaces horizontaux sont invariants par les translations à droite du groupe structural.

En raison du théorème de Frobenius une connexion $C: E \to J_1E$ est *intégrable* ou *plate* (c'est-à-dire pour tout $y \in E$, il existe une section $s: U \subset M \to E$ telle que $s(\pi(y)) = y$ et $j_x^1 s \in C(E)$ pour tout $x \in U$) si et seulement si l'application composée

$$E \xrightarrow{C} J_1E \xrightarrow{j^1C} J_1J_1E$$

prend ses valeurs dans J_2E (cf. [25]); alors le germe de solution est unique.

Si M est connexe et si pour tout $y_0 \in E$ la solution correspondante est définie sur M, alors cette solution est unique et il existe une *résolvante* (cf. M. Lazard [20]) c'est-à-dire une application différentiable $\mathscr{R}: M \times E \to E$ telle que cette solution s'écrive $y = \mathscr{R}(x, y_0) = \mathscr{R}_{y_0}(x)$, avec $\mathscr{R}_{y_0}(x_0) = y_0$.

Pour toute connexion $C: E \to J_1E$, on démontre [25] (en utilisant le fait que $J_1J_1E \to J_1E$ est un fibré affine de base M) qu'il existe un relèvement

$$\rho\colon E \to L^2_{E,a}(\pi^*TM;\, VTE)$$

ou *courbure* de C dont la nullité est équivalente à l'intégrabilité de C.

Soit M une variété modelée sur un espace de Banach $\boldsymbol{B}$; pour tout espace de Banach A, on désigne par T^q_AM, l'ensemble des q-jets de A dans M, de source 0 (pour $A = \boldsymbol{R}$ et $q = 1$, on obtient le fibré tangent TM). Les q-vitesses inversibles de T^q_BM constituent le fibré principal $H^q(M)$ des q-repères de M. Pour toute surmersion (E, M, π), on définit le sous-espace $\mathscr{C}^q_BE$ de T^q_BE (appelé sous-espace des q-vitesses *transverses* aux fibres): $\mathscr{C}^q_BE$ est l'image réciproque de $H^q(M)$ par la projection $T^q\pi\colon T^q_BE \to T^q_BM$).

On démontre [25]:

Proposition 1.1. *$\mathscr{C}^q_BE$ est difféomorphe au produit fibré $J_qE \times_M H^q$* (Toute application $\sigma\colon U \subset B \to E$ telle que $j^q_0\sigma \in \mathscr{C}^q_BE$ définit un difféomorphisme $\varphi = \pi \circ \sigma$ si U est un voisinage suffisamment petit de 0 et $s = \sigma \circ \varphi^{-1}$ est une section locale de E).

On démontre [25] que si (P, M, π) est une fibration principale, alors $\mathscr{C}^q_BP \to M$ est une fibration principale de groupe structural $T^q_B(G) \times \boldsymbol{L}^q_B$, où $\boldsymbol{L}^q_B$ est le groupe structural de $H^q(M)$.

La projection $\mathscr{C}^q_BP \to H^q(M)$ est un morphisme de fibrés principaux. Il est à remarquer [25] que $\mathscr{C}^q_BP$ s'identifie à un sous-fibré principal de l'espace $H^q(P)$ des q-repères de P, tout élément de $\mathscr{C}^q_BP$ déterminant un q-jet inversible de $\boldsymbol{B} \times T_eG$ (où T_eG est l'espace tangent à G en e) dans P.

Si τ^q_A est la projection $T^q_AM \to M$, on a les projections $T\tau^q_A\colon TT^q_AM \to TM$, $\tau\colon TT^q_AM \to T^q_AM$, $T^q_A\tau\colon T^q_ATM \to T^q_AM$. On démontre alors [26]:

Théorème 1.1 (*de Schwarz*). *Il existe un difféomorphisme canonique*

$$\psi^q_A\colon TT^q_AM \to T^q_ATM$$

tel que $\tau = T^q_A\tau \circ \psi^q_A$ et $T\tau^q_A = \tau^q_A \circ \psi^q_A$. De plus pour la surmersion (E, M, π), on a:

$$\psi^q_B(T\mathscr{C}^q_BE) = \mathscr{C}^q_BTE\ .$$

La démonstration utilise le lemme de Schwarz pour les espaces de Banach: au moyen d'une carte locale, on démontre que tout élément de TT^q_AM ou de T^q_ATM est le "jet partiel" (cf. [6]) d'une application $\boldsymbol{R} \times A \to M$.

On retrouve l'involution canonique $TTM \to TTM$.

Au moyen d'une application $R \times U$ (U ouvert de M) $\to E$, on démontre de même [15]: il existe un isomorphisme de J_qVTE sur VTJ_qE.

2. Groupoïdes différentiables

Un groupoïde ϕ est une catégorie dont tous les morphismes sont inversibles; ϕ peut être défini comme une classe d'éléments (on supposera dans la suite que

ϕ est un ensemble) muni d'une loi de composition partielle satisfaisant les axiomes suivants:

1°) Tout $f \in \phi$ admet une unité à droite unique $\alpha(f)$ et une unité à gauche unique $\beta(f)$, une unité étant un élément e tel que $eg = g$ et $he = h$ toutes les fois que ces composés sont définis.

2°) gf est défini si et seulement si $\alpha(g) = \beta(f)$.

3°) Si $(hg)f$ est défini, il en est de même de $h(gf)$ et alors on a $(hg)f = h(gf)$.

4°) Pour tout f, il existe f^{-1}(unique) tel que $ff^{-1} = \beta(f)$, $f^{-1}f = \alpha(f)$.

Un groupoïde ayant une seule unité est un groupe.

L'ensemble M des unités de ϕ est la base de ϕ. On a les applications $\alpha\colon \phi \to M$ (*source*), $\beta\colon \phi \to M$ (*but*) et $\alpha \times \beta\colon \phi \to M \times M$. Le groupoïde est transitif si $(\alpha \times \beta)$ est surjectif.

Un *groupoïde différentiable* ϕ est une variété différentiable munie d'une structure de groupoïde telle que:

1°) L'ensemble M des unités de ϕ est une sous-variété de ϕ.

2°) Les applications α et β sont des surmersions (elles sont donc différentiables).

3°) La loi de composition $(f, f') \to ff'$ (définie sur le produit fibré des surmersions α et β, donc sur une sous-variété de $M \times M$) est différentiable.

4°) L'application $f \to f^{-1}$ est un difféomorphisme de ϕ sur ϕ.

Exemples de groupoïdes différentiables. 1) Le produit $M \times M$ (où M est une variété); c'est un groupoïde transitif dont les unités sont les éléments de la diagonale Δ_M.

2) Si (E, M, π) est une surmersion, alors le produit fibré $E \times_M E$ est un groupoïde intransitif.

3) Un groupoïde tel que $\alpha = \beta$ est un groupoïde somme de groupes (par exemple un fibré vectoriel).

4) Un groupe de Lie.

5) Un *groupoïde de Lie* ϕ est un groupoïde tel que $(\alpha \times \beta)$ soit une surmersion de ϕ sur $M \times M$, il est donc transitif; on démontre qu'il est localement trivial.

L'image réciproque de la diagonale Δ_M par $\alpha \times \beta$ est un groupoïde somme de groupes; on en déduit que pour toute unité x_0, l'ensemble $\phi_{x_0} = \alpha^{-1}(x_0)$ est un fibré principal, de groupe structural $(\alpha \times \beta)^{-1}(x_0)$.

Inversement si (P, M, π) est une fibration principale, de groupe structural G (ou G-fibration principale), l'ensemble des isomorphisme de fibres sur fibres est un groupoïde ϕ [5], qui sera appelé *groupoïde associé* à P; ce groupoïde peut être défini come le quotient $(P \times P)/\rho$ où ρ est la relation d'équivalence: $(y, y') \sim (yg, y'g)$ $\forall g \in G$.

Par exemple le groupoïde $\Pi^q(M)$ des q-jets inversibles de M dans M s'identifie au groupoïde associé à $H^q(M)$, espace des q-repères sur M.

Si P est un group de Lie dont G est un sous-groupe-variété au sens de M. Lazard [20], la base M étant l'espace homogène P/G, alors le groupoïde associé est difféomorphe au produit $P \times P/G$.

Une *section inversible* d'un groupoïde différentiable quelconque ϕ est une α-section $U \subset M \to \phi$ telle que l'application $U \to M$ définie par $x \to \beta s(x)$ soit un difféomorphisme. L'ensemble des sections inversibles de ϕ est un pseudogroupe pour la multiplication suivante: $(s, s') = s''$ où s'' est la section $x \to s'(\beta(x))s(x)$. Donc l'ensemble $\phi^{(\lambda)}$ (resp. $\phi^{(q)}$) des germes (resp. des q-jets) de sections inversibles de ϕ est un groupoïde ($\phi^{(q)}$ est appelé le $q^{\text{ième}}$ prolongement de ϕ).

Si ϕ est le groupoïdoïde associé à un fibré principal P, on démontre [25]:

Proposition 2.1. *Il y a correspondance biunivoque entre automorphismes locaux du fibré principal P et sections locales inversibles du groupoïde associé ϕ. Par suite si Γ est le pseudogroupe des automorphismes locaux de P le groupoïde $\mathscr{J}^{\lambda}(\Gamma)$ s'identifie au produit fibré $P \times_M \phi^{(\lambda)}$ et le groupoïde $\mathscr{J}^{q}(\Gamma)$ au produit fibré $P \times_M \phi^{(q)}$.*

L'automorphisme local $f: \pi^{-1}(U) \to P$ (c'est-à-dire l'application f telle que $f(yg) = f(y)g \; \forall y \in \pi^{-1}(U), \forall g \in G$) correspond à la section $U \to \phi$ qui à tout x associe la classe dans ϕ de $(y, f(y))$ où y est un élément quelconque de la fibre P_x. Deux q-jets Y^q et Y'^q, éléments de $\mathscr{J}^q(\Gamma)$, de sources y et y' définissent le même élément de $\phi^{(q)}$ si et seulement si l'on a: $y' = yg (g \in G)$, $Y^q = j^q_y f$, $Y'^q = j^q_{yg} f$, c'est-à-dire encore Y'^q est le jet composé $Y^q \cdot j^q_{yg}\delta_{g^{-1}}$ (où $\delta_{g^{-1}}$ est la translation à droite $z \to zg^{-1}$). Même propriété pour $\mathscr{J}^{\lambda}(\Gamma)$.

Remarque. $\phi^{(q)}$ est le groupoïde associé au fibré principal $\mathscr{C}^q_B P$.

Si ϕ et ϕ' sont deux groupoïdes différentiables quelconques, un *foncteur* F: $\phi \to \phi'$ est une application différentiable appliquant unité sur unité, tell que $F(fg) = F(f)F(g)$ toutes les fois que fg est définie.

Par exemple un *repère mobile* dans un espace homogène P/G peut être défini comme un foncteur $F: V \times V \to P \times P/G$ (groupoïde associé à P considéré comme fibré principal). Si G est le groupe $SO(n)$, P le groupe des déplacements euclidiens de $\boldsymbol{R}^n$, on retrouve la théorie du repère mobile usuelle.

On désignera, (pour tout groupoïde différentiable ϕ) par *foncteur-connexion* un foncteur $C: \phi \to \phi^{(1)}$ (on a bien une connexion puisque $\phi^{(1)}$ est contenu dans $J_1\phi$).

Pour tout groupoïde différentiable ϕ, un *déplacement infinitésimal* est un vecteur tangent à ϕ, appartenant à $V^\alpha T\phi$ (c'est-à-dire vertical pour la projection α et dont l'origine est une unité de ϕ).

