

DOCUMENTS

En souvenir de Paulette Libermann (2)

Marc Chaperon

Voici le second volet du petit cours commencé dans le numéro précédent [11] comme commentaire de la thèse de Paulette Libermann. L'exposé rapide de quelques notions de base est illustré entre autres de résultats qui lui sont attribuables. Comme dans [11], *différentiable* signifie « assez différentiable ».

Intégrales de formes différentielles, images inverses, différentielle extérieure

Images directes de chemins, intégrale curviligne, images réciproques de fonctions et de 1-formes

Soit $g : M \rightarrow N$ une application différentiable entre variétés.

L'*image* par g d'un chemin γ à valeurs dans M est le chemin $g_*\gamma := g \circ \gamma$ à valeurs dans N ; de même, l'*image réciproque* (ou *inverse*) par g d'une fonction réelle f sur N est la fonction réelle $g^*f := f \circ g$ sur M .

Quand γ est défini sur un segment $[t_0, t_1]$ (on dit alors que γ est un *arc*), l'*intégrale* (curviligne) le long de γ d'une forme de Pfaff α sur M est par définition

$$\int_{\gamma} \alpha := \int_{t_0}^{t_1} \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt,$$

où $\alpha_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}^*M = (T_{\gamma(t)}M)^*$ désigne la valeur de α au point $\gamma(t)$. Cette intégrale est invariante par changement de paramétrage : si $\varphi : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$ vérifie $\varphi(s_j) = t_j$, alors $\int_{\gamma \circ \varphi} \alpha = \int_{\gamma} \alpha$; lorsque α est la différentielle df d'une fonction réelle f sur M , puisque $df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = (f \circ \gamma)'(t)$,

$$(3) \quad \int_{\gamma} df = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0)) \quad (\text{formule de la moyenne}).$$

Une forme de Pfaff α est déterminée par les $\int_{\gamma} \alpha$; en effet, pour tout $x \in M$ et tout $\mathbf{v} \in T_xM$, il existe¹ un arc $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tel que $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$; si $\gamma_{\varepsilon} : [0, 1] \rightarrow M$ est donné par $\gamma_{\varepsilon}(t) := \gamma(\varepsilon t)$, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \alpha_{\gamma(\varepsilon t)}(\dot{\gamma}(\varepsilon t)) dt = \alpha_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = \alpha_x \mathbf{v}.$$

¹ Prendre une carte φ de M telle que $\varphi(a) = 0$ et un chemin de la forme $\varphi \circ \gamma(t) = \theta(t\varphi_*\mathbf{v}) + t\varphi_*\mathbf{v}$, où $\varphi_*\mathbf{v} = T_x\varphi(\mathbf{v})$ et $\theta : \text{im } \varphi \rightarrow [0, 1]$ est C^∞ à support compact, égale à 1 près de 0.

L'image réciproque par g d'une forme de Pfaff β sur N est la forme de Pfaff $g^*\beta$ sur M telle que $\int_\gamma g^*\beta = \int_{g*\gamma} \beta$ pour tout arc γ dans M ; elle est donnée par la formule

$$(g^*\beta)_x = \beta_{g(x)} \circ T_x g.$$

Pour $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, la formule de dérivation d'une fonction composée, en termes intrinsèques

$$T(f \circ g) = (Tf) \circ Tg,$$

s'écrit donc $g^*df = d(g^*f)$.

Formes différentielles, leur intégrale sur les rectangles paramétrés et leurs images réciproques

Une forme différentielle de degré k ou k -forme différentielle, ou k -forme α sur une variété M est un champ de formes k -linéaires alternées $\alpha_x : (T_x M)^k \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire une section différentiable du fibré vectoriel $\bigwedge^k T^*M$ de base M dont la fibre au-dessus de $x \in M$ est l'espace $L_{\text{alt}}^k(T_x M, \mathbb{R})$ des formes k -linéaires alternées sur $T_x M$; un atlas de ce fibré vectoriel est (naturellement) formé des cartes naturelles $\bigwedge^k T^*\varphi : \alpha_x \mapsto (\varphi(x), (T_x \varphi)_* \alpha_x) \in \text{im } \varphi \times L_{\text{alt}}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, où φ est une carte de M à valeurs dans \mathbb{R}^n (l'application linéaire tangente $T_x \varphi$ va donc de $T_x M$ dans $T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$), $\alpha_x \in L_{\text{alt}}^k(T_x M, \mathbb{R})$ et $(T_x \varphi)_* \alpha_x(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \alpha_x((T_x \varphi)^{-1} \mathbf{v}_1, \dots, (T_x \varphi)^{-1} \mathbf{v}_k)$ pour $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

Pour toute application différentiable $\rho : [0, 1]^k \rightarrow M$, l'intégrale de α le long du rectangle paramétré ρ de dimension k est par définition

$$\int_\rho \alpha := \int_{[0,1]^k} \alpha_{\rho(t)}(\partial_1 \rho(t), \dots, \partial_k \rho(t)) dt$$

(intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^k), où $\partial_j \rho(t) \in T_{\rho(t)} M$ est la dérivée partielle de ρ par rapport au $j^{\text{ième}}$ facteur et $\alpha_{\rho(t)} \in L_{\text{alt}}^k(T_{\rho(t)} M, \mathbb{R})$ désigne la valeur de α au point $\rho(t)$.

Une k -forme α est déterminée par les $\int_\rho \alpha$; en effet, pour $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in T_x M$, il existe² un rectangle paramétré $\rho : [0, 1]^k \rightarrow M$ tel que $\partial_j \rho(0) = \mathbf{v}_j$ pour tout j ; si $\rho_\varepsilon : [0, 1]^k \rightarrow M$ est donné pour $0 < \varepsilon \leq 1$ par $\rho_\varepsilon(t) := \rho(\varepsilon t)$, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_{\rho_\varepsilon} \alpha = \alpha_x(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ comme pour $k = 1$.

Étant donnée une application différentiable $g : M \rightarrow N$ entre variétés, l'image réciproque par g d'une k -forme β sur N est la k -forme $g^*\beta$ sur M telle que $\int_\rho g^*\beta = \int_{g*\rho} \beta$ pour tout rectangle paramétré ρ de dimension k dans M , en notant $g*\rho := g \circ \rho$; elle est donnée par la formule

$$(g^*\beta)_x = \beta_{g(x)} \circ (T_x g)^k,$$

où $(T_x g)^k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := (T_x g(\mathbf{v}_1), \dots, T_x g(\mathbf{v}_k))$ pour $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in T_x M$.

² Même démonstration que pour $k = 1$ en remplaçant $t\varphi_* \mathbf{v}$ par $\sum t_j \varphi_* \mathbf{v}_j$.

La différentielle extérieure

Celle d'une forme de Pfaff α sur M est la 2-forme $d\alpha$ sur M telle que

$$(4) \quad \int_{\rho} d\alpha = \int_{\partial\rho} \alpha$$

pour tout rectangle paramétré $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow M$ de classe C^2 , où $\partial\rho$ désigne le *bord orienté* de ρ , obtenu en mettant bout à bout les chemins $[0, 1] \ni s \mapsto \rho(s, 0)$, $[0, 1] \ni s \mapsto \rho(1, s)$, $[0, 1] \ni s \mapsto \rho(1 - s, 1)$ et $[0, 1] \ni s \mapsto \rho(0, 1 - s)$; elle est donnée par

$$(5) \quad d\alpha_{\rho(t)}(\partial_1\rho(t), \partial_2\rho(t)) = \partial_1(\alpha_{\rho(t)}\partial_2\rho(t)) - \partial_2(\alpha_{\rho(t)}\partial_1\rho(t)).$$