Si l'on désigne par depl ϕ l'ensemble de tous les déplacements infinitésimaux, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{depl}\,\phi & \longrightarrow & V^\alpha T\phi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[i]{} & \phi\ . \end{array}$$

Toute section locale $U \subset M \to \text{depl}\,\phi$ définit sur $\beta^{-1}(U)$ un champ α-vertical, invariant à droite; le faisceau **depl** ϕ des germes de sections de depl ϕ est donc un faisceau d'algèbres de Lie (c'est même un *algébroïde de Lie* au sens de J. Pradines [31]). Ainsi $V^{\alpha}T\phi$ est le produit fibré des applications depl $\phi \to M$ et $\beta: \phi \to M$.

Si $\alpha = \beta, \phi$ est une somme de groupes; M est l'ensemble des unités de ces groupes et depl ϕ *est un fibré en algèbre de Lie*. On a $VT\phi =$ depl $\phi \times_M \phi$. Si ϕ est un fibré vectoriel, depl ϕ s'identifie à ϕ.

Si ϕ est le groupoïde trivial $M \times M$, depl ϕ s'identifie à l'ensemble des vecteurs verticaux pour la première projection, dont l'origine appartient à la diagonale Δ_M; on retrouve le point de vue développé par B. Malgrange [29] et D. Spencer [34]; de même si l'on a une surmersion (E, M, π), alors depl $E \times_M E$ s'identifie à VTE.

Si ϕ est le groupoïde associé à un fibré principal, il y a un *difféomorphisme canonique* de depl ϕ *sur* TP/G, espace des vecteurs tangents à P, mod. les translations à droite de G: si Λ est l'application $P \times P \to \phi = (P \times P)/\rho$, l'image réciproque par Λ de $\gamma(I)$ (où $\gamma: I \to \phi$ est un chemin tel que $j_0^1\gamma \in$ depl ϕ) est la classe $(\delta(0)G, \delta(I)G)$ où δ est un chemin $I \to P$.

On posera depl $P = TP/G$ et l'on a $TP =$ depl $P \times_M P$. Dans le cas d'un espace homogène P/G, on retrouve les déplacements infinitésimaux de la théorie du repère mobile.

Remarque (cf. [25]). A tout morphisme de fibrés principaux $P \to P'$ correspond un foncteur $\phi \to \phi'$ pour les groupoïdes associés; en particulier, à un relèvement $P \to \mathscr{C}_B P$ correspond un foncteur connexion $\phi \to \phi^{(1)}$; inversement le foncteur connexion $C: \phi \to \phi^{(1)}$ ne détermine un relèvement $C': P \to \mathscr{C}_B P$ que si l'on se donne, en outre, le relèvement d'un élément quelconque y de P.

3. Remarques sur le parallélisme

Nous allons formuler en termes de groupoïdes différentiables et de foncteurs-connexions certaines idées de M. Lazard [20] concernant le parallélisme.

Soit M une variété différentiable modelée sur un espace de Banach $\boldsymbol{B}$. Un parallélisme sur M peut être défini par la donnée d'un espace de Banach $T_{\text{red}}M$ (isomorphe à $\boldsymbol{B}$) et d'un difféomorphisme

$$\omega: M \times T_{\text{red}}M \to TM$$

tel que pour tout $x \in M$, l'application ω_x définie par $\omega_x(u) = \omega(x, u)$ est un isomorphisme de $T_{\text{red}}M$ sur T_xM.

Pour toute application différentiable $f: U \subset M \to M$, on définit [20] sa *différentielle réduite* $D_{\text{red}}f: U \to \boldsymbol{L}(T_{\text{red}}M, T_{\text{red}}M)$ par $D_{\text{red}}f(x) = \omega_{f(x)}^{-1} \circ T_xf \circ \omega_x$.

Un champs de vecteurs X sur M est dit *invariant* si "son expression réduite" $p_1 \circ \omega^{-1} \circ X: M \to T_{\text{red}}M$ (où p_1 est la projection $T_{\text{red}}M \times M \to T_{\text{red}}M$) est *constante*.

En réalité $T_{\text{red}}M$ n'est défini qu'à un isomorphisme près, alors que la notion de champ invariant est indépendant du choix de $T_{\text{red}}M$. De même pour tout couple $(x, x') \in M \times M$, l'isomorphisme $\omega_{x'} \circ \omega_x^{-1}$ de T_xM sur $T_{x'}M$ est indépendant du choix de $T_{\text{red}}E$; cet isomorphisme s'identifie à un 1-jet inversible, de source x, but x', de M dans M. On vérifie que l'application $\mathscr{C}: M \times M \to \Pi^1(M)$ (ensemble dès 1-jets inversibles de M) est un foncteur-connexion. D'où

Propositition 3.1. *Un parallélisme ω définit un foncteur-connexion*

$$\mathscr{C}: M \times M \to \Pi^1(M)$$

où $\Pi^1(M)$ est le groupoïde des 1*-jets de difféomorphismes locaux de M.*

Definition 3.1. On désignera par *translation* du parallélisme une solution du système différentiel $\mathscr{C}$, c'est-à-dire un difféomorphisme local $f: U \subset M \to M$ tel que $j_x^1 f = \mathscr{C}(x, f(x))$ pour tout $x \in U$ (c'est-à-dire $D_{\text{red}}f(x) = id_{T_{\text{red}}M}$).

Le pseudogroupe Δ des translations est un pseudogroupe de type fini.

Definition 3.2. Le parallélisme ω est dit *intégrable* si la connexion $\mathscr{C}$ est intégrable c'est-à-dire encore si le pseudogroupe des translations est *transitif* sur M.

Dans ce cas, $\forall(x, x') \in M \times M$, il existe une translation de source x, but x' et son germe est unique, donc le groupoïde $\mathscr{J}^\lambda(\Delta)$ des germes de translations est *étalé* sur $M \times M$.

Remarquons que M. Lazard a démontré que si M est connexe et admet un parallélisme intégrable tel que les *translations soient globales*, alors le choix d'un point $x_0 \in M$ définit sur M une structure de *groupe de Lie*.

Soit un foncteur-connexion $\mathscr{C}$ (non nécessairement intégrable) ; il relève tout champ de vecteurs X tangent à M, en un champ $Y = \mathscr{C}(X)$, tangent à $M \times M$, horizontal relativement à cette connexion ; Y est défini par

$$Y(x, x') = (X(x), \omega_{x'} \circ \omega_x^{-1} X(x))$$

(c'est l'extension de X au sens de M. Lazard). On a immédiatement:

Proposition 3.2. *Un champ X sur M est invariant si et seulement son relèvement naturel $M \times M \to TM \times TM$ défini par $(x, x') \to (X(x), X(x'))$ est horizontal pour la connexion $\mathscr{C}$.*

Du théorème de Frobenius, on déduit [20]:

Proposition 3.3. *Le parallélisme ω est intégrable si et seulement si le crochet de deux champs invariants est invariant.*

On a alors une structure d'algèbre de Lie dans $T_{\text{red}}M$.

Le parallélisme sera dit *proprement intégrable* si $T_{\text{red}}M$ est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie (condition toujours réalisée en dimension finie).

La *courbure* de la connexion $\mathscr{C}: M \times M \to \Pi^1(M)$, obstacle à l'intégrabilité est d'après § 1 une application $M \times M \to L^2_{M \times M, a}(TM; TM)$, qui à (x, x')

associe un élément de $L^2_a(T_xM\,;\,T_{x'}M)$; au moyen du parallélisme ω, on en déduit la courbure réduite:

$M \times M \to L^2_a(T_{\mathrm{red}}M\,;\,T_{\mathrm{red}}M)$, qui n'est autre que le "Frobenius réduit" au sens de M. Lazard de l'application $\mathrm{id}_{T_{\mathrm{red}}M}$. Ce "Frobenius réduit" est encore l'application $(x, x') \to \mathrm{cro}(x) - \mathrm{cro}(x')$, où cro est l'application $M \to L^2_a(T_{\mathrm{red}}M\,;\,T_{\mathrm{red}}M)$ définie par la condition: si A et B sont les éléments de $T_{\mathrm{red}}M$, alors $\mathrm{cro}(x).\,(A, B)$ est l'expression réduite en x du champ de vecteurs $[X, Y]$, où X et Y sont les champs de vecteurs d'expressions réduites A et B.

Exemples. 1) Les parallélismes d'un groupe de Lie définis par la translation à droite et les translations à gauche sont intégrables.

2) Le parallélisme défini sur la sphère S_7 par les octaves de Cayley n'est pas intégrable.

3) De même la quadratique Q_7, sous-variété de $\boldsymbol{R}^8$, définie par $\sum_{i=1}^{4}(x^i)^2 - \sum_{j=5}^{8}(x^j)^2 = 1$, est muni d'un parallélisme non intégrable, défini au moyen des "octaves de Cayley de deuxième espèce" [22] (l'algèbre de ces octaves admet comme groupe d'automorphismes le groupe simple $\boldsymbol{G}_2'$, forme réelle non compacte du groupe complexe dont le groupe exceptionnel $\boldsymbol{G}_2$ est la forme compacte); d'autre part Q_7 étant difféomorphe à $S_3 \times \boldsymbol{R}^4$, admet une structure de groupe.

4) D'après un théorème de Kuiper, si A est un espace de Hilbert de dimension infinie le groupe $\mathrm{Isom}(A)$ est contractile; on en déduit [3] que toute variété différentiable paracompacte modelée sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie est parallélisable.

Remarquons que le parallélisme ω sur M induit une *section* dans l'espace des repères $H(M)$, d'où une connexion à courbure nulle dans $H(M)$; les trajectoires des champs invariants sont les géodésiques de cette connexion [35].

4. Connexions partielles

Soit une surmersion (ξ, X, π) et soit ξ' une sous-variété non ouverte de ξ; si la restriction π' de π à ξ' est une surmersion, ξ sera appelée *π-sous-variété* de ξ ("fibered submanifold" au sens de H. Goldschmidt [15]). Alors $VT\xi' = \operatorname{Ker} \pi'$ est un sous-fibré vectoriel (de base ξ') de $i^*VT\xi$ (où i est l'injection $\xi' \to \xi$).

Definition 4.1. Une *connexion partielle* associée au couple (ξ, ξ') est un relèvement différentiable

$$C\colon \xi' \to i^*J_1\xi\ .$$

Toute connexion $\xi \to J_1\xi$ induit sur ξ' une connexion partielle mais toute connexion partielle ne se prolonge pas nécessairement en une connexion sur ξ.

Definition 4.2. La connexion partielle sera dite *adaptée* si elle relève ξ'

dans $J_1\xi'$ (c'est-à-dire si C est une connexion sur ξ').

Soit $N(\xi') = i^*T\xi/T\xi'$ le fibré normal à ξ' et q la projection $i^*T\xi \to N(\xi')$. En considérant, pour tout $y \in \xi'$, $C(y)$ comme un élément de $L(T_{\pi'(y)}X, T_y\xi)$, on définit la *déviation* de C; c'est l'application

$$\mathscr{D}: \xi' \to L_{\xi'}(\pi'^*TX, N(\xi'))$$

telle que $\mathscr{D}(y) = q(y) \circ C(y)$.

Par définition on a:

Proposition 4.1. *Une connexion partielle est adaptée si et seulement si sa déviation est nulle.*

Definition 4.3. Une connexion partielle sera dite *transversale* (resp. *strictement transversale*, *inadaptée*) en y si la déviation $\mathscr{D}(y)$ est surjective directe (resp. bijective, injective directe). La connexion partielle sera dite transversale, strictement transversale ou indaptée, si cette propriété a lieu en tout $y \in \xi'$.

Soit $\mathscr{H}_y$ l'image par $C(y)$ de $T_{\pi'(y)}x$. Alors les propriétés suivantes

1) $\mathscr{H}_y \subset T_y\xi$,
2) $\mathscr{H}_y + T_y\xi' = T_y\xi$,
3) $\mathscr{H}_y \bigoplus T_y\xi' = T_y\xi$ (en dimension finie dim ξ — dim ξ' = dim M),
4) $\mathscr{H}_y \cap T_y\xi' = 0$ (en dimension finie dim ξ — dim $\xi' \geq$ dim M)

sont respectivement équivalentes à: C est adaptée, transversale, strictement transversale, inadaptée en y.