Plus généralement, pour chaque $k \geq 1$, la *différentielle extérieure d'une k-forme* α sur M est la $(k + 1)$ -forme $d\alpha$ sur M vérifiant (4) pour tout rectangle paramétré ρ de dimension $k + 1$ en posant

$$\int_{\partial\rho} \alpha := \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \left(\int_{\partial\rho_i^1} \alpha - \int_{\partial\rho_i^0} \alpha \right),$$

où les « faces » $\partial\rho_i^j$ de ρ sont les rectangles paramétrés de dimension k définis par

$$\partial\rho_i^j(s) := \rho((s_\ell)_{\ell < i, j}, (s_\ell)_{\ell \geq i}), \quad s = (s_1, \dots, s_k) \in [0, 1]^k, \quad j = 0, 1;$$

l'identité (5) est le cas particulier $k = 1$ de la formule³

$$(6) \quad d\alpha_{\rho(t)}(\partial_1\rho(t), \dots, \partial_{k+1}\rho(t)) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \partial_i \left(\alpha_{\rho(t)} \left((\partial_\ell\rho(t))_{\ell < i}, (\partial_\ell\rho(t))_{\ell > i} \right) \right),$$

qui résulte de (4), de la formule de la moyenne et du théorème de Fubini : en effet, en notant par exemple $\alpha(\partial_1\rho(t), \dots, \partial_k\rho(t)) := \alpha_{\rho(t)}(\partial_1\rho(t), \dots, \partial_k\rho(t))$,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\rho_i^1} \alpha - \int_{\partial\rho_i^0} \alpha \\ &= \int_{[0,1]^k} \left(\alpha \left(\partial_{s_j}\rho((s_\ell)_{\ell < i}, 1, (s_\ell)_{\ell \geq i}) \right)_{1 \leq j \leq k} - \alpha \left(\partial_{s_j}\rho((s_\ell)_{\ell < i}, 0, (s_\ell)_{\ell \geq i}) \right)_{1 \leq j \leq k} \right) ds \\ &= \int_{[0,1]^k} \int_0^1 \partial_\tau \alpha \left(\partial_{s_j}\rho((s_\ell)_{\ell < i}, \tau, (s_\ell)_{\ell \geq i}) \right)_{1 \leq j \leq k} d\tau ds \\ &= \int_{[0,1]^{k+1}} \partial_i \alpha \left((\partial_\ell\rho(t))_{\ell < i}, (\partial_\ell\rho(t))_{\ell > i} \right), dt \end{aligned}$$

en posant $t := ((s_\ell)_{\ell < i}, \tau, (s_\ell)_{\ell \geq i})$. Naturellement, le « miracle » est que le second membre de (6) ne dépende que des $\partial_j\rho(t)$; il se vérifie en se ramenant par une carte au cas où M est un ouvert U de \mathbb{R}^n et en utilisant le fait qu'alors $\partial_i\partial_\ell\rho = \partial_\ell\partial_i\rho$.⁴

³ Valide lorsque ρ est une application C^2 à valeurs dans M définie sur un ouvert ou un « ouvert à coins » de \mathbb{R}^k , par exemple $[0, 1]^k$.

⁴ Dans ce cas, α s'identifie à une application de U dans $L_{\text{alt}}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (sa seconde composante) et $d\alpha : U \rightarrow L_{\text{alt}}^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est donnée par $d\alpha(x)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} D\alpha(x)(\mathbf{v}_i)((\mathbf{v}_\ell)_{\ell < i}, (\mathbf{v}_\ell)_{\ell > i})$, $x \in U$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

Cette définition de la différentielle extérieure n'est pas trop intrinsèque, mais elle a le mérite de montrer qu'une k -forme est faite pour être intégrée sur des objets de dimension k , la différentiation extérieure apparaissant comme duale (« cobord ») du « bord orienté » ∂ grâce à la formule de Stokes⁵ (4) – qui généralise (3) et entraîne à peu de frais les autres « formules de Stokes ».

Il résulte aussitôt des définitions de l'image inverse et de la différentielle extérieure que

$$(7) \quad d(g^* \beta) = g^* d\beta$$

pour toute application différentiable $g : M \rightarrow N$ entre variétés et toute forme différentielle β sur N .

Par ailleurs, pour toute k -forme différentielle α sur M ,

$$(8) \quad dd\alpha = 0.$$

En effet, l'intégrale de $dd\alpha$ sur tout rectangle paramétré $\rho : [0, 1]^{k+2} \rightarrow M$ est nulle car

$$\int_{\rho} dd\alpha = \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{i+1} \left(\int_{\partial\rho_i^1} d\alpha - \int_{\partial\rho_i^0} d\alpha \right) = \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{i+1} \left(\int_{\partial\partial\rho_i^1} \alpha - \int_{\partial\partial\rho_i^0} \alpha \right),$$

autrement dit

$$\int_{\rho} dd\alpha = \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \left(\int_{\partial(\partial\rho_i^1)_j^1} \alpha - \int_{\partial(\partial\rho_i^1)_j^0} \alpha - \int_{\partial(\partial\rho_i^0)_j^1} \alpha + \int_{\partial(\partial\rho_i^0)_j^0} \alpha \right),$$

somme où « chaque face de dimension k de ρ apparaît deux fois et avec des signes opposés⁶ » car

$$\partial(\partial\rho_i^{\ell})_j^m = \partial(\partial\rho_j^m)_{i-1}^{\ell}, \quad 1 \leq j < i \leq k+2, \quad \ell, m \in \{0, 1\}.$$

Une forme différentielle β est *fermée* lorsque $d\beta = 0$; elle est *exacte* quand elle est la différentielle extérieure $\beta = d\alpha$ d'une forme différentielle, appelée une *primitive* de β et évidemment unique à l'addition d'une forme fermée près⁷; la formule (8) affirme donc que *toute forme exacte est fermée*.

⁵ Whitney a même *construit* la théorie des formes différentielles à partir de là [25].

⁶ Si $k = 1$, ces faces correspondent aux arêtes du cube $[0, 1]^3$.

⁷ Quand on parle d'additionner deux sections α et β d'un fibré vectoriel E , c'est bien sûr d'addition dans chaque fibre qu'il s'agit, c'est-à-dire que $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ dans E_x .

Flots, dérivée et crochet de Lie

Flots et dérivée de Lie

À tout champ de vecteurs différentiable X sur la variété M on associe son *flot* ou (pseudo)groupe à un paramètre g_X^t , défini de la manière suivante : pour tout $a \in M$, l'application $t \mapsto g_X^t(a)$ est le chemin dans M solution *maximale* (c'est-à-dire définie sur un *intervalle* aussi grand que possible) de l'équation différentielle $\dot{x} = X(x)$ (« courbe intégrale⁸ de X ») passant par a au temps $t = 0$.

La théorie des équations différentielles entraîne que le domaine de définition de $g_X : (t, a) \mapsto g_X^t(a)$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$ et que g_X est aussi différentiable que X ; il est clair que $g_X^s(g_X^t(a)) = g_X^{s+t}(a)$ lorsque le premier membre a un sens ou, ce qui revient au même, pour $a \in \text{dom}(g_X^t) \cap \text{dom}(g_X^{s+t})$; en particulier, puisque $g_X^0 = \text{id}_M$, chaque g_X^t est un difféomorphisme de l'ouvert $\text{dom } g_X^t \subset M$ sur l'ouvert $\text{dom } g_X^{-t}$, et $(g_X^t)^{-1} = g_X^{-t}$.

Si X est à support compact, les solutions de $\dot{x} = X(x)$ ne peuvent pas « partir à l'infini en un temps fini », donc $\text{dom } g_X = \mathbb{R} \times M$ et g_X est une action différentiable du groupe additif \mathbb{R} sur M , c'est-à-dire que $t \mapsto g_X^t$ est un homomorphisme de \mathbb{R} dans le groupe des difféomorphismes de M sur elle-même ; en pareil cas, on dit que X (ou son flot) est *complet*.

La *dérivée de Lie* d'un champ de tenseurs⁹ τ sur M par rapport à X est par définition

$$(9) \quad \mathcal{L}_X \tau := \left. \frac{d}{dt} g_X^{t*} \tau \right|_{t=0},$$

qui est un champ de tenseurs de même nature que τ ; par exemple, la dérivée de Lie d'une fonction réelle f sur M est la fonction réelle sur M *produit* (intérieur) ou *contraction* $df(X)$ de df par X :

$$\mathcal{L}_X f = df(X) : x \mapsto d_x f(X_x).$$

Pour $k > 0$, la dérivée de Lie d'une k -forme différentielle α sur M vérifie la *formule de Cartan*¹⁰

$$(10) \quad \mathcal{L}_X \alpha = d(\alpha X) + (d\alpha)X,$$

où αX et $(d\alpha)X$ désignent¹¹ les *produits intérieurs* (ou *contractions*) $x \mapsto \alpha_x X_x$ et $x \mapsto (d\alpha_x)X_x$ de α et $d\alpha$ par X ; la preuve est très facile : quels que soient $x \in M$ et $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in T_x M$, il existe $\rho_1 : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (M, x)$ telle que $\mathbf{v}_j = \partial_j \rho_1(0)$, et il suffit de prendre $\rho(t) := g_X^{t_1} \circ \rho_1(t_2, \dots, t_{k+1})$ et $t = 0$ dans (6). Voici une application importante :

⁸ Terminologie en léger conflit avec celle de « variété intégrale » [11], puisqu'il s'agit ici de courbes *paramétrées*.

⁹ Ici, forme différentielle de degré k ou, comme un peu plus loin, champ de vecteurs.

¹⁰ Il ne fait aucun doute qu'elle était connue et utilisée par Élie [5] mais, comme beaucoup de notions primitives, la dérivée de Lie a mis assez longtemps à être reconnue comme telle et c'est Henri qui a écrit (10) sous cette forme. On peut, si l'on y tient, la prendre comme définition – intrinsèque mais incompréhensible – de la différentielle extérieure.

¹¹ Avec les notations introduites quand nous avons écrit le système de Cartan de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Lemme de Poincaré

Toute forme différentielle fermée α de degré $k \geq 1$ sur M est localement exacte : chaque $a \in M$ a un voisinage ouvert Ω tel que $\alpha|_{\Omega}$ soit exacte.

En effet, si Ω est le domaine d'une carte φ nulle en a ayant pour image une boule B de \mathbb{R}^n , soit X le champ de vecteurs sur Ω image inverse par φ du champ radial $Y_y := y$ sur B ; pour tout $x \in \Omega$, les $g_X^t(x) = \varphi^{-1}(e^t \varphi(x))$ avec $t \leq 0$ sont bien définis et, d'après (10), puisque $d\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= (g_X^0 \alpha)_x = (g_X^0 \alpha)_x - \lim_{t \rightarrow -\infty} (g_X^t \alpha)_x = \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt} (g_X^t \alpha)_x dt \\ &= \int_{-\infty}^0 (g_X^t \mathcal{L}_X \alpha)_x dt = \int_{-\infty}^0 (g_X^t d(\alpha X))_x dt = \int_{-\infty}^0 d(g_X^t(\alpha X))_x dt \\ &= \left(d \int_{-\infty}^0 g_X^t(\alpha X) dt \right)_x, \end{aligned}$$

la dernière intégrale s'entendant dans chaque fibre¹².

Cohomologie de de Rham

Pour $k > 0$, le quotient de l'espace vectoriel des formes fermées de degré k sur M par l'espace vectoriel des formes exactes de degré k est le k -ième espace de cohomologie de de Rham $H^k(M, \mathbb{R})$; une forme k -linéaire alternée sur un espace de dimension $< k$ étant nulle, $H^k(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ pour $k > \dim M$; on note $H^0(M, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions localement constantes sur M et $H^\bullet(M, \mathbb{R}) := \bigoplus_{k \geq 0} H^k(M, \mathbb{R})$.

Images réciproques de champs de vecteurs, crochet de Lie

Étant donnée une application différentiable $h : M \rightarrow N$ entre variétés, une *image réciproque* d'un champ de vecteurs Y sur N par h , si elle existe, est un champ de vecteurs X sur M tel que $h \ll$ envoie les courbes intégrales de X sur celles de $Y \gg$, c'est-à-dire que $h \circ g_X^t = g_Y^t \circ h$; cette relation étant vérifiée pour $t = 0$, elle est équivalente à celle obtenue en la dérivant par rapport au temps, qui s'écrit $T_x h(X_x) = Y_{h(x)}$ pour tout $x \in X$; on voit donc que si h est *étale*, c'est-à-dire que tous les $T_x h$ sont des isomorphismes, Y a une unique image réciproque par h , notée $h^* Y$ et donnée par la formule

$$(h^* Y)_x = (T_x h)^{-1} Y_{h(x)}.$$

La formule (7) a donc un sens lorsque τ est un champ de vecteurs Y sur M , et¹³

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y],$$

crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y , tel que

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} f = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f$$

pour toute fonction réelle f sur M .

L'*identité de Jacobi* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, qui fait des champs de vecteurs C^∞ sur M l'archétype des algèbres de Lie, s'en déduit.

¹² On peut trouver rassurant de se placer dans la carte φ en prenant comme variable $s = e^t$.

¹³ Propriété de « dérivation d'un produit » $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} f + \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f$.

D'après la formule de dérivation d'un produit et (9), quelles que soient la fonction f , le champ de tenseurs τ , les champs de vecteurs X, Y et la forme différentielle α de degré $k > 0$ sur M , on a

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_X(f\tau) &= (\mathcal{L}_X f)\tau + f\mathcal{L}_X\tau \\ \mathcal{L}_X(\alpha Y) &= (\mathcal{L}_X\alpha)Y + \alpha\mathcal{L}_X Y \\ &= d(\alpha X)Y + (d\alpha)XY + \alpha[X, Y]. \end{aligned}$$

Si φ est une carte de M à valeurs dans \mathbb{R}^n et que, pour tout champ de vecteurs X sur M et tout $x \in \text{im } \varphi$, on note $X_\varphi(x) := T_x\varphi(X_{\varphi^{-1}(x)}) \in T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$,

$$(12) \quad [X, Y]_\varphi(x) = DY_\varphi(x)X_\varphi(x) - DX_\varphi(x)Y_\varphi(x).$$

Applications de la formule de Cartan chez Paulette Libermann

Transformations de contact infinitésimales

Soit α une *forme de contact* sur une variété V , ce qui signifie, rappelons-le, que $T_x M = \ker \alpha_x \oplus \ker d\alpha_x$ pour tout $x \in V$; soit \mathcal{K} la *structure de contact* $\mathcal{K}_x := \ker \alpha_x$ associée. Une *transformation de contact infinitésimale* ou *champ de Lie* de \mathcal{K} est un champ de vecteurs X sur V dont le flot $g^t := g_X^t$ préserve \mathcal{K} , c'est-à-dire que $T_x g^t(\mathcal{K}_x) = \mathcal{K}_{g^t(x)}$ pour tout $(t, x) \in \text{dom } g_X$: on dit que les g^t sont des *transformations de contact* ou *automorphismes* (locaux) de \mathcal{K} .

Théorème de Libermann¹⁴

Sous ces hypothèses, un champ de Lie X est déterminé par son hamiltonien $-\alpha X$ par rapport à α , et toute fonction réelle F de classe C^2 sur V est le hamiltonien d'un champ de Lie¹⁵ X_F de classe C^1 . En particulier, si α est C^∞ , l'application $F \mapsto X_F$ est un isomorphisme de $C^\infty(V, \mathbb{R})$ sur l'espace des champs de Lie C^∞ de \mathcal{K} , isomorphisme dont l'inverse est $X \mapsto -\alpha X$.

En effet, X est un champ de Lie si et seulement si son flot g^t vérifie $(g^{t*}\alpha)_x = \mu_t(x)\alpha_x$ pour tout $x \in \text{dom } g^t$, ce qui (après dérivation par rapport à t) se traduit par $\mathcal{L}_X\alpha = \lambda\alpha$, où λ est une fonction réelle sur V ; d'après (10), les relations entre X et $F := -\alpha X$ sont donc données pour chaque $x \in V$ par les deux équations

$$(13) \quad -\alpha_x X_x = F(x)$$

$$(14) \quad -d_x F + d\alpha_x X_x = \lambda(x)\alpha_x;$$

si $X_x = Y_x + Z_x$ dans la décomposition $T_x V = \mathcal{K}_x \oplus \ker d\alpha_x$, (13) détermine Z_x connaissant $F(x)$ et vice versa puisque $\alpha_x|_{\ker d\alpha_x}$ est un isomorphisme; quant à (14), elle s'écrit

$$\begin{aligned} -d_x F|_{\ker d\alpha_x} &= \lambda(x)\alpha_x|_{\ker d\alpha_x} \\ d_x F|_{\mathcal{K}_x} &= (d\alpha_x Y_x)|_{\mathcal{K}_x}; \end{aligned}$$

¹⁴ L'ayant toujours [10] attribué à Sophus Lie, j'ai failli demander qui était ce Libermann la première fois qu'on en a crédité à juste titre [19] Paulette Libermann en ma présence.