$\mathscr{H}_y$ sera dit élément de contact *horizontal*.

Une *pseudosolution* d'une connexion partielle $C: \xi' \to i^*J_1\xi$ est une section locale $s: U \subset M \to \xi$ dont le but a une intersection non vide avec ξ' et telle que pour tout $x \in s^{-1}(\xi')$, on a $j^1_x s \in C(s(x))$. Si la connexion partielle est transversale (ou strictement transversale), alors une pseudosolution est transversale (ou strictement transversale) à ξ'; dans ce cas $s^{-1}(\xi')$ est une sous-variété de M (de dimension 0 si C est strictement transversale).

Une connexion partielle sera dite *pseudo-intégrable* si pour tout couple de champs de vecteurs locaux tangents à ξ et dont la restriction à ξ' est horizontale, le crochet possède la même propriété. Ainsi la restriction à ξ' d'une connexion intégrable sur ξ est pseudo-intégrable. On peut ainsi définir la *pseudo-courbure* d'une connexion partielle, obstacle à la pseudo-intégrabilité; c'est une application:

$$\xi' \to L^2_{\xi',a}(\pi'^*TX; i^*VT\xi) .$$

Remarque. On peut également définir la *pseudotorsion* τ d'une connexion partielle (nulle quand celle-ci est adaptée); c'est l'application $\tau: \xi' \to L_{\xi'}(\pi'^*TX, i^*VT\xi)/L_{\xi'}(\pi'^*TX, VT\xi')$, obtenue de la manière suivante: pour tout $z \in (J_1\xi')_y$, on a $C(y) - z \in L(T_{\pi'(y)}X, VT_y\xi)$; si $z' \in (J_1\xi')_y$, alors $z - z' \in L(T_{\pi'(y)}X, VT_y\xi')$, et dans $L(T_{\pi'(y)}X, VT_y\xi)/L(T_{\pi'(y)}X, VT_y\xi')$ la classe $\tau(y)$ de $C(y) - z$ est indépendante du choix de z.

Parmi les connexions partielles, on définit les *connexions partielles principales* définies sur un G-sous-fibré principal P d'un fibré principal $\mathscr{P}$ (connexions partielles invariantes par les translations à droite du groupe G); elles se prolongent en connexions principales sur $\mathscr{P}$. La pseudocourbure d'une connexion partielle principale est la restriction à P de la courbure de la connexion principale qui la prolonge. On définit de même des *foncteurs-connexions partielles* dont nous verrons des exemples ultérieurement.

Exemples de connexions partielles principales. 1°) Soit la fibration principale (H, M, π) où H est l'espace des repères de M (variété modelée sur l'espace de Banach $\boldsymbol{B}$) on considère un G-sous-fibré-principal H_G de H (c'est-à-dire une G-structure), où G a pour algèbre de Lie g.

Si l'on se donne une connexion symétrique sur H, elle induit sur H_G une connexion partielle dont la pseudotorsion est une application $\tau: H_G \to L_{H_G}(\pi' TM, i^* VTH)/L_{H_G}(\pi' TM, i^* VTH_G)$; comme VTH est difféomorphe à $H \times L(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B})$ et VTH_G difféomorphe à $H_G \times \underline{g}$, on peut définir une pseudotorsion réduite sur H_G; c'est une application $\tau': H_G \to L^2(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{B})/L(\boldsymbol{B}, \underline{g})$.

Si l'on considère l'ensemble des connexions symétriques sur H, on définit le *tenseur de structure* de H_G au sens de C. Ehresmann; c'est une application $H_G \to L^2_s(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}) \backslash L^2(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{B})/L(\boldsymbol{B}, \underline{g})$, dont la nullité exprime que H_G admet une connexion symétrique.

On peut définir de même un tenseur de structure d'ordre supérieur (cf. [21], [24], [25]).

2°) *Connexions de Cartan* (cf. [5]). Soit un $\mathscr{G}$-fibré principal $(\mathscr{P}, M, \pi)$ et soit (P, M, π') un G-sous-fibré principal. La notion de connexion de Cartan introduite par C. Ehresmann est équivalente à la suivante: une forme θ de connexion de Cartan est une forme sur P à valeurs dans $T_e\mathscr{G}$ telle que

1) θ est la restriction à P d'une forme de connexion Θ sur $\mathscr{P}$,

2) pour tout $y \in P$, la restriction θ_y de θ à T_yP est un isomorphisme de T_yP sur $T_e\mathscr{G}$.

Une connexion de Cartan sur P est donc une connexion partielle; comme pour tout $y \in \mathscr{P}$, le noyau de Θ_y est l'espace horizontal $\mathscr{H}_y$, alors si $y \in P$, on a: $T_yP \oplus \mathscr{H}_y = T_y\mathscr{P}$, d'où:

Théorème 4.1. *Une connexion de Cartan est une connexion partielle principale strictement transversale*; *cf.* [36].

La *courbure* d'une connexion de Cartan θ sur P introduite dans [5] est la restriction à P de la courbure de la connexion principale Θ: c'est donc la *pseudocourbure* de la connexion partielle.

Notons qu'on a un isomorphisme de T_yP sur $VT_y\mathscr{P}$.

Les connexions de Cartan au sens large introduites par C. Ehresmann [5] en remplaçant dans la condition 2°) l'isomorphisme par une application injective sont des connexions partielles inadaptées.

Une forme de connexion de Cartan définit un isomorphisme de TP sur $P \times T_e\mathscr{G}$, d'où un parallélisme sur P [5]. Dans le cas d'une connexion de

Cartan au sens large, on a encore un parallélisme sur P, défini par un isomorphisme de TP sur $P \times A$, où A est un sous-espace vectoriel de $T_e\mathscr{G}$.

5. Parallélisme de Cartan sur les fibrés principaux

On dira qu'une surmersion (E, M, π) admet un *parallélisme vertical* s'il existe un espace de Banach $VT_{\mathrm{red}}E$ et un isomorphisme. $\tilde{\omega}: VT_{\mathrm{red}}E \times E \to VTE$. On a la notion de champs verticaux invariants.

Une G-fibration principale (P, M, π) admet un *parallélisme vertical canonique* [5]; c'est l'application $\tilde{\omega}: T_eG \times P \to VTP$ définie par

$$\tilde{\omega}(u, y) = T_e\varphi_y(u) \qquad \forall u \in T_eG\,, \qquad \forall y \in P\,,$$

(où $\varphi_y: G \to P$ est définie par $\varphi_y(g) = \varphi(y, g) = yg$).

On sait [5] qu'à la translation $\delta_g = \varphi_g$, correspond au moyen de ce parallélisme, l'isomorphisme Ad (g^{-1}) de T_eG dans T_eG. Les champs invariants sont les champs fondamentaux [17]; à chacun de ces champs correspond un groupe à un paramètre de translations à droite δ_{g_t} du groupe G.

Soit Γ le pseudogroupe des automorphisme locaux de P (cf. § 2); tout $f \in \Gamma$ laisse invariant tout champ fondamental et $\lambda \in \Pi^1(P)$ (groupoïde des 1-jets inversibles de P dans P) appartient à $\mathscr{J}^1(\Gamma)$ si et seulement s'il vérifie la propriété suivante: λ (considéré comme isomorphisme de T_yP sur $T_{y'}P$) transforme tout $Y_y \in VT_yP$ en $Y_{y'} \in VT_{y'}P$ tel que Y_y et $Y_{y'}$ appartiennent au même champ fondamental.

Soit ϕ le groupoïde associé à P et $\phi^{(1)}$ son premier prolongement (cf. § 2).

Théorème 5.1. *Si le groupoïde associé ϕ à un G-fibré principal P admet un foncteur connexion $\mathscr{C}: \phi \to \phi^{(1)}$, alors $\mathscr{C}$ détermine sur P un parallélisme $\omega: A \times P \to TP$ tel que*

1°) *T_eG est un sous-espace vectoriel direct de A et la restriction de ω à $T_eG \times P$ est le parallélisme vertical canonique,*

2°) *pour tout $g \in G$, la différentielle réduite $D_{\mathrm{red}}\,\delta_g$ est constante (définissant ainsi une action de G sur A telle que la restriction de $D_{\mathrm{red}}\,\delta_g$ à T_eG s'identifie à* Ad (g^{-1}).

Inversement tout parallélisme sur P vérifiant les conditions 1°) *et* 2°) *est induit par un foncteur connexion $\phi \to \phi^{(1)}$.*

Preuve. La condition 1°) est, d'après les remarques antérieures, équivalente à:

1') Le relèvement $C: P \times P \to \Pi^1(P)$ induit par le parallélisme est à valeurs dans $\mathscr{J}^1(\Gamma)$.

D'après § 3, $D_{\mathrm{red}}\delta_g(y) = \omega_{yg}^{-1} \circ T_y\delta_g \circ \omega_y$ (où ω_y est l'isomorphisme de A sur T_yP induit par ω); la condition 2°) est donc équivalente à:

2') $\forall (y, y') \in P \times P$, $\forall g \in G$, $\omega_{yg}^{-1} \circ T_y\delta_g \circ \omega_y = \omega_{y'g}^{-1} \circ T_{y'}\delta_g \circ \omega_{y'}$ c'est-à-dire $T_{y'}\delta_g \circ \omega_{y'} \circ \omega_y^{-1} = \omega_{y'g} \circ \omega_{yg}^{-1} \circ T_y\delta_g$; cette condition exprime que si $C(y, y') = j_y^1 f$, alors $C(yg, y'g) = j_{yg}^1 f$. Le théorème résulte alors de la proposition 2.1.

Un parallélisme sur P vérifiant les conditions du théorème sera appelé *parallélisme de Cartan* car le parallélisme associé à une connexion de Cartan en est un cas particulier (dans ce cas P est un sous-fibré principal d'un $\mathscr{G}$-fibré principal tel que $T_e\mathscr{G}$ s'identifie à A comme espace vectoriel).

Propriété. Les translations (au sens de § 3) d'un parallélisme de Cartan appartiennent au pseudogroupe Γ: elles sont définies dans des ouverts saturés de P et se projettent suivant des difféomorphismes locaux de M.

Exemple 1. Si P est un groupe, le parallélisme sur P associé aux translations à gauche de ce groupe définit une connexion de Cartan [5]; cette connexion de Cartan correspond au relèvement canonique $\phi \to \phi^{(1)}$ défini de la manière suivante:

ϕ est difféomorphe au produit $P/G \times P$ (cf. § 2) et ϕ s'identifie au sous-groupoïde de $\phi^{(1)}$, formé des 1-jets des sections de ϕ définies par les graphes des applications constantes de P/G dans P.

Exemple 2. La sphère S_7 admet un parallélisme défini au moyen des octaves de Cayley.

On vérifie que ce parallélisme est un parallélisme de Cartan pour la SU_2-fibration principale de S_7, de base S_4 et pour la fibration principale de S_7, de base $P_3(C)$, de fibre S_1.

Remarque. D'après § 2, le groupoïde $\phi^{(1)}$ est associé au fibré principal $\mathscr{C}_BP$; par suite un parallélisme de Cartan $\phi \to \phi^{(1)}$ définit, un élément de $\mathscr{C}_BP$ étant choisi, un morphisme de fibrés principaux $P \to \mathscr{C}_BP$ et par suite (comme d'après § 1, il existe un morphisme canonique $\mathscr{C}_BP \to H(M)$) un *morphisme de fibrés principaux* $P \to H(M)$). On retrouve ainsi un résultat de [5]. D'ailleurs d'après § 1, $\mathscr{C}_BP$ s'identifie à un sous-fibré de $H(P)$ et l'on a un isomorphisme de $T_eG \times \boldsymbol{B}$ sur A, mais, en général, $D_{\text{red}}\delta_g$ ne laisse pas $\boldsymbol{B}$ invariant.

Par contre G opère sur A/T_eG; soit alors G' le produit semi-direct $G \times (A/T_eG)$ et P' le fibré principal $P \times_G G'$ obtenu par extension du groupe structural G à G'. Le choix d'un supplémentaire topologique de T_eG dans A définit un isomorphisme de $T_eG' = T_eG \times (A/T_eG)$ sur A et l'on obtient une connexion de Cartan, d'où:

Théorème 5.2. *Tout parallélisme de Cartan est induit par une connexion de Cartan.*

Soit E' le fibré vectoriel associé à P', de fibre type A/T_eG. Il existe un isomorphisme de E' sur TM défini de la manière suivante: pour tout $y \in P$, l'application $T_y\pi \circ \omega_y$ s'annulant sur T_eG définit par passage au quotient un isomorphisme f_y de A/T_eG sur $T_{\pi(y)}M$. On obtient ainsi une interprétation du morphisme de P dans $H(M)$ induit par un parallélisme de Cartan. Le fibré vectoriel E' est *soudé* à sa base M au sens de [5].

Remarque. Si l'on part d'une connexion de Cartan sur P obtenue à partir d'une connexion partielle strictement transversale dans un $\mathscr{G}$-fibré principal $\mathscr{P}$ le fibré principal P' considéré dans la démonstration du théorème ne coïncide pas en général avec $\mathscr{P}$. Soit ξ $(M, F, \mathscr{G}, \mathscr{P})$ le fibré associé à $\mathscr{P}$, de fibre type

$F = \mathscr{G}/G$; il est soudé à M d'où une section $s: M \to \xi$ (cf. [5]). Le fibré vectoriel E' associé à P' s'identifie à l'espace $s^*VT\xi$ des vecteurs tangents aux fibres de ξ le long de $s(M)$.

En utilisant la proposition 2.1 et le théorème 5.1 on vérifie que *l'intégrabilité d'un parallélisme de Cartan au sens de* § 3 *est équivalente à l'intégrabilité du foncteur-connexion* $\phi \to \phi^{(1)}$.

Proposition 5.1. *Si une fibration principale admet un parallélisme de Cartan, alors le crochet d'un champ fondamental et d'un champ invariant quelconque est invariant.*

En effet si Y est fondamental, il engendre un groupe à un paramètre de translations δ_{g_t}; chaque δ_{g_t} ayant une différentielle réduite constante transforme un champ invariant en un champ invariant.

Donc pour vérifier l'intégrabilité, il suffit de considérer le crochet de tout couple de champs invariants non fondamentaux.

Une connexion de Cartan sur P est dite *intégrable* au sens de C. Ehresmann [5] si elle est la restriction d'une connexion principale intégrable.

Théorème 5.3. *Pour qu'un parallélisme de Cartan* ω *soit intégrable il faut et il suffit qu'il soit induit par une connexion de Cartan intégrable.*

Preuve. Soit sur un G-fibré principal P une forme de connexion de Cartan θ, restriction d'une forme de connexion Θ sur un $\mathscr{G}$-fibré principal $\mathscr{P}$. L'application $\Lambda: P \times \mathscr{G} \to \mathscr{P}$ définie par $\Lambda(y, s) = ys^{-1}$ et telle que $\Lambda(y, s) = \Lambda(yg, sg)$ $\forall\, g \in G$ se prolonge en $T\Lambda: TP \times T\mathscr{G} \to T\mathscr{P}$. Il résulte de l'étude faite dans [5], que si $Y_y \in T_yP$ et $Z_s \in T_s\mathscr{G}$ vérifient $\theta(Y_y) = T_s s^{-1}(Z_s)$, alors $T\Lambda(Y_y, Z_s)$ est horizontal pour la connexion sur $\mathscr{P}$; d'autre part, on vérifie (en utilisant les propriétés des parallélismes de Cartan) que si Y et Z sont de champs de vecteurs sur P et $\mathscr{G}$, invariants pour les parallélismes respectifs sur P et $\mathscr{G}$ et ayant même expression réduite, alors le couple (Y, Z) est projetable par Λ sur $\mathscr{P}$ (et définit donc un champ horizontal sur $\mathscr{P}$). Pour que la connexion sur $\mathscr{P}$ soit intégrable, il faut et il suffit que le parallélisme sur $P \times \mathscr{G}$ soit intégrable; comme $\mathscr{G}$ est un groupe, il suffit que le parallélisme sur P soit intégrable.

Corollaire. *Pour qu'un parallélisme de Cartan soit intégrable, il faut et il suffit qu'il soit induit par une connexion de Cartan à courbure nulle.*

Ce corollaire a été démontré en dimension finie dans [16] dans un cas très particulier.

Remarque. Si une connexion de Cartan sur P est la restriction d'une connexion intégrable Θ sur $\mathscr{P}$, alors P *est transverse au feuilletage horizontal* défini par cette connexion Θ: d'après la définition des connexions partielles strictement transversales, tout $y \in P$ admet un voisinage v dans $\mathscr{P}$ tel que la trace dans v de toute feuille horizontale rencontre P ainsi que la fibre $\mathscr{P}_{\pi(y)}$ de $\mathscr{P}$ en un point et un seul: d'où un difféomorphisme local de P sur $\mathscr{P}_{\pi(y)}$ donc sur $\mathscr{G}$ (on retrouve le parallélisme intégrable de P); la base est alors un espace localement homogène (cf. [5]).

Si le groupe d'holonomie de la connexion est réduit à l'identité, P admet alors un parallélisme global.

6. Parallélismes de Cartan de type réductif

Etant donné un parallélisme de Cartan $\omega: A \times P \to TP$ sur un G-fibré principal (P, M, π), il n'existe pas nécessairement sur P de connexion principale *compatible avec le parallélisme* c'est-à-dire telle que $\forall (y, y') \in P \times P$, les éléments de contact horizontaux $\mathscr{H}_y$ et $\mathscr{H}_{y'}$ se déduisent l'un de l'autre par l'isomorphisme $\omega_{y'} \circ \omega_y^{-1}$.

Théorème 6.1. *Etant donné sur P un parallélisme de Cartan $\omega: A \times P \to TP$, pour qu'il existe une connexion principale sur P compatible avec le parallélisme, il faut et il suffit qu'il existe un supplémentaire topologique $\mathscr{M}$ de T_eG dans A tel que $\mathscr{M}$ soit invariant par $D_{\text{red}}\delta_g$ pour tout $g \in G$. Il y a correspondance bijective entre supplémentaires de T_eG vérifiant cette propriété et connexions principales compatibles avec ω.*

En effet si la connexion principale est compatible avec ω, l'image de $\mathscr{H}_y$ par ω_y^{-1} est indépendante de $y \in P$. Inversement si $\mathscr{M}$ est invariant par $D_{\text{red}}\delta_g$, ses images par les isomorphismes ω_y définissent un champ d'éléments de contact horizontaux invariant par les translations δ_g.

Un parallélisme de Cartan vérifiant les conditions du théorème sera dit *de type réductif* car ce théorème généralise une propriété des espaces homogènes réductifs (notre définition de type réductif est différente de celle de J. Wolf [35]). Dans ce cas les champs invariants dont l'expression réduite est un élément de $\mathscr{M}$ sont *horizontaux.*

Exemples. 1°) A toute connexion linéaire sur M (modelée sur $\boldsymbol{B}$) c'est-à-dire à toute connexion principale sur l'espace des repères $H(M)$ est associée une connexion de Cartan, restriction d'une connexion affine; on a $G = \boldsymbol{L_B} = \text{Isom}\, \boldsymbol{B}$ et $\mathscr{G} = \boldsymbol{L_B} \times \boldsymbol{B}$ (produit semi-direct); les champs invariants horizontaux sont les champs basiques (leur expression réduite est un élément de $\boldsymbol{B}$).

2°) A toute connexion principale dans l'espace $H^q(M)$ des reprères d'ordre q, est associée de même une connexion de Cartan sur $H^q(M)$ car le groupe structural $\boldsymbol{L_B^q}$ (au moyen de la projection $\boldsymbol{L_B^q} \to \boldsymbol{L_B}$) opère sur $\boldsymbol{B}$ et $\mathscr{G} = \boldsymbol{L_B^q} \times \boldsymbol{B}$.

De même si Q est un sous-fibré principal de $H^q(M)$, toute connexion principale sur Q définit sur Q une connexion de Cartan. *C'est le cas des structures projectives et conformes.*

Proposition. 6.1. *Le morphisme de fibrés principaux $P \to H(M)$ induit par un parallélisme de Cartan ω, transforme, si ω est de type réductif, toute connexion principale γ sur P compatible avec ω en une connexion linéaire γ' sur M, les champs invariants horizontaux de γ étant transformés en champs basiques de γ'; par suite les trajectoires des champs invariants horizontaux de γ se projettent sur M suivant les géodésiques de γ'.*

Preuve. Le morphisme $\chi: P \to H(M)$ déterminé par ω se projette suivant

id_M; donc χ transforme γ en une connexion γ' sur $H(M)$ et pour tout $y \in P$, $T_y\chi$ définit un isomorphisme de l'espace horizontal $\mathscr{H}_y$ de T_yP sur l'espace horizontal $\mathscr{H}'_{\chi(y)}$ de $T_{\chi(y)}H$; donc d'après les hypothèses $D_{\mathrm{red}}\chi(y) = \omega'^{-1}_{\chi(y)} \circ T_y\chi \circ \omega_y$ définit un isomorphisme de $\mathscr{M}$ sur $\boldsymbol{B}$ indépendant de y.

Dans le cas particulier où P est un groupe (P/G espace homogène réductif), on retrouve les propriétés de la connexion linéaire canonique [17], [28].

En raison de la proposition 5.1, pour qu'un parallélisme de Cartan de type réductif sur P soit intégrable, il faut et il suffit que le crochet de tout couple de champs invariants horizontaux (relativement à une connexion principale compatible avec ω) soit invariant. D'après § 3, il suffit donc, pour une décomposition $A = T_eG \oplus \mathscr{M}$ ($\mathscr{M}$ invariant par G) que la restriction à $\mathscr{M}$ de la fonction crochet $P \to \boldsymbol{L}_a^2(A; A)$ soit constante.

Cette fonction se décompose en une fonction

$$P \to \boldsymbol{L}_a^2(\mathscr{M}; \mathscr{M})$$

(que l'on appelera *torsion* de la connexion principale γ définie par $\mathscr{M}$) et une fonction

$$P \to \boldsymbol{L}_a^2(\mathscr{M}, T_eG)$$

qui est la *courbure* de la connexion γ. On a donc.

Proposition 6.2. *Pour qu'un parallélisme de Cartan ω sur P, de type réductif, soit intégrable, il faut et il suffit que la courbure et la torsion de toute connexion principale γ sur P, compatible avec ω soient constantes sur P.*

Si P est un groupe, on retrouve une propriété connue. Remarquons que si le parallélisme sur P est intégrable, alors $A = T_eG \oplus \mathscr{M}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie en général distincte de l'algèbre de Lie du produit semidirect $T_eG \times \mathscr{M}$.

Cas particulier. Le parallélisme associé dans un sous-fibré principal H_G de $H(M)$ à une connexion principale γ sur H_G est intégrable si et seulement si la courbure et la torsion de γ sont constantes sur H_G.

Definition 6.1. Une connexion principale γ sur $H(M)$ sera dite *de type* l.r. s'il existe un sous-fibré principal H_G de $H(M)$ (dit *adapté* à γ) tel que:

1°) γ induit une connexion principale γ_G sur H_G,

2°) la courbure et la torsion de γ_G sont constantes sur H_G.

Si γ est de type l.r., par tout $h \in H$, passe un fibré adapté: soit $s \in \boldsymbol{L_B}$ tel que $h = h_0s$ où $h_0 \in H_G$; alors le sous-fibré $H_{G'} = H_Gs$, de groupe structural $\mathrm{Ad}\,(s)G$ est adapté.

Désignons par $\mathscr{R}$ et $\mathscr{T}$ la courbure et la torsion d'une connexion γ sur $H(M)$ et par ∇ la dérivation covariante correspondante.