¹⁵ Le groupe des automorphismes de \mathcal{K} est donc énorme, les X_F avec F à support compact (par exemple) étant complets.

la première équation détermine $\lambda(x)$ connaissant $d_x F|_{\ker d\alpha_x}$ et vice versa, et la seconde détermine Y_x connaissant $d_x F|_{\mathcal{K}_x}$ et vice versa, la forme bilinéaire non dégénérée $d\alpha_x|_{(\mathcal{K}_x)^2}$ induisant l'isomorphisme $\mathbf{v} \mapsto (d\alpha_x \mathbf{v})|_{\mathcal{K}_x}$ de \mathcal{K}_x sur son dual.

Application : théorie locale des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Sous ces hypothèses, on se donne $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'on pose $E := F^{-1}(0)$. Deux observations préalables :

i) comme il n'y a pas de forme bilinéaire alternée non dégénérée sur un espace de dimension impaire, V est de dimension impaire $2n + 1$;

ii) une variété intégrale W de \mathcal{K} est de dimension au plus n ; en effet, si $\iota : W \hookrightarrow V$ est l'inclusion, la relation $\iota^* \alpha = 0$ exprimant que W est intégrale entraîne que $\iota^* d\alpha = d(\iota^* \alpha) = 0$, c'est-à-dire que chaque espace tangent $T_x W$ est inclus dans son orthogonal pour la forme bilinéaire non dégénérée $d\alpha_x|_{(\mathcal{K}_x)^2}$, d'où $\dim T_x W \leq 2n - \dim T_x W$; les variétés intégrales de dimension n sont les *variétés de Legendre* de \mathcal{K} .

Pour tout $x \in E$,

iii) la preuve précédente montre que $X = X_F$ est nul en x si $d_x F = 0$, puisqu'alors $Y_x = Z_x = 0$;

iv) il résulte de (13)–(14) et de l'antisymétrie de $d\alpha_x$ que $d_x F(X_x) = 0$, donc que X_F est tangent en x à E pour $d_x F \neq 0$ (car F est alors une submersion dans un voisinage ouvert U de x , donc $U \cap E$ est une sous-variété de codimension 1 ayant $\ker d_x F$ pour espace tangent en x) ;

v) on déduit de (13) que X_x appartient à \mathcal{K}_x .

Les points (iii)–(iv) impliquent que l'on a $g_X^t(E \cap \text{dom } g_X^t) \subset E$ pour tout t ; le point (v), joint au fait que les g_X^t préservent \mathcal{K} , entraîne donc les faits suivants :

vi) pour toute variété intégrale $W_0 \subset E$ de \mathcal{K} et tout $a \in W_0$ où $X_a \notin T_a W_0$, il existe un ouvert $\Omega \ni (0, a)$ de $\mathbb{R} \times W_0$ tel que l'application $j : \Omega \rightarrow E$ définie par $j(t, x) := g_X^t(x)$ soit un difféomorphisme sur une variété intégrale W de \mathcal{K} , qui vérifie donc $\dim W = \dim W_0 + 1$;

vii) cela impose $\dim W_0 < n$ d'après (ii) ; par conséquent, une *solution géométrique* de l'équation aux dérivées partielles généralisée E , c'est-à-dire une variété de Legendre L contenue dans E , vérifie $X_x \in T_x L$ pour tout $x \in L$;

viii) si $\dim W_0 = n - 1$ (on dit alors que (E, W_0) est un *problème de Cauchy généralisé, bien posé au point a*), alors W est une solution géométrique de E ;

ix) réciproquement, d'après (vii), toute solution géométrique W de E s'obtient de cette manière au voisinage de chaque $a \in W$ où X_a n'est pas nul (il suffit de prendre pour W_0 une hypersurface de W passant par a avec $X_a \notin T_a W_0$) ; il y a donc existence et unicité locales de la solution d'un problème de Cauchy généralisé bien posé.

Si $V = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\mathcal{K} = \mathcal{K}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et que, en notant $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ les points de \mathbb{R}^n , l'équation E est de la forme $\partial_t y = g(t, x, y, \partial_x y)$, un problème de Cauchy bien posé classique est la donnée de la valeur $y_0(x)$ de la fonction inconnue pour $t = 0$; cela détermine bien la donnée de Cauchy généralisée $W_0 = \{(0, x, y_0(x), g(0, j_x^1 y_0), Dy_0(x))\} \subset E$, qui définit en chacun de ses points

un problème bien posé dont les solutions locales généralisées W sont des sections holonomes de la projection-source $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contenues dans E , jets d'ordre 1 des solutions locales du problème de Cauchy.

Champs hamiltoniens sur une variété symplectique

Paulette Libermann n'est pas non plus étrangère [19] à leur définition intrinsèque. Une variété symplectique est le couple formé d'une variété V et d'une *forme symplectique* sur V , c'est-à-dire une 2-forme *fermée* ω telle que les $\omega_x \in L_{\text{alt}}^2(T_x V, \mathbb{R})$ soient toutes *non dégénérées* (la dimension de V est donc paire). Un champ de vecteurs X sur V est alors dit *symplectique* lorsque son flot $g^t = g_X^t$ préserve ω , c'est-à-dire que $g^{t*}\omega = \omega$ dans $\text{dom } g^t$ pour tout t (les g^t sont donc des *transformations symplectiques* de ω). Comme cette relation est vérifiée automatiquement si $t = 0$, cela revient à dire que $0 = \frac{d}{dt}g^{t*}\omega = g^{t*}\mathcal{L}_X\omega$ pour tout t , c'est-à-dire que $\mathcal{L}_X\omega = 0$; du fait que ω est fermée, cela équivaut d'après (10) à ce que la forme de Pfaff ωX soit *fermée*.

Lorsqu'elle est exacte, $\omega X = dH$, on dit que X est *hamiltonien* et que la fonction H est un *hamiltonien* de X ; il détermine X , et chaque fonction réelle H sur V est le hamiltonien d'un unique champ hamiltonien X_H : en effet, pour chaque $x \in V$, l'équation $\omega_x \mathbf{v} = d_x H$ a une unique solution $\mathbf{v} \in T_x V$ puisque ω_x est non dégénérée. Le groupe des transformations symplectiques (globales) de ω est donc lui aussi énorme, puisqu'il contient les $g_{X_H}^t$ avec H à support compact.

Comme $\mathcal{L}_{X_H} H = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$, le flot de $X = X_H$ préserve H , c'est-à-dire que $H(g_X^t(x)) = H(x)$ pour tout $(t, x) \in \text{dom } g_X$ (« conservation de l'énergie »); on dit aussi que H est une *intégrale première* de X_H . Puisque $\mathcal{L}_{X_H} K = dK(X_H) = \omega(X_H, X_H) = -\mathcal{L}_{X_H} H$ quelles que soient les fonctions réelles H et K sur V , le *crochet de Poisson* $\{H, K\} := \mathcal{L}_{X_H} K$ (« parenthèses de Poisson ») est antisymétrique; on en déduit la version hamiltonienne (triviale mais éminemment utile) d'un théorème d'Emmy Noether: si « X_K est une symétrie infinitésimale de H », c'est-à-dire que H est une intégrale première de X_K , alors K est une intégrale première de X_H . Le crochet de Poisson relève aux fonctions le crochet de Lie des champs de vecteurs¹⁶ en ce sens que $X_{\{H, K\}} = [X_H, X_K]$; il vérifie (donc) l'identité de Jacobi, munissant $C^\infty(V, \mathbb{R})$ d'une structure d'algèbre de Lie si ω est C^∞ .

Le cas « concret » étudié depuis Lagrange au moins [20] est celui où V est le fibré cotangent (« espace des phases ») T^*M d'une variété (« espace des configurations ») M , muni de sa *structure symplectique canonique* ω_M , unique 2-forme sur T^*M dont l'image inverse par la projection $J^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow T^*M$ est la différentielle extérieure de la forme de contact canonique $dy_0 - y_1 dx$ définissant $\mathcal{K}^1(M, \mathbb{R})$.