Proposition 6.3. *Pour qu'une connexion γ soit de type* l.r., *il faut, et si M est de dimension finie, il suffit que*:

$$\nabla\mathscr{R} = 0\,, \qquad \nabla\mathscr{T} = 0\,.$$

En effet si l'on relève tout chemin de M en un chemin horizontal sur un fibré adapté, les champs de tenseurs $\mathscr{R}$ et $\mathscr{T}$ sont invariants par parallélisme.

D'autre part si M est de dimension finie, le fibré d'holonomie passant par tout $h \in H(M)$ (c'est-à-dire l'ensemble des repères qui peuvent être joints à h par une courbe différentiable par morceaux) est un sous-fibré principal de $H(M)$ (son groupe structural est un groupe de Lie comme sous-groupe connexe par arcs de L_B) tel que γ induise une connexion sur Q. Donc Q est adapté si et seulement si $\nabla\mathscr{R} = 0$, $\nabla\mathscr{T} = 0$.

Dans le cas de la dimension infinie, c'est un problème ouvert de savoir si un sous-groupe connexe par arcs d'un groupe de Lie est un groupe de Lie.

Rappelons qu'un difféomorphisme local $f\colon U \subset M \to M$ est dit un *automorphisme local d'une connexion linéaire* (ou *transformation affine*) si le relèvement $f^1\colon \pi^{-1}(U) \to H$ de f dans H (défini par $h \to j^1_x f.h$ où $x = \pi(h)$) vérifie la condition: $T_h f^1$ applique le sous-espace horizontal de $T_h H$ sur le sous-espace horizontal de $T_{f^1(h)}H$, pour tout $h \in \pi^{-1}(U)$.

Proposition 6.4. *Un difféomorphisme local de M est un automorphisme d'une connexion linéaire γ si son relèvement f^1 dans $H(M)$ est une translation pour le parallélisme de Cartan associé à la connexion; réciproquement toute translation est le relèvement d'un automorphisme local de la connexion.*

Preuve. le parallélisme défini par γ est un isomorphisme $\omega\colon H \times (L(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}) \oplus \boldsymbol{B}) \to TH$ et définit un foncteur-connexion $\mathscr{C}\colon H \times H \to \mathscr{J}^1(\Gamma)$ (où Γ est le pseudogroupe des automorphismes locaux du fibré principal H); la condition imposée à f^1 peut s'écrire: $D_{\text{red}}f^1(h) = \omega^{-1}_{f^1(h)} \circ T_h f^1 \circ \omega_h$ induit l'identité sur $\boldsymbol{B}$; de même f^1, relèvement de f, appartient à Γ et $D_{\text{red}}f^1(h)$ induit l'identité sur $L(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B})$. Inversement toute translation τ est projetable suivant un difféomorphisme f et comme $j^1_h\tau \in \mathscr{C}(H \times H)$, on a $\tau(h) = j^1_{\pi(h)}f.h$ et τ est le relèvement de f.

Théorème 6.2. *Soit une variété M, une connexion γ de type* l.r. (*induisant sur le fibré H_G une connexion à courbure et torsion constantes*).

1) *Alors le crochet de deux champs invariants sur H_G est invariant.*

2) *Pour tout couple $(x, x') \in M \times M$ il existe un automorphisme local f de la connexion γ tel que $f(x) = x'$; si, de plus, on se donne $j^1_x f \in \pi_G$ (groupoïde associé à H_G), le germe d'automorphisme local est unique.*

3) *S'il existe une variété M' (modelée sur un espace de Banach $\boldsymbol{B}'$ isomorphe à $\boldsymbol{B}$) admettant une connexion γ' de type* l.r. (*de courbure $\mathscr{R}'$ et torsion $\mathscr{T}'$*) *telle qu'un isomorphisme φ de T_xM dans $T_{x'}M'$ transforme $\mathscr{R}(x)$ et $\mathscr{T}(x)$ en $\mathscr{R}'(x')$ et $\mathscr{T}'(x')$, alors il existe aussi un difféomorphisme $f\colon U \subset M \to U' \subset M'$ (où U et U' sont des voisinages de $x \in M$ et $x' \in M'$), tel que $j^1_x f = \varphi$, transformant γ en γ'.*

Preuve. 1) et 2) résultent des propositions 6.2. et 6.4; la propriété 3) résulte du théorème de Frobenius; en effet soit $H_{G'}$ un sous-fibré principal de $H(M')$ adapté à γ' et passant par $h' = \varphi \cdot h$ (où $h \in H_G$); les hypothèses expriment que la courbure et la torsion de γ' en h' sont égales à celles de γ en h; comme la courbure et la torsion sont constantes sur H_G et H'_G, on en déduit un isomorphisme des structures d'algèbres de Lie induites sur A et A' par les parallélismes intégrables sur H_G et $H_{G'}$; d'après [20], le théorème de Frobenius affirme l'existence d'un difféomorphisme local f^1 de H_G sur H'_G dont la différentielle réduite est cet isomorphisme; on vérifie que f^1 se projette suivant une transformation affine f de γ dans γ'.

Definition 6.2. Une variété M sera dite *localement réductive* si elle admet une connexion γ de type l.r. et un fibré principal adapté H_G tels que la structure d'algèbre de Lie $\underline{h}$ induite sur $A = \underline{g} \oplus \boldsymbol{B}$ (où $\underline{g}$ est l'algèbre de Lie de G) soit isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

En dimension finie, cette condition est réalisée pour tout fibré adapté et l'on retrouve *les structures localement réductives* de A (Lichnerowicz [28]).

Si $\mathscr{H}$ est un groupe simplement connexe admettant $\underline{h}$ comme algèbre de Lie ($\mathscr{H}$ est défini à un isomorphisme près [20]), et si $\mathscr{G}$ est le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\underline{g}$, alors l'espace $\mathscr{H}/\mathscr{G}$ est un espace homogène (car un difféomorphisme local $F: \mathscr{U} \subset H_G \to \mathscr{U}' \subset \mathscr{H}$, appliquant $h \in \mathscr{U}$ sur e, transforme la trace sur $\mathscr{U}$ de la fibre issue de h sur $\mathscr{G} \cap \mathscr{U}'$; $\mathscr{G}$ est ainsi localement fermé, donc fermé dans $\mathscr{H}$); cet espace est *réductif* car $\mathrm{Ad}\,(G)\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{B}$.

Du théorème 6.2, on déduit

Théorème 6.3. *Une structure d'espace localement réductif est localement équivalente à une structure d'espace homogène réductif.*

Corollaire. *Si M est de dimension finie, simplement connexe, et admet une connexion complète définissant une structure d'espace localement réductif, alors M est difféomorphe à un espace homogène réductif.*

Ce corollaire résulte d'un théorème de C. Ehresmann [4] sur les espaces localement homogènes.

Ces résultats, qui pourraient s'étendre à des connexions sur des repères d'ordre supérieur, sont à rapprocher de ceux de la fin de § 5.

Remarque. Si le groupe structural G du fibré adapté H_G contient les homothéties (en particulier si $H(M)$ admet un parallélisme intégrable), on peut montrer, comme en dimension finie, qu'alors la courbure et la torsion sont nulles: l'espace localement réductif est localement affine.

Dans ce paragraphe nous avons ainsi étendu au cas banachique certains résultats dûs à A. Lichnerowicz [28], Kobayashi-Nomizu [16], [17].

7. Sur le "parallélisme fibré" et le "parallélisme fibré vertical"

Nous avons remarqué dans § 2, que pour un fibré principal (P, M, π) on avait $TP = \mathrm{depl}\, P \times_M P$ et pour un groupoïde ϕ, somme de groupes, on avait $VT\phi = \mathrm{depl}\, \phi \times_M \phi$. Nous allons étudier systèmatiquement ces situations.

Definition 7.1. On appellera "parallélisme fibré" (resp. "parallélisme fibré vertical") associé à une surmersion (E, M, π) la donnée d'un fibré vectoriel

$$p\colon T_{\text{red}}E \to M \text{ (resp. } \tilde{p}\colon VT_{\text{red}}E \to M)$$

et d'une application

$$\Omega\colon T_{\text{red}}E \times_M E \to TE \text{ (resp. } \tilde{\Omega}\colon VT_{\text{red}}E \times_M E \to VTE) ,$$

où Ω (resp. $\tilde{\Omega}$) est un isomorphisme de fibrés vectoriels de base E, se projetant suivant id_E (d'après § 1, VTE désigne le fibré "vertical" tangent à E).

Les fibrés vectoriels $T_{\text{red}}E$ et $VT_{\text{red}}E$ seront désignés respectivement par *fibré tangent réduit* et *fibré vertical tangent réduit* de E.

Pour tout $y \in E$, on désignera par Ω_y l'isomorphisme d'espace de Banach appliquant $(T_{\text{red}}E)_{x=\pi(y)}$ sur T_yE défini par

$$\Omega_y(u) = \Omega(u, y) \qquad \forall u \in (T_{\text{red}}E)_x .$$

Définition analogue pour $\tilde{\Omega}_y\colon (VT_{\text{red}}E)_x \to VT_yE$.

Remarques. 1°) Si M est réduite à un point le parallélisme fibré est un parallélisme.

2°) Un parallélisme fibré vertical induit *un parallélisme sur chaque fibre* de la surmersion (E, M, π).

3°) Un parallélisme fibré induit un "*déplacement par parallélisme*" le long de chaque fibre de la surmersion (E, M, π).

Proposition 7.1. *Un parallélisme sur E associe à toute surmersion* (E, M, π) *un parallélisme fibré dont le fibré tangent réduit est trivial. Inversement tout parallélisme fibré sur E tel que* $T_{\text{red}}E$ *soit trivial est induit par un parallélisme sur E.*

En effet si A est un espace de Banach, $A \times E$ s'identifie à $(A \times M) \times_M E$, d'où l'isomorphisme $TE \to A \times E \to (A \times M) \times_M E$.

Corollaire. *Si la surmersion* (E, M, π) *admet un parallélisme fibré* Ω, *alors toute fibre* $\pi^{-1}(x)$ *possède un voisinage ouvert* $\pi^{-1}(U)$ *tel que* $\pi^{-1}(U)$ *admette un parallélisme* ω *induisant le parallélisme fibré* Ω *sur* $\pi^{-1}(U)$.

Ce parallélisme est, en effet, défini par un trivialisation $\varphi\colon U \times A \to T_{\text{red}}E|U$.

Propriété. Un parallélisme vertical (cf. § 5) est un parallélisme fibré vertical dont le fibré vertical réduit est trivial.

Remarque. Un parallélisme fibré (E, M, π, Ω) peut ne pas induire de parallélisme sur les fibres. Par exemple si Ω est induit par un parallélisme ω sur E, ω induit un parallélisme sur les fibres si et seulement si celles-ci sont des sous-variétés totalement géodésiques de E (relativement à la connexion linéaire à courbure nulle associée à ω).

Exemples. 1°) Soit la shère S_3, définie par $\sum_{i=1}^{4}(x^i)^2 = 1$; soit E la sous-variété ouverte obtenue en supprimant les pôles $x^4 = \pm 1$ et soit $\pi\colon E \to]-1, +1[$ défini par $\pi(x^1, \cdots, x^4) = x^4$; E est parallélisable mais les fibres, isomorphes à S_2, ne le sont pas.

2°) Soit E un ouvert d'un espace de Banach A et π une fonction unmérique sans points critiques sur E; si π n'est pas une fonction affine, les sous-variétés de niveau de π n'admettent pas un parallélisme induit par les translations de A.

On est ainsi amené à la définition suivante:

Definition 7.2. Un parallélisme fibré (E, M, π, Ω) sera dit *strict* si la restriction de Ω^{-1} à VTE définit un parallélisme vertical.

Si le parallélisme fibré est *strict, l'espace fibré $VT_{\mathrm{red}}E$ est un sous-fibré vectoriel de $T_{\mathrm{red}}E$*; en effet pour tout $y \in E$, l'isomorphisme Ω_y^{-1} applique VT_yE sur un sous-espace fermé direct de $(T_{\mathrm{red}}E)_x$; si Ω est strict, l'image de VT_yE est indépendante de $y \in E$ pour tout $x \in M$.

Remarque. Un parallélisme de Cartan sur un fibré principal induit un parallélisme fibré strict.

Definition 7.3. Un champ de vecteurs Y défini sur E (ou sur un ouvert $\pi^{-1}(U)$ sera dit *invariant* relativement à un parallélisme fibré Ω (ou plus brièvement Ω-invariant) si pour tout couple $(y, y') \in E \times_M E$ (tel que y et y' appartiennent à la source de Y) on a:

$$Y(y') = \Omega_{y'} \circ \Omega_y^{-1} Y(y) .$$

Proposition 7.2. *Il y a correspondance bijective entre champs de vecteurs Ω-invariants et sections du fibré vectoriel p: $T_{\mathrm{red}}E \to M$.*

En effet le champ de vecteurs Y correspond à la section s: $U \to T_{\mathrm{red}}E$ par $Y(y) = \Omega_y s(x)$, où $x = \pi(y)$.

Si le crochet de deux champs Ω-invariants est Ω-invariant, le parallélisme fibré Ω sera dit *pseudo-intégrable* (définition qui sera justifiée en § 8); dans ce cas le faisceau des germes de sections de $T_{\mathrm{red}}E$ est un *faisceau d'algèbres de Lie*; c'est le cas du parallélisme fibré canonique d'un fibré principal (P, M, π).

Remarque. Si le parallélisme fibré Ω est induit par un parallélisme ω sur E, les champs Ω-invariants ne sont pas nécessairement ω-invariants: si $T_{\mathrm{red}}E = A \times M$, les champs Ω-invariants correspondent à des applications d'un ouvert $U \subset M$ dans A, les champs ω-invariants correspondent à des applications constantes.

Le parallélisme peut être intégrable sans que le parallélisme fibré soit pseudo-intégrable et inversement.

On définit de même, pour un parallélisme fibré vertical $\tilde{\Omega}$, les *champs verticaux invariants*: *ils sont en correspondance bijective avec les sections du fibré vectoriel $\tilde{p}$: $VT_{\mathrm{red}}E \to M$.* Si le crochet de deux champs invariants est invariant, le parallélisme fibré vertical sera dit *intégrable*: chaque fibre est munie d'un parallélisme intégrable et $VT_{\mathrm{red}}E$ est un *fibré en algèbres de Lie*.

Un groupoïde différentiable, somme de groupes, admet un parallélisme vertical intégrable. Inversement A. Douady et M. Lazard [2] ont montré

Théorème 7.1. *Si $VT_{\mathrm{red}}E$ est un fibré en algèbres de Lie de dimension* *finie, alors il existe un groupoïde différentiable ϕ, somme de groupes simplement connexes tel que $VT_{\text{red}}E$ soit isomorphe à* depl ϕ.

8. Parallélismes fibrés factorisables (ou projetables)

L'ensemble des parallélismes fibrés de base M forme une catégorie dont les morphismes sont définis de la façon suivante: un morphisme $f\colon E \to E'$ de la catégorie des surmersions de base M sera dit un *morphisme de parallélismes fibrés* (*on p.f. morphisme*) de (E, M, π, Ω) vers (E', M, π', Ω') si l'application suivante (appelée *différentielle réduite* de f)

$$D_{\text{red}}f\colon E \to L_M(T_{\text{red}}E, T_{\text{red}}E')$$

définie par $D_{\text{red}}f(y) = \Omega'^{-1}_{f(y)} \circ f(y) \circ \Omega$ *est constante sur chaque fibre.* Si l'on pose $(T_{\text{red}}f)_x = D_{\text{red}}f(E_x)$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{Tf} & TE' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{\text{red}}E & \xrightarrow{T_{\text{red}}f} & T_{\text{red}}E' \end{array} ;$$

si f et g sont des p.f. morphismes, alors $f \circ g$ est un p.f. morphisme et $T_{\text{red}}(f \circ g) = T_{\text{red}}f \circ T_{\text{red}}g$, ce qui justifie les définitions.

En particulier un morphisme de fibrés principaux est un p.f. morphisme.

Proposition 8.1. *Un p.f. isomorphisme transforme tout champ de vecteurs invariant en un champ de vecteurs invariant. Inversement un morphisme inversible de surmersions qui transforme tout champ Ω-invariant en un champ Ω'-invariant est un p.f. isomorphisme.*

En effet si f est un p.f. isomorphisme, l'isomorphisme $T_{\text{red}}f$ transforme toute section de $T_{\text{red}}E$ en une section de $T_{\text{red}}E'$. Inversement on montre que $D_{\text{red}}f$ doit être constant sur chaque fibre.

Si l'on considère en particulier le parallélisme fibré naturel $TM = TM \times_M M$ associé à la surmersion (M, M, id_M), on définit (pour un parallélisme fibré Ω sur E)

$$D_{\text{red}}\pi\colon E \to L_M(T_{\text{red}}E, TM)$$

par

$$D_{\text{red}}\pi(y) = T_y\pi \circ \Omega_y \ .$$

On en déduit l'application

$$\mathscr{D}_{\text{red}}\colon E \times_M E \to L_M(T_{\text{red}}E, TM)$$

définie par

$$\mathscr{D}_{\text{red}}(y, y') = D_{\text{red}}\pi(y) - D_{\text{red}}\pi(y') = T_y\pi \circ \Omega_y - T_{y'}\pi \circ \Omega_{y'} \ ,$$

que l'on désignera par *déviation réduite* de Ω (définition qui sera justifiée dans § 9).

Definition 8.1. Un parallélisme fibré Ω sera dit *factorisable* (ou *projetable*) si sa déviation réduite est nulle; il sera dit *transversal* si pour tout couple (y, y') tel que $y \neq y'$, $\mathscr{D}_{\text{red}}(y, y')$ est une application surjective directe.

Le parallélisme fibré canonique d'une fibration principale est factorisable.

Proposition 8.2. *Soit (E, M, π, Ω) un parallélisme fibré. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1°) *le parallélisme fibré est factorisable* (*ou projetable*) (*c'est-à-dire* $\forall (y, y') \in E \times_M E$, $T_y\pi \circ \Omega_y = T_{y'}\pi \circ \Omega_{y'}$),

2°) *l'application π est un p.f. morphisme,*

3°) *l'application TM: $TE \to TM$ peut être factorisée en $TE \to T_{\text{red}}E \xrightarrow{r} TM$ (où r est un morphisme surjectif direct de fibrés vectoriels de base M)*,

4°) *tout champ de vecteurs invariant est projetable.*

L'équivalence de 1°, 2°, 3° résulte des définitions et du début de § 8.

L'équivalence de 1° et 4° résulte du fait que $T_y\pi \circ \Omega_y = T_{y'}\pi \circ \Omega_{y'}$ entraine $T_y\pi(Y_y) = T_{y'}\pi(Y_{y'})$ pour tout champ invariant Y et inversement.

Ce sont les propriétés 3° et 4° qui justifient les termes "factorisable" et "projetable".

Remarques. 1°) Un parallélisme fibré factorisable est *strict.*

Donc *une surmersion dont les fibres ne sont pas parallélisables ne peut admettre de parallélisme factorisable* (exemple 1 de § 7).

2°) Si un parallélisme fibré strict admet un parallélisme fibré transversal alors pour tout couple $(y, y') \in E \times_M E$ le noyau de la déviation réduite contient $(VT_{\text{red}}E)_{\pi(y)}$.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que M admet des partitions C^∞ de l'unité.

Proposition 8.3. *Si une surmersion (E, M, π) admit un parallélisme fibré factorisable, elle admet des connexions.*

En effet une connexion est une scission de la suite exacte de fibrés vectoriels de base M:

$$0 \to VT_{\text{red}}E \to T_{\text{red}}E \to TM \to 0 \ .$$

Théorème 8.1. *Si une surmersion (E, M, π) admet* a) *un parallélisme vertical,* b) *des connexions, alors elle admet un parallélisme fibré factorisable. Si, de plus, la surmersion est une fibration alors* a) *entraîne* b).

En effet la connexion définit un isomorphisme de fibrés vectoriels: $TE \to VTE \oplus \pi^*TM$, d'où un isomorphisme $TE \to \pi^*(VT_{\text{red}}E) \oplus \pi^*TM$, c'est-à-dire un parallélisme fibré ω: $\pi^*T_{\text{red}}E \to TE$ avec $T_{\text{red}}E = VTE \oplus TM$.

Il reste à étudier le cas où l'on a une fibration et la condition a): alors tout $x \in M$ admet un voisinage distingué U_i tel que $\pi^{-1}(U_i)$ soit difféomorphe à $U_i \times F_i$ (où en raison de a), F_i est parallélisable); dans $U_i \times F_i$ on a la connexion naturelle qui à $z \in F_i$ associe $T_z U_i$, d'où une connexion dans $\pi^{-1}(U_i)$. D'autre part la surmersion $\beta \colon J_1 E \to E$ admet une structure de fibré affine attaché au fibré vectoriel $L_E(\pi^* TM, VTE)$, c'est-à-dire d'après a) au fibré $\pi^* L_M(TM, VT_{\mathrm{red}} E)$. On peut donc au moyen d'une partition de l'unité "recoller" les sections de $J_1 E$ au dessus des ouverts $\pi^{-1}(U_i)$ d'où une section $E \to J_1 E$.

Corollaire. *Si une surmersion (E, M, π) est une fibration associée à un fibré principal, de groupe structural G et si la fibre type F du fibré E admet un parallélisme invariant par le groupe structural G, alors cette fibration est munie d'un parallélisme fibré factorisable.*

En effet la trivialisation $\varphi_i \colon U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ définit sur $\pi^{-1}(U_i)$ un parallélisme vertical; dans $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ le changement de trivialisation $\varphi_j \circ \varphi_i$ s'exprime par $(x, z) \to (x, g_{ij}(x) z)$ avec $g_{ij}(x) \in G$; donc les parallélismes verticaux induits par φ_i et φ_j se "recollent".

Exemples. 1°) On retrouve une propriété des fibrés vectoriels.

2°) La fibration $S_{15} \to S_8$ dont les fibres sont isomorphes à la sphère S_7.

9. Parallélismes fibrés et connexions partielles

Soit j l'injection du produit fibré $E \times_M E$ dans $E \times E$ et soit $\Pi^1(E)$ le groupoïde des 1-jets inversibles de E dans E.

Théorème 9.1. *Tout parallélisme fibré (E, M, π, Ω) induit un foncteur-connexion partielle*

$$C \colon E \times_M E \to j^* \pi^1(E)$$

dont la déviation $\mathscr{D} \colon E \times_M E \to L_E(TE, \pi^* TM)$ se déduit de la déviation réduite $\mathscr{D}_{\mathrm{red}} \colon E \times_M E \to L_M(T_{\mathrm{red}} E, TM)$ de Ω par $\mathscr{D}(y, y') = \mathscr{D}_{\mathrm{red}}(y, y') \circ \Omega_y^{-1}$.

On justifie ainsi la définition de § 8.

Corollaire. *Le parallélisme fibré Ω est projetable (resp. transversal) si la connexion partielle est adaptée (resp. transversale). Si Ω est projetable, alors C prend ses valeurs dans le groupoïde $\Theta^1(E)$ des 1-jets des sections inversibles du groupoïde $E \times_M E$.*

Remarque. Si le parallélisme Ω est strictement transversal, alors $T_{\mathrm{red}} E$ est isomorphe à TM et E est difféomorphe à M (c'est le cas du parallélisme fibré naturel de (M, M, id_M)).