¹⁶ On peut de même, si α est une forme de contact, relever le crochet de Lie des champs de Lie aux fonctions réelles par (l'inverse de) l'isomorphisme $X \mapsto \alpha X$, le crochet obtenu étant dit *de Lagrange*, semble-t-il.

Courbure

Courbure d'une connexion

Si \mathcal{H} est une connexion sur une submersion $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$, tout champ de vecteurs X

défini sur un ouvert $U \subset B$ se relève en un unique champ de vecteurs \tilde{X} sur $\pi^{-1}(U)$ *horizontal* en tout point a , donné par $\tilde{X}_a = (T_a\pi|_{\mathcal{H}_a})^{-1}X_{\pi(a)}$. Un fait remarquable de la nature est que, si Y est un autre champ de vecteurs sur U , la composante verticale $([\tilde{X}, \tilde{Y}]_a)_V$ du crochet de Lie $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, en chaque point $a \in \pi^{-1}(U)$, ne dépend que de $\tilde{X}_a, \tilde{Y}_a \in \mathcal{H}_a$, c'est-à-dire de $X_{\pi(a)}, Y_{\pi(a)} \in T_{\pi(a)}B$; on définit donc une application bilinéaire alternée $R_a : T_{\pi(a)}B \times T_{\pi(a)}B \rightarrow \mathcal{V}_a$, le *tenseur de courbure* de \mathcal{H} au point a , par la formule

$$(15) \quad R_a(X_{\pi(a)}, Y_{\pi(a)}) := ([\tilde{X}, \tilde{Y}]_a)_V.$$

Si Γ est l'application de Christoffel de \mathcal{H} dans une carte fibrée $\tilde{\varphi}$ de π au-dessus de la carte φ de B , on déduit de (12) que, en posant $z := \tilde{\varphi}(a)$ et $\mathbf{x}_j := T_{\pi(a)}\varphi(\mathbf{v}_j)$,

$$(16) \quad R_a(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = D\Gamma(z)(\mathbf{x}_2, -\Gamma(z)\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1 - D\Gamma(z)(\mathbf{x}_1, -\Gamma(z)\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2,$$

ce qui prouve notre « fait de la nature » (voir le paragraphe suivant pour un argument plus joli).

Quand E est un fibré vectoriel de base B , l'identification de \mathcal{V}_a à la fibre $E_{\pi(a)}$ identifie R_a à un élément de $L_{\text{alt}}^2(T_{\pi(a)}B, E_{\pi(a)})$; en particulier, si $E = TB$, on se trouve dans la situation peut-être déjà un peu plus familière¹⁷ où R_a est à valeurs dans $T_{\pi(a)}B$. Si E est un fibré affine, elle est à valeurs dans l'espace vectoriel $\vec{E}_{\pi(a)}$ sous-jacent à la fibre. Plus généralement, lorsque E est un fibré principal de groupe structural G , la donnée de a permet d'identifier $E_{\pi(a)}$ à G par l'inverse de la bijection $G \ni g \mapsto ga$, donc d'identifier \mathcal{V}_a à l'*algèbre de Lie* de G (l'espace tangent $\mathfrak{g} := T_1G$ à G en l'élément neutre 1) par l'inverse de la différentielle au point 1 de la bijection précédente; dans cette identification, on a donc $R_a \in L_{\text{alt}}^2(T_{\pi(a)}B, \mathfrak{g})$, ce qui apparaît bien sûr dans [18].

« Courbure » d'un système de Pfaff

Si \mathcal{P} est un système de Pfaff¹⁸ sur une variété V , on peut remplacer dans ce qui précède l'espace vertical « concret » \mathcal{V}_a par sa version « abstraite »

$$\nu\mathcal{P}_a := T_aV/\mathcal{P}_a$$

¹⁷ Pour un fibré vectoriel général, lorsque \mathcal{H} est *linéaire*, c'est-à-dire quand le transport parallèle d'un temps à un autre le long de n'importe quel chemin l'est – ce qui revient à dire que les applications de Christoffel $\Gamma(x, y)$ dans les cartes de fibré vectoriel sont linéaires par rapport à y –, il résulte de (16) que la courbure R_a dépend linéairement de a vu comme élément de $E_{\pi(a)}$; en notant $b = \pi(a)$, $R_a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est donc la valeur au point $(a, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E_b \times T_bB \times T_bB$ d'une application *trilinéaire* R_b à valeurs dans E_b ; si $E = TB$, le monstre familier de la géométrie riemannienne [22] est la forme *quadrilinéaire* $(T_bB)^4 \ni (a, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h}) \mapsto R_b(a, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{h}$ (produit scalaire).

¹⁸ C'est-à-dire un sous-fibré vectoriel du fibré tangent TV , les cas stupides de TV et de sa section nulle étant exclus.

(ce qui définit un fibré vectoriel $\nu\mathcal{P}$ de base V , le *fibré normal* à \mathcal{P}) et noter $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_\nu$ la projection canonique $T_a V \rightarrow \nu\mathcal{P}_a$. Le fait de la nature précédent se généralise : on définit le « *tenseur de courbure* » $R_a \in L_{\text{alt}}^2(\mathcal{P}_a, \nu\mathcal{P}_a)$ du système de Pfaff \mathcal{P} au point $a \in V$ par la formule

$$(17) \quad R_a(X_a, Y_a) := ([X, Y]_a)_\nu,$$

où X, Y varient parmi les sections du fibré vectoriel \mathcal{P} au-dessus d'ouverts $U \ni a$ de V (champs de vecteurs sur U vérifiant $X_x, Y_x \in \mathcal{P}_x$ ou, de manière équivalente, $(X_x)_\nu = (Y_x)_\nu = 0$ pour tout x).

Pour démontrer notre « fait de la nature », on peut considérer localement \mathcal{P} comme une connexion¹⁹ et utiliser (16) ou, de manière plus élégante, remarquer que si l'on multiplie par exemple Y par une fonction réelle f définie au voisinage de a , (11) donne $[X, fY]_a = f(a)[X, Y]_a + \mathcal{L}_X f(a)Y_a$ et donc $([X, fY]_a)_\nu = f(a)([X, Y]_a)_\nu$ puisque $(Y_a)_\nu = 0$, d'où $([X, fY]_a)_\nu = ([X, Y]_a)_\nu$ si $f(a) = 1$.

Proposition. Pour toute variété intégrale W de \mathcal{P} , le tenseur de courbure R_a est identiquement nul sur $T_a W \times T_a W$ quel que soit $a \in W$.

En effet, si X, Y sont des champs de vecteurs sur un voisinage de a dans W , il est facile de les étendre localement en des sections \tilde{X}, \tilde{Y} de \mathcal{P} définies au voisinage de a dans V ; par définition, $\tilde{X}_a = X_a, \tilde{Y}_a = Y_a$ et de plus, puisque, près de a , les flots de \tilde{X} et de X coïncident sur W , on a $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_a = [X, Y]_a \in T_a W \subset \mathcal{P}_a$. On en déduit que $R_a(X_a, Y_a) = R_a(\tilde{X}_a, \tilde{Y}_a) = ([\tilde{X}, \tilde{Y}]_a)_\nu = ([X, Y]_a)_\nu = 0$, d'où la proposition puisque (X_a, Y_a) peut être n'importe quel couple de vecteurs tangents à W en a .

Définition. Un élément intégral de \mathcal{P} en $a \in V$ est un candidat plausible pour être l'espace tangent en a à une variété intégrale de \mathcal{P} , c'est-à-dire un sous-espace vectoriel I_a de \mathcal{P}_a tel que $R_a|_{I_a \times I_a} = 0$.

Le théorème de Cartan-Kähler pour les systèmes de Pfaff²⁰ affirme que, dans le cas analytique, tout élément intégral « générique » I_a de \mathcal{P} est bien de la forme $I_a = T_a W$ pour au moins une variété intégrale (analytique) W de \mathcal{P} . Voici deux exemples extrêmes où ce résultat général est inutile.

Exemple 1. - Systèmes de Pfaff complètement intégrables

Ce sont les systèmes de Pfaff \mathcal{P} tels que $R_a = 0$ pour tout $a \in V$ (autrement dit, \mathcal{P}_a est un élément intégral). Par exemple, le système de Pfaff \mathcal{V} défini par les espaces verticaux d'une submersion est complètement intégrable (et complètement intégré, les fibres en étant des variétés intégrales). Une connexion complètement intégrable est parfois dite *plate* puisque sa courbure est partout nulle.

¹⁹ Voir la preuve du théorème de Frobenius un peu plus loin.
²⁰ Plus Cartan que Kähler dans ce cas [2]; il est assez sidérant qu'Élie Cartan, à partir de trois exemples, ait pu chercher à établir un résultat aussi général et voir comment « coïncider » la variété intégrale cherchée.

Théorème de Frobenius. Si un système de Pfaff \mathcal{P} sur V est complètement intégrable, il existe bien, pour tout $a \in V$, une variété intégrale W de \mathcal{P} telle que $T_a W = \mathcal{P}_a$ (et donc, pour des raisons de dimension, $T_x W = \mathcal{P}_x$ pour tout $x \in W$ si W est connexe); en outre, cette variété intégrale est localement unique : si W' en est une autre, il existe un voisinage ouvert U de a dans V tel que $W \cap U = W' \cap U$ (on dit que W et W' ont le même germe²¹ en a).

À partir de là, on voit que la relation « il existe une variété intégrale connexe de \mathcal{P} contenant a et a' » entre points a, a' de V est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence s'appellent les *feuilles* du feuilletage de V défini par \mathcal{P} ; elles héritent de leur définition une structure de variété connexe (injectivement immergée) de même dimension que les \mathcal{P}_a , mais ce ne sont pas des sous-variétés (plongées) en général. Même pour $\dim \mathcal{P}_a = 1$ (« champ de droite », toujours complètement intégrable²² puisque les R_a sont alternées), l'étude globale des feuilletages est un sujet très difficile où, après Ehresmann et Reeb, se sont illustrés entre autres Haefliger, Novikov, Thurston et, dans le cas des champs de droites, tous les grands noms des systèmes dynamiques depuis Poincaré.

Structure locale du feuilletage défini par un système de Pfaff complètement intégrable. Pour tout $a \in V$, il existe des ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$, $U' \subset \mathbb{R}^p$ et une carte (« famille de plaques ») ψ de V avec $a \in \text{dom } \psi$ et $\text{im } \psi = U \times U'$ telle que le feuilletage de $\text{dom } \psi$ défini par \mathcal{P} ait pour feuilles les $\psi^{-1}(U \times \{y_0\})$ avec $y_0 \in U'$; chacune de ces feuilles locales (« plaques ») est évidemment contenue dans une des feuilles du feuilletage global, mais celle-ci peut revenir couper $\text{dom } \psi$ suivant d'autres plaques, dont la réunion peut même être dense²³ dans $\text{dom } \psi$.

Preuve à la Dieudonné [12] du théorème de Frobenius et de l'existence de familles de plaques. Soit φ une carte quelconque de V en a ; en la composant avec une translation et une permutation des coordonnées, on peut supposer qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, que $\varphi(a) = 0$ et que $T_a \varphi(\mathcal{P}_a)$ est horizontal, c'est-à-dire supplémentaire de l'espace vertical $\{0\} \times \mathbb{R}^p$ de la projection $\pi : (x, y) \mapsto x$. En restreignant $\text{dom } \varphi$, il en résulte que tous les $\mathcal{H}_{\varphi(z)} := T_z \varphi(\mathcal{P}_z)$ sont horizontaux, donc qu'il existe une application de Christoffel $\Gamma : \text{im } \varphi \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, telle que $\mathcal{H}_{(x,y)}$ soit le graphe de $-\Gamma(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \text{im } \varphi$. Les variétés intégrales de dimension maximale de \mathcal{P} dans $\text{dom } \varphi$ sont les images par φ^{-1} de celles de la connexion \mathcal{H} ainsi définie, lesquelles sont *localement* les graphes des solutions $y = f(x)$ de l'équation « aux différentielles totales »

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} + \Gamma(x, y) = 0;$$

²¹ Au début, Ehresmann utilisait ici aussi le mot *jet*, peu recommandable dans ce cas hors du cadre analytique.

²² La théorie inclut donc l'étude des *orbites* ou *lignes de champ* d'un champ de vecteurs X sur V (en considérant le champ de droites $x \mapsto \mathbb{R}X_x$ sur l'ouvert de V où X ne s'annule pas), images de ses courbes intégrales.

²³ Si α est un nombre irrationnel, les orbites du champ de vecteurs constant $X_x := (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2 = T_x \mathbb{T}^2$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ sont toutes denses.

si une telle solution f prend la valeur y_0 en 0, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que le segment $[0, x]$ soit contenu dans $\text{dom } f$, il en résulte que $f(tx)$ est pour $0 \leq t \leq 1$ la valeur $R^t(x, y_0)$ au temps t de la solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + \Gamma(tx, y)x = 0$ qui vaut y_0 pour $t = 0$. Comme $R^t(x, y_0)$ existe pour tout t si $x = 0$, la théorie des équations différentielles [9] nous dit qu'il existe des boules ouvertes $U \subset \mathbb{R}^n$ et $U' \subset \mathbb{R}^p$ de centre 0 telles que, pour $x \in U$, l'application $y_0 \mapsto R^1(x, y_0)$ soit un difféomorphisme de U' sur un ouvert de \mathbb{R}^p ; bref, $h : (x, y_0) \mapsto (x, R^1(x, y_0))$ est un difféomorphisme de $U \times U'$ sur un ouvert de $U \times \mathbb{R}^p$.

Il reste donc simplement à vérifier que, pour tout $y_0 \in U'$, l'unique candidate $f : x \mapsto R^1(x, y_0)$ à être dans U la solution de (18) qui vaut y_0 pour $x = 0$ est bien solution de (18) : on obtiendra la famille de plaques $\psi := h^{-1} \circ \varphi$ et, pour $y_0 = 0$, le théorème de Frobenius. Or, en dérivant par rapport à x l'identité $\frac{\partial}{\partial t} f(tx) + \Gamma(tx, f(tx))x = 0$ et en utilisant (16), on voit que $t \mapsto tDf(tx)$ et $t \mapsto -t\Gamma(tx, f(tx))$ vérifient la même équation différentielle sur $[0, 1]$ et prennent la même valeur 0 $\in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ en $t = 0$, donc sont égales, d'où le résultat cherché pour $t = 1$.

Remarques

Pour les champs de droites, ce n'est rien d'autre que la théorie des équations différentielles « dépendant du temps ». La construction effectuée en général (avant la vérification finale, qui utilise la nullité de la courbure) est une version locale de la démonstration [11] du théorème d'Ehresmann. La nullité de la courbure est imposée par la symétrie de la dérivée seconde des solutions de (18). Un des mérites de la preuve de Dieudonné est qu'elle marche en dimension infinie.

Exemple 2. - Champs d'hyperplans et structures de contact

Si α est une forme de Pfaff partout non nulle sur V et que $\mathcal{K}_z := \ker \alpha_z$, la courbure au point z du système de Pfaff \mathcal{K} s'identifie à $-d\alpha_z|_{\mathcal{K}_z}$ par l'isomorphisme de $\nu\mathcal{K}_z = T_z V / \mathcal{K}_z$ sur \mathbb{R} induit par α_z .

En effet, quelles que soient les sections locales X, Y du fibré vectoriel \mathcal{K} au voisinage de z , on a $\alpha X = \alpha Y = 0$, et donc $\alpha_z[X_z, Y_z] = -d\alpha_z(X_z, Y_z)$ d'après (11).

Une structure de contact est donc « complètement non intégrable », sa courbure étant en tout point une forme bilinéaire non dégénérée.

La structure de contact canonique $\mathcal{K} = \mathcal{K}^1(M, \mathbb{R})$ de $J^1(M, \mathbb{R})$ est une connexion sur le fibré trivial $J^1(M, \mathbb{R}) = T^*M \times \mathbb{R}$ de base T^*M , donc a une « application de Christoffel » intrinsèque : en notant comme les mécaniciens $x = (q, p)$ ($p \in T_q^*M$) les points de T^*M et $z = (q, p, y)$ ceux de $J^1(M, \mathbb{R})$, chaque \mathcal{K}_z est défini par l'équation $dy = p dq$, donc est le graphe de la forme linéaire $p dq$ sur $T_x(T^*M)$; la forme de Pfaff $\lambda = \lambda_M$ sur T^*M donnée par $\lambda_x = p dq$ s'appelle la *forme de Liouville* de T^*M .