Démonstration du théoréme 9.1. Le difféomorphisme $\Omega \colon T_{\mathrm{red}} E \times_M E \to TE$ induit une application

$$C \colon E \times_M E \to \bigcup_{(y, y') \in E \times_M E} \mathrm{Isom}\,(T_y E, T_{y'} E)$$

définie par $C(y, y') = \Omega_{y'} \circ \Omega_y^{-1}$ (cf. § 7). Comme tout $\theta \in \Pi^1(E)$, de source

$y = \alpha(\theta)$, de but $y' = \beta(\theta)$ s'identifie à un élément de Isom $(T_y E, T_{y'} E)$, le groupoïde $\bigcup_{(y,y') \in E \times_M E} \operatorname{Isom}(T_y E, T_{y'} E)$ n'est autre que le groupoïde $j^* \Pi^1(E) = (\alpha \times \beta)^{-1}(E \times_M E)$. Comme l'application $y \to \omega_y$ de E dans $L_E(\pi^* T_{\text{red}} E, TE)$ est différentiable, C est différentiable; on vérifie que c'est un foncteur.

Le fibré normal à la diagonal Δ_M de $M \times M$ (considérée comme sous-variété de $M \times M$) s'identifie à TM; l'application $\lambda = \pi \times \pi$ de $E \times E$ sur $M \times M$ étant transversale à Δ_M, son image réciproque $E \times_M E = \lambda^{-1}(\Delta_M)$ admet comme fibré normal $\mu^* TM$ (où μ est la restriction de λ à $E \times_M E$). On a:

$$
\begin{aligned}
&T_{(y, y')}(E \times_M E) \\
&\quad = \{(Y_y, Y_{y'}) \in T_{(y, y') \in E \times_M E} E \times E;\; T_y \pi(Y_y) - T_{y'} \pi'(Y_{y'}) = 0\};
\end{aligned}
$$

si l'on identifie M à Δ_M, la projection $q(y, y')$ de $T_{(y, y') \in E \times_M E}(E \times E)$ sur l'espace normal $T_x M$ (où $x = \mu(y, y')$) n'est autre que l'application $T_y \pi - T_{y'} \pi$. Si l'on considère la surmersion $s: E \times_M E \to E$, l'isomorphisme $\Omega_{y'} \circ \Omega_y^{-1}$ définit un 1-jet de section $(\operatorname{id} T_y E, \Omega_{y'} \circ \Omega_y^{-1}) \in L(T_y E, T_y E \times T_{y'} E)$; d'après § 4, la déviation $\mathscr{D}(y, y')$ est l'application de $T_y E$ dans $T_x M$ définie par:

$$
\begin{aligned}
&(T_y \pi - T_{y'} \pi) \circ (\operatorname{id} T_y E, \Omega_{y'} \circ \Omega_y^{-1}) = (T_y \pi - T_{y'} \pi \circ \Omega_{y'} \circ \Omega_y^{-1}) \\
&\quad = (T_y \pi \circ \Omega_y - T_{y'} \pi \circ \Omega_y) \circ \Omega_y^{-1} = \mathscr{D}_{\text{red}}(y, y') \circ \Omega_y^{-1} .
\end{aligned}
$$

Les champs *Ω-invariants* sont les champs *horizontaux* pour la connexion partielle et le parallélisme fibré Ω est *pseudo-intégrable* si la connexion partielle est pseudo-intégrable.

Dans le cas d'une G-fibration principale (P, M, π) on vérifie que la déviation réduite du parallélisme fibré canonique $\hat{\Omega}$ est nulle; pour tout $g \in G$, on a, en effet, $T_y \pi - T_{yg} \pi \circ T_y \delta_g = 0$; or $T_y \delta_g = \hat{\Omega}_{yg} \circ \hat{\Omega}_y^{-1}$.

Supposons que *cette fibration principale admette un deuxième parallélisme fibré Ω*; la déviation réduite $\mathscr{D}_{\text{red}}(y, yg)$ de Ω est égale à:

$$
\begin{aligned}
&T_{yg} \pi \circ T_y \delta_g \circ \Omega_y - T_{yg} \pi \circ \Omega_{yg} \\
&\quad = T_{yg} \pi \circ \Omega_{yg} \circ (\Omega_{yg}^{-1} \circ T_y \delta_g \circ \Omega_y - \operatorname{id} (T_{\text{red}} P)_{\pi(y)}) \\
&\quad = T_{yg} \pi \circ \Omega_{yg} \circ (D_{\text{red}} \delta_g(y) - \operatorname{id} (T_{\text{red}} P)_{\pi(y)}) ,
\end{aligned}
$$

d'après la définition de la différentielle réduite donnée en § 8.

Si $D_{\text{red}} \delta_g(y)$ ne laisse aucun vecteur non nul, alors l'application $D_{\text{red}} \delta_g(y) - \operatorname{id} (T_{\text{red}} P)_{\pi(y)}$ est injective (et même bijective si P est de dimension finie); par suite $\mathscr{D}_{\text{red}}(y, yg)$ admet $VT_y E$ pour noyau. On en déduit

Proposition 9.1. *Si le parallélisme fibré Ω sur P est induit par un parallélisme de Cartan tel que pour tout $g \in G$, $D_{\text{red}} \delta_g$ ne laisse invariant aucun vecteur non nul, alors les seuls champs Ω-invariants qui soient projetables sont verticaux. Si de plus, P est de dimension finie, le parallélisme fibré est transversal.*

Supposons qu'un fibré principal P (non nécessairement de dimension finie) admette une connexion de Cartan définissant un parallélisme fibré transversal Ω; si existe une translation τ du parallélisme (au sens de § 3), de source U, appliquant $y \in U$ sur yg (c'est-à-dire si $f = (\mathrm{id}\ U, \tau): U \to P \times P$ est une pseudo-solution au sens de § 4 de la connexion partielle définie par Ω), alors d'après les propriétés de la transversalité, $f^{-1}(P \times_M P)$ s'identifie à la trace sur un voisinage de y de la fibre $P_{\pi(y)}$ de P passant par y (c'est-à-dire si $y' \notin P_{\pi(y)}$, alors $\tau(y') \notin P_{\pi(y')}$).

Dans le cas d'un espace homogène P/G (P groupe de Lie), les translations à gauche du groupe G définissent un parallélisme de Cartan; on a: $D_{\mathrm{red}}\delta_g = \mathrm{Ad}\,(g^{-1})$ et la condition dans la proposition 9.1 est équivalente à: G n'admet aucun sous-groupe invariant dans P; on retrouve des résultats de A. Lichnerowicz [28].

Plus généralement, étant donné un feuilletage sur une variété E on pourrait définir un parallélisme le long des feuilles par un relèvement de $S \subset E \times E$ (ensemble des couples (y, y') appartenant à une feuille) dans $\Pi^1(E)$, mais si l'on veut que S soit une sous-variété de $E \times E$ et que l'application $S \to E$ soit une submersion, d'après le critère de Godement [33], le feuilletage doit être régulier et l'on se retrouve dans le cas des fibres d'une surmersion.

10. Parallélismes fibrés intégrables

Un parallélisme fibré (E, M, π, Ω) sera dit intégrable s'il est *projetable* et si la connexion C: $E \times_M E \to \Theta^1(E)$ (groupoïde des 1-jets des sections inversibles de $E \times_M E$) définie par la connexion partielle adaptée (cf. § 9) est une connexion *intégrable*. Donc un parallélisme fibré intégrable est un parallélisme fibré projetable et *pseudo-intégrable* (cf. § 7), c'est-à-dire encore *si Ω est projetable et si le crochet de deux champs invariants est un champ invariant.*

Dans ce cas, le faisceau $\boldsymbol{T}_{\mathbf{red}}E$ des sections de $T_{\mathrm{red}}E$ est un *algébroïde de Lie* au sens de J. Pradines [31]: c'est un faisceau d'algèbres de Lie et la projection r: $T_{\mathrm{red}}E \to TM$ induit un homomorphisme d'algèbres de Lie $\boldsymbol{r}$; $\boldsymbol{T}_{\mathbf{red}}E \to \boldsymbol{TM}$. On a un algébroïde de Lie d'un type particulier car le noyau $VT_{\mathrm{red}}E$ de q: $T_{\mathrm{red}}E \to TM$ est un *fibré en algèbres de Lie*; en effet si Ω est intégrable, il induit un *parallélisme fibré vertical intégrable* (cf. § 7).

Le parallélisme fibré canonique d'une *fibration principale* est intégrable et l'on retrouve pour **depl** P et V depl P des résultats connus.

Si une fibration satisfait les conditions du corrollaire du théorème 8.1 et si la fibre type admet un parallélisme non intégrable (par exemple la fibration $S_{15} \to S_8$), alors le parallélisme fibré factorisable défini par ce corollaire n'est pas intégrable. Même situation pour la fibration $Q_{15} \to Q_8$ (où Q_{15} et Q_8 sont les quadriques difféomorphes à $S_7 \times \boldsymbol{R}^8$ et $S_4 \times \boldsymbol{R}^4$) définie au moyen des "octaves de Cayley de deuxième espèce" [22]; mais au moyen des difféomorphismes $Q_{15} \to S_7 \times \boldsymbol{R}^8$ et $Q_8 \to S_4 \times \boldsymbol{R}^4$, on définit une fibration principale: (Q_{15}, Q_8, π).

Remarque. Etant donné un parallélisme fibré (E, M, π, Ω), l'obstacle à l'intégrabilité est l'ensemble de la *déviation réduite* (cf. § 8) et de *la courbure réduite* $E \to \boldsymbol{L}^2_{M,a}(T_{\text{red}}E\,;\, T_{\text{red}}E)$ (la courbure est l'obstacle à la pseudo-intégrabilité).

Si (E, M, π, Ω) et (E', M, π', Ω') sont des parallélismes fibrés intégrables et si f est un *p.f.* isomorphisme (cf. § 8), f transforme tout champ invariant en un champ invariant; $T_{\text{red}}f$ induit alors un isomorphisme du faisceau $\boldsymbol{T}_{\textbf{red}}E$ sur le faisceau $\boldsymbol{T}_{\textbf{red}}E'$. Réciproquement, on a

Théorème 10.1. *Soient (E, M, π, Ω) et (E', M, π', Ω') des parallélismes fibrés intégrables. S'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$\hat{F}\colon T_{\text{red}}E \to T_{\text{red}}E'$$

(*se projetant suivant le difféomorphisme $F\colon M \to M$*) *induisant sur les faisceaux $\boldsymbol{T}_{\textbf{red}}E$ et $\boldsymbol{T}_{\textbf{red}}E'$ un isomorphisme d'algèbres de Lie, alors pour tout couple $(y, y') \in \xi_F$ (où ξ_F est le produit fibré des applications π' et $F \circ \pi$), il existe un p.f. isomorphisme local (de source un ouvert $V = \pi^{-1}(U)$ contenant y) tel que $f(y) = y'$ et $(T_{\text{red}}f)_x = \hat{F}_x$ pour tout $x \in U$.*

Démonstration. La donnée de $\tilde{F}$ définit un relèvement de ξ_F dans l'espace des 1-jets de la surmersion $\xi_F \to E$, d'où une connexion sur ξ_F. Un couple de champs de vecteurs (Y, Y'), où Y est Ω-invariant et Y' est Ω'-invariant se relève dans ξ_F suivant un champ de vecteurs horizontal; il résulte des hypothèses que le crochet de deux champs horizontaux est un champ horizontal; le théorème de Frobenius permet de démontrer l'existence de f.

Si un parallélisme fibré intégrable (E, M, π, Ω) vérifie les conditions du théorème 10.1 où Ω' est le parallélisme fibré canonique d'une fibration principale, la surmersion (E, M, π) sera dite *localement principale*.

Un parallélisme fibré intégrable ne définit pas nécessairement une structure de surmersion localement principale: une condition pour qu'il en soit ainsi est que le fibré vectoriel $VT_{\text{red}}E \to M$ soit aussi localement trivial quand on le considére comme fibré en algèbres de Lie. Si la dimension des fibres est infinie, cette condition n'est pas suffisante puisqu'il existe des algèbres de Lie non isomorphes à l'algèbre de Lie d'un groupe.