La courbure de la connexion $\mathcal{K}^1(M, \mathbb{R})$ sur le fibré trivial $J^1(M, \mathbb{R}) = T^*M \times \mathbb{R}$ de base T^*M s'identifie donc à la 2-forme $d\lambda_M$ sur T^*M : on retrouve la forme symplectique canonique $\omega_M = -d\lambda_M$ sur T^*M .

Remarques

Pour obtenir les équations de Hamilton sous leur forme historique, on a le choix entre nos conventions de signe et celles de [20], selon lesquelles $\omega_M = d\lambda_M$ et $\omega_M X_H = -dH$.

Toute application étale g entre ouverts de M se relève en l'application T^*g de $T^*\text{dom } g$ sur $T^*\text{im } g$ donnée par $T^*g(q, p) := (g(q), p \circ (T_q g)^{-1})$, évidemment symplectique (elle préserve la forme de Liouville); si X est un champ de vecteurs sur M , chaque $T^*g_X^t$ est le temps t du flot du champ de vecteurs *hamiltonien* qui a pour hamiltonien $K(q, p) = pX_q$; les intégrales premières de la mécanique classique obtenues en appliquant le « théorème de Noether hamiltonien » sont en général de tels K .

Étant donné un système de Pfaff \mathcal{P} sur V , soit \mathcal{P}^\perp le sous-fibré vectoriel de T^*V dont la fibre au-dessus de x est formée des $\xi \in T_x^*V$ nulles sur \mathcal{P}_x . Pour tout $a \in V$, il existe r sections $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de \mathcal{P}^\perp au-dessus d'un ouvert $U \ni a$ telles que $\alpha(x) := (\alpha_1(x), \dots, \alpha_r(x))$ soit une base de \mathcal{P}_x^\perp pour tout $x \in U$; autrement dit, $\alpha(x)$ induit un isomorphisme de $\nu\mathcal{P}_x$ sur \mathbb{R}^r qui, comme pour $r = 1$, identifie R_x à $-d\alpha(x)|_{\mathcal{P}_x^\perp} = -(d\alpha_1(x), \dots, d\alpha_r(x))|_{\mathcal{P}_x^\perp} \in L_{\text{alt}}(\mathcal{P}_x, \mathbb{R}^r)$.

Il résulte du lemme de transversalité de Thom que « presque toute » forme de Pfaff sur une variété de dimension impaire est une forme de contact en dehors d'une hypersurface²⁴. En revanche, il est clair que, sauf ceux qui sont définis par une submersion et les champs de droites, les systèmes de Pfaff ne sont *presque jamais* complètement intégrables. Pourquoi donc consacrer tant d'efforts à des objets aussi improbables? Une réponse est qu'ils apparaissent de manière plutôt robuste (malgré une certaine perte de régularité par perturbation) dans le cas des feuilletages stable et instable d'un difféomorphisme d'Anosov – d'où, semble-t-il, l'intérêt de Novikov; une autre, très présente chez Élie Cartan et dans [18], est que les objets les plus symétriques sont souvent les plus beaux et les plus utiles; en voici une illustration, supposant connue la cohomologie de de Rham :

La connexion « de Gauss-Manin » associée à une submersion propre et la monodromie

On peut associer à toute submersion propre $E \downarrow \pi$ le fibré vectoriel $H^\bullet E$ de base B

sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} dont la fibre au-dessus de b est l'espace de cohomologie $H^\bullet(E_b, \mathbb{K})$. Pour voir que c'est bien un fibré vectoriel muni d'une connexion linéaire plate canonique \mathcal{H} , nous allons en construire²⁵ un atlas $\{\tilde{\varphi}\}_{\varphi \in \Phi}$ de fibré vectoriel tel que, en notant \mathcal{H}_φ la connexion linéaire plate sur $\text{dom } \tilde{\varphi}$ dont l'application de Christoffel dans la carte $\tilde{\varphi}$ est²⁶ $\Gamma = 0$, les connexions \mathcal{H}_φ et \mathcal{H}_ψ , coïncident sur $\text{dom } \tilde{\psi} \cap \text{dom } \tilde{\varphi}$

²⁴ Lisse, voir par exemple [10]; de même, la différentielle extérieure de « presque toute » forme de Pfaff sur une variété M de dimension paire est symplectique en dehors d'une hypersurface, forcément non vide si M est compacte sans bord.

²⁵ En supposant pour simplifier les choses E paracompacte.

²⁶ Plus simplement, $\tilde{\varphi}$ est une famille de plaques du feuilletage défini par \mathcal{H}_φ , qui naît donc « tout intégrée »; Élie Cartan nommait d'ailleurs *connexion infinitésimale* ce que nous appelons connexion, ce dernier terme désignant une façon de « connecter » deux fibres $E_b, E_{b'}$ voisines – pour une connexion (infinitésimale) ayant de la courbure, le résultat dépend, même localement, de l'arc joignant b à b' dans B le long duquel on effectue le transport parallèle.

pour $\varphi, \psi \in \Phi$; on peut donc bien recoller les \mathcal{H}_φ en une connexion linéaire plate \mathcal{H} sur $H^\bullet E$.

Dans cette construction, Φ est l'atlas de B formé des cartes dont l'image est une boule ouverte de centre 0 dans \mathbb{R}^n . Une connexion sur π étant choisie, la preuve du théorème d'Ehresmann montre qu'il existe pour chaque $\varphi \in \Phi$ une trivialisatoin $h_\varphi : \pi^{-1}(\text{dom } \varphi) \rightarrow \text{dom } \varphi \times F_\varphi$ de π au-dessus de $\text{dom } \varphi$; pour chaque $b \in \text{dom } \varphi$, l'injection canonique $i_b : E_b \hookrightarrow \pi^{-1}(\text{dom } \varphi)$ induit un isomorphisme i_b^* de $H^\bullet(\pi^{-1}(\text{dom } \varphi), \mathbb{K})$ sur $H^\bullet(E_b, \mathbb{K})$, qui se « lit » à l'aide de h_φ comme l'isomorphisme j_b^* de $H^\bullet(\text{dom } \varphi \times F_\varphi, \mathbb{K})$ sur $H^\bullet(\{b\} \times F_\varphi, \mathbb{K})$ associé à l'inclusion²⁷ $j_b : \{b\} \times F_\varphi \hookrightarrow \text{dom } \varphi \times F_\varphi$. On peut donc associer à φ la carte $\tilde{\varphi}$ de $H^\bullet E$ au-dessus de φ , d'image $\text{im } \varphi \times H^\bullet(\pi^{-1}(\text{dom } \varphi), \mathbb{K})$, donnée par $\tilde{\varphi}(b, c) := (\varphi(b), (i_b^*)^{-1}c)$, $c \in H^\bullet(E_b, \mathbb{K})$. Il est facile de vérifier que l'on obtient ainsi l'atlas de fibré vectoriel et la connexion plate annoncés²⁸.

Pour $b \in B$, le transport parallèle le long de chaque lacet γ dans B , de base b , définit un automorphisme de $H^\bullet E_b$ car la connexion est linéaire; comme elle est plate, cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ; on définit ainsi un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(B, b)$ dans le groupe des automorphismes de $H^\bullet E_b$, la monodromie.

Torsion, connexion de Levi-Civita et variantes apparaissant dans la thèse

La torsion $\tau_a \in L_{\text{alt}}(T_a M, T_a M)$ au point $a \in M$ d'une connexion linéaire sur une variété M (c'est-à-dire sur son fibré tangent) peut être définie rapidement comme suit : pour toute surface paramétrée $\sigma : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (M, a)$, on a $\tau_a(\partial_1 \sigma(0), \partial_2 \sigma(0)) = D_2 \partial_1 \sigma(0) - D_1 \partial_2 \sigma(0)$, où $D_1 \partial_2 \sigma(s, t) := \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s, t)$ et $D_2 \partial_1 \sigma(s, t) := \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \sigma(s, t)$. Pour chaque métrique riemannienne sur M , il existe une unique connexion linéaire *sans torsion* (« symétrique ») sur M et *riemannienne*, c'est-à-dire telle que le transport parallèle du temps s au temps t le long d'un chemin γ dans M soit toujours une isométrie de $T_{\gamma(s)} M$ sur $T_{\gamma(t)} M$: c'est la *connexion de Levi-Civita*. Son absence de torsion permet par exemple une preuve intrinsèque du fait que les points critiques de la fonctionnelle d'action $\frac{1}{2} \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$ sur l'espace des chemins γ à extrémités $\gamma(0), \gamma(1)$ fixées dans M sont des *géodésiques*, solutions de l'équation $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$.