Quand E est de dimension finie, J. Pradines [31] a montré que tout algébroïde de Lie est isomorphe à l'algébroïde depl ϕ d'un groupoïde α-simplement connexe, mais ce groupoïde ϕ n'est pas nécessairement de Lie. Si V depl ϕ est localement trivial au sens précédent, alors (cf. A. Kumpera [18]), ϕ est localement trivial et les fibres $\alpha^{-1}(x)$ sont des fibrés principaux.

Pour tout parallélisme fibré intégrable (E, M, π, Ω), d'après le théorème de Frobénius, $\forall (y, y') \in E \times_M E$, il existe une *translation* locale, c'est-à-dire un difféomorphisme $\tau_{y'y}$ de source $U \subset E$, telle que $\tau_{y'y}(y) = y'$, $j^1_z\tau_{y'y} = \Omega_{y'} \circ \Omega_y^{-1}$ pour tout $z \in U$. L'ensemble $\sum$ des translations constitue un pseudo-groupe de type fini (l'ensemble $J^\lambda\sum$ des germes de translations est étalé sur $E \times_M E$)

se projetant sur le pseudo-groupe des applications identiques des ouverts de M. L'ensemble Γ de tous les p.f. automorphismes locaux f de E constitue un pseudo-groupe contenant $\sum$; pour tout $f \in \Gamma$, nous avons vu que $T_{\mathrm{red}}f$ définit un automorphisme du faisceau $\boldsymbol{T}_{\mathbf{red}}E$ et Γ se projette suivant un pseudo-groupe $T_{\mathrm{red}}\Gamma$ (ensemble de tous les $T_{\mathrm{red}}f$) de base M. Tout $j^\lambda f \in J^\lambda L$, possède la propriété: $\forall (y, y') \in E \times_M E$ (où y et y' appartiennent à la source de f),

$$j^\lambda_{y'} f \circ j^\lambda_y \tau_{yy'} = j^\lambda_z \tau_{zz'} \circ j^\lambda_y f \quad \text{avec} \quad z = f(y), z' = f(y') \ .$$

Donc dans le cas d'une fibration principale, Γ contient les automorphismes locaux de cette fibration principale.

Nous dirons que le parallélisme fibré est *globalement intégrable* si les translations ont pour source E. Alors les translations forment un groupe:

Théorème 10.2. *Si un parallélisme fibré sur une surmersion* (E, M, π) (*telle que E et les fibres soient connexes*) *est globalement intégrable, alors la surmersion est une G-fibration principale* (*où G est le groupe des translations*).

Démonstration (inspirée de [20]). Il résulte des hypothèses de connexité que pour tout $(y, y') \in E \times_M E$, il existe une translation globale $\tau_{y'y}$ et une seule, et l'on a $\tau_{y''y'} \circ \tau_{y'y} = \tau_{y''y}$ et $\tau_{yy} = \mathrm{id}_E$, d'où une structure de groupe sur G; si l'on se fixe $y_0 \in E$, il y a bijection entre G et la fibre E_{x_0} passant par y_0 et entre G et le groupe G_{x_0} des restrictions à E_{x_0} des translations; d'après [20], G_{x_0} est muni d'une structure de groupe de Lie; par transport de structure, on déduit une structure de groupe de Lie sur G. D'autre part G opère différentiablement sur E car la translation $\tau_{y'y}$ est telle que $\tau_{y'y}(z) = \mathscr{R}(y, y', z)$ où $\mathscr{R}$ est la résolvante: $E \times_M E \times E \to E$ du système différentiel $E \times_M E \to \Theta^1(E)$ (cf. [20] et § 1). Alors pour toute section s de E au-dessus d'un ouvert $U \subset M$, on a le difféomorphisme φ_U: $U \times G \to \pi^{-1}(U)$ tel que $\varphi_U(x, g) = s(x)g$. En prenant deux sections, on vérifie les conditions de recollement.

11. Prolongement des parallélismes fibrés

Théorème 11.1. *Si la surmersion* (E, M, π) *admet un parallélisme fibré* Ω: $T_{\mathrm{red}}E \times_M E \to T_{\mathrm{red}}E$, *alors la surmersion* $(\mathscr{C}^q_B E, M, \pi^q)$ *admet le parallélisme fibré*

$$\Omega^q \colon J_q T_{\mathrm{red}} E \times_M \mathscr{C}^q_B E \to T\mathscr{C}^q_B E \ .$$

En effet en raison de § 1, on a la suite de difféomorphismes suivantes:

$$\begin{aligned} T\mathscr{C}^q_B E &\to \mathscr{C}^q_B TE \to J_1 TE \times_M H^q \to J_1(T_{\mathrm{red}} E \times_M E) \times_M H_q \\ &\to J_1 T_{\mathrm{red}} E \times_M J_q E \times_M H^q \to J_q T_{\mathrm{red}} E \times_M \mathscr{C}^q_B E \ . \end{aligned}$$

Corollaire. *Si* (P, M, π) *est une fibration principale, alors pour le fibré principal* $\mathscr{C}^q_B P$, *on a un isomorphisme*:

$$\mathrm{depl}\, \mathscr{C}^q_B P \to J_P \,\mathrm{depl}\, P ;$$

par suite pour un groupoïde de Lie ϕ, on a un isomorphisme

$$J_q \operatorname{depl} \phi \to J_q \operatorname{depl} \phi^q \ .$$

En particulier en partant de la fibration principale triviale (M, M, id_M), (telle que depl $M = TM$), on obtient l'isomorphisme:

$$J_q T \to \operatorname{depl} H^q \ .$$

Cette propriété avait été démontrée [23] en dimension finie en utilisant les groupes locaux à un paramètre (en prouvant l'isomorphisme au moyen de la considération de la dimension).

Théorème 11.2. *Si la surmersion (E, M, π) admet un parallélisme fibré vertical $\tilde{\Omega}: VT_{\mathrm{red}}E \times_M E \to VTE$, alors la surmersion (J_qE, M, π^q) admet le parallélisme fibré vertical*

$$\tilde{\Omega}^q : J_q VT_{\mathrm{red}}E \times_M J_qE \to VTJ_qE \ .$$

En effet on a la suite de difféomorphismes suivantes:

$$VTJ_qE \to J_qVTE \to J_q(VT_{\mathrm{red}}E \times_M E) \to J_qVT_{\mathrm{red}}E \times_M J_qE \ .$$

Ces résultats expliquent pourquoi un "bon" prolongement des fibrés principaux s'obtient au moyen du foncteur $\mathscr{C}^q_B$ et un "bon" prolongement des fibrés vectoriels au moyen du foncteur J_q.

Bibliographie

[1] D. Bernard, *Sur la géométrie différentielle des G-structures,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **10** (1960) 151–270.

[2] A. Douady & M. Lazard, *Espaces fibrés en algèbres de Lie en groupes,* Invent. Math. **1** (1966) 133–151.

[3] J. Eells, Jr., *A setting for global analysis,* Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966) 751–807.

[4] C. Ehresmann, *Sur les espaces localement homogènes,* Enseignement Math. **35** (1936) 317–333.

[5] ——, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable,* Colloq. Topologie (Bruxelles, 1950), Liège, 1951, 29–55.

[6] ——, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie,* Colloq. Topologie et Géométrie Différentielle, Strasbourg, 1953, 97–100.

[7] ——, *Extension du calcul des jets aux jets non holonomes,* C. R. Acad. Sci. Paris **239** (1954) 1762–1764; *Applications de la notion de jet non holonome,* C. R. Acad. Sci. Paris **240** (1955) 397–399; *Les prolongements d'un espace fibré différentiable,* C. R. Acad. Sci. Paris **240** (1955) 1755–1757; *Sur les pseudo-groupes de Lie de type fini,* C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958) 360–362.

[8] ——, *Connexions d'ordre supérieur,* Atti 5ᵉ Congresso Un. Mat. Italiana (Pavia-Torino, 1955), Cremonese, Roma, 1956, 344–346.

[9] ——, *Catégories topologiques et catégories différentiables,* Colloq. Géométrie Différentielle Globale (Bruxelles, 1958), Louvain, 1959, 137–150.

[10] ——, *Grupoides differenciales,* Rev. Un. Mat. Argentina, **19** (1968) 48.

[11] ——, *Espèces de structures locales* (traduction de *Gattungen von lokalen strukturen,* Jber. Deutsch. Math.-Verein. **60** (1957) 49–77), Cahiers Topologie Géom. Différentielle **3** (1961) 1–73.
[12] ——, *Prolongements des catégories différentiables,* Cahiers Topologie Géom. Différentielle **6** (1964).
[13] ——, *Propriétés infinitésimales des catégories différentiables,* Cahiers Topologie Géom. Différentielle **9** (1967) 1–9.
[14] ——, *Catégories différentiables,* Atti Conv. Geom. Differentiale, Bologna, 1967.
[15] H. Goldschmidt, *Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations,* J. Differential Geometry **1** (1967) 269–307.
[16] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry,* Springer, Berlin, 1972.
[17] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Vols. I, II, Interscience, New York, 1963, 1969.
[18] A. Kumpera, *Lie groupoids,* Rio de Janeiro, 1971; A. Kumpera & D. Spencer, *Lie eqations. Vol. I: General theory,* Annals of Math. Studies, No. 73, Princeton University Press, Princeton, 1972.
[19] M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations,* Publ. Soc. Mat. São Paulo, 1967, 1–75.
[20] M. Lazard, *Leçons de calcul différentiel et integral,* à paraîre.
[21] D. Lehmann, *Intégrabilité des G-structures,* Symposia Math., Ist. Naz. Alta Mate., Roma **10** (1972) 127–139.
[22] P. Libermann, Thèse, Strasbourg, 1953; *Sur le problème d'equivalence de certaines structures infinitésimales,* Ann. Mat. Pura Appl. **36** (1954) 27–120.
[23] ——, *Pseudogroupes infinitésimaux,* Colloq. Internat. CNRS Lille, 1958. *Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie,* Bull. Soc. Math. France **87** (1959) 409–425.
[24] ——, *Connexions d'ordre supérieur et tenseur de structure,* Atti Conv. Internat. Geom. Differenziale, Bologna, 1967.
[25] ——, *Sur les prolongements des fibrés principaux et des groupoïdes différentiables banachiques,* Séminaire Analyse Globale, Montreal, 1969.
[26] ——, *Sur le "presque parallélisme",* Differential Geometry, in Honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, 1972, 243–252.
[27] ——, *Groupoïdes différentiables et presque parallélisme,* Symposia Math., Ist. Naz. Alta Mate., Roma **10** (1972) 59–93.
[28] A. Lichnerowicz, *Geométrie des groupes de transformations,* Dunod, Paris, 1958.
[29] B. Malgrange, *Pseudogroupes de Lie elliptiques,* Séminaire Leray, Collège de France, 1969–70, 1–59; *Équations de Lie.* I, II, J. Differential Geometry **6** (1972) 503–522, **7** (1972) 117–141.
[30] J. P. Penot, *Sur le théorème de Frobenius,* Bull. Soc. Math. France **98** (1970) 47–80.
[31] J. Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales,* C. R. Acad. Sci. Paris **263** (1966) 907–910; *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différentiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux,* C. R. Acad. Sci. Paris **264** (1967) 245–248; *Géométrie différentielle au-dessus d'un groupoïde,* C. R. Acad. Sci. Paris **266** (1968) 1194–1196.
[32] N. V. Quê, *Nonabelian Spencer cohomology and deformation theory,* J. Differential Geometry **3** (1969) 165–211.
[33] J. P. Serre, *Lie algebras and Lie groups,* Benjamin, New York, 1965.
[34] D. C. Spencer, Séminaire Analyse Globale, Montreal, 1969.
[35] J. A. Wolf, *On the geometry and classification of absolute parallelisms.* I, II, J. Differential Geometry **6** (1972) 317–342, **7** (1972) 19–44.
[36] P. C. Yuen, *Prolongements des G-structures,* Thèse, Paris, 1970, Esquisses Math.

UNIVERSITÉ DE PARIS VII