Puisque le transport parallèle pour la connexion de Levi-Civita préserve le produit scalaire, il induit un transport parallèle des repères orthonormés d'espaces tangents à M , qui est celui d'une connexion sur le fibré des repères orthonormés, *principale*, c'est-à-dire telle que le transport parallèle préserve l'action du groupe structural. Dans la thèse [18] sont de même introduites des connexions plus ou moins canoniques sur les fibrés principaux considérés, utilisées *beaucoup* plus tard par divers spécialistes.

²⁷ L'isomorphisme inverse est p_b^* , où $p_b(x, y) := (b, y)$, toute forme différentielle fermée α sur $\text{dom } \varphi \times F_\varphi$ telle $j_b^* \alpha = 0$ étant exacte : pour le voir, il suffit d'appliquer notre preuve du lemme de Poincaré au champ X sur $\text{dom } \varphi \times F_\varphi$ dont l'image par $\varphi \times \text{id}_{F_\varphi}$ a pour flot $(x, y) \mapsto (b + e^t(x - b), y)$.

²⁸ Un trait subtil de cette construction est que le fibré $H^\bullet E$ et la connexion sont \mathbb{K} -analytiques lorsque π l'est, contrairement aux trivialisations locales h_φ obtenues par partition de l'unité.

En guise de conclusion

Naturellement, je n'ai fait qu'effleurer le sujet, mon ambition se bornant à donner au lecteur une partie des moyens de se frayer un chemin dans les travaux de Paulette Libermann, de son maître Ehresmann et de leur maître Élie Cartan. L'œuvre de ce dernier n'est pas achevée : chaque génération en fait la glose à sa manière, essayant d'en éclairer les zones d'ombre au risque d'en perdre le fil conducteur. Ce n'est pas un des moindres mérites de Paulette Libermann d'avoir donné dans le premier chapitre de sa thèse un aperçu bref mais substantiel de cette œuvre dans le langage flambant neuf d'Ehresmann, fibrés, jets et connexions mais aussi pseudogroupes et groupoïdes²⁹, de nouveau très populaires [23, 24, 17] après un temps d'oubli : ils avaient sans doute souffert de leur nom de groupes au rabais³⁰ alors que, chez Lie ou Élie Cartan, les « groupes » sont souvent des pseudogroupes – ceux-ci apparaissent déjà naturellement, nous l'avons vu, quand on considère le flot d'un champ de vecteurs non complet (de même, ce qui tient lieu de groupe à un paramètre pour les champs de vecteurs dépendant du temps est un « groupoïde à deux paramètres », de sorte que beaucoup de scientifiques font des groupoïdes sans le savoir !). C'est un des effets inévitables de la glose, dont les coups de projecteur plongent un temps dans l'obscurité ce qui est pourtant inévitablement là³¹.

À Élie Cartan, je l'ai dit, on retourne sans cesse : son « problème d'équivalence », dont j'ai bien peu parlé malgré le titre de la thèse³², est devenu « méthode d'équivalence » algorithmique [16], ce qui est réducteur mais correspond dans une certaine mesure au contenu de [18] ; sa théorie de l'involution continue d'inspirer Malgrange [21] après Kuranishi et bien d'autres [13, 1], tels Ehresmann, dont les jets permettent une formulation intrinsèque des prolongements d'un système différentiel.

²⁹ Exemples typiques : les difféomorphismes entre ouverts d'une variété M forment un pseudo-groupe, et même un groupoïde si l'on s'interdit de les composer lorsque le domaine du second n'est pas exactement l'image du premier ; les germes aux points de M de tels difféomorphismes locaux forment un groupoïde (on ne peut composer un germe f en a et un germe g en b que si $b = f(a)$), ainsi que leurs jets d'ordre k (au point où l'on a « germifié ») ; lorsque M est munie d'une structure supplémentaire, métrique riemannienne ou forme symplectique ou structure de contact, par exemple, les objets qui la préservent forment un sous-pseudogroupe ou un sous-groupoïde du précédent ; l'exemple riemannien d'une sphère un peu cabossée au voisinage d'un point mais bien ronde par ailleurs montre que ce pseudogroupe ou groupoïde peut être assez irrégulier, étant apte à déceler des symétries locales qu'ignore le groupe des isométries globales de notre sphère cabossée sur elle-même, en général trivial. Un objet fondamental de la théorie des feuilletages est le groupoïde d'holonomie, qui généralise la monodromie.

³⁰ Pour ne rien dire des horribles *algébroides*, qui semblent tout droit sorties d'un mauvais film de science-fiction.

³¹ L'insistance sur les groupes abstraits, qui, si l'on en croit le dogme, n'agissent que sur eux-mêmes avant qu'on les ait représentés, est évidemment pour beaucoup dans les ténèbres où l'on a ainsi fini par rejeter les groupes de Lie historiques, pseudogroupes de transformations qu'il est souvent malaisé d'abstraire de l'espace sur lequel ils agissent.

³² Il s'agit de trouver des critères pour que deux structures soient localement équivalentes, c'est-à-dire se ramènent l'une à l'autre par changement de coordonnées locales ; naturellement, le langage des variétés, que j'ai utilisé de bout en bout, ne privilégie aucun système de coordonnées a priori, de sorte que « changement de coordonnées » doit être pris au sens de « difféomorphisme » – ce jansénisme, même si je m'en moquais un peu dans [11], est totalement justifié par le fait que les vrais problèmes ne peuvent pas dépendre du choix de coordonnées.

Il serait sans doute temps, d'ailleurs, de retourner aussi à Ehresmann avant que ses textes si concis ne deviennent inaccessibles aux générations éduquées aujourd'hui³³ ; ainsi, la démonstration « du » théorème d'Ehresmann que j'ai donnée [11] est en fait la sienne [14] . . . , tellement elliptique que l'on s'est empressé d'en trouver d'autres bien moins élégantes et naturelles.

Il faudrait aussi comprendre ce moment où la communauté mathématique a cessé de suivre Ehresmann sur la voie des catégories, où il avait pourtant été mené bien naturellement (par exemple, un groupoïde est une [petite] catégorie dont toutes les flèches sont inversibles) et qui a permis beaucoup plus tard à G. Segal d'apporter des simplifications considérables à la théorie des feuilletages.

Pour achever cet hommage à Paulette Libermann, je dirai qu'il y a des précurseurs : pas Euler, Poincaré ni Élie Cartan (on n'est pas le précurseur de ceux qui vous doivent tout), mais des gens comme elle justement, qui traitent de problèmes parfois jugés un peu académiques ou obscurs jusqu'à ce que quelqu'un, ayant besoin des objets concernés, s'aperçoive que le travail a été fait, et bien fait.

Références

- [1] R. L. BRYANT, S. S. CHERN, R. B. GARDNER, H. L. GOLDSCHMIDT, P. A. GRIFFITHS. *Exterior Differential Systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [2] É. CARTAN, *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 3^e série, **16** (1901), 241-311
- [3] ——— *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **21** (1904), 153-206
- [4] ——— *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **25** (1908), 57-194
- [5] ——— *Leçons sur les invariants intégraux*. Hermann, Paris, 1922
- [6] ——— *La structure des groupes infinis*, Séminaire de Math., 4^e année, 1936-37, G, (polycopié)
- [7] ——— *Les problèmes d'équivalence*, Selecta, Gauthier-Villars, Paris, 1937, 113-136
- [8] ——— *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1948
- [9] M. CHAPERON, *Calcul différentiel et calcul intégral*, deuxième édition. Dunod, Paris, 2008
- [10] ——— *Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques*. Astérisque **138-139**, 1986
- [11] ——— *En souvenir de Paulette Libermann*. Gazette des mathématiciens **122**, octobre 2009
- [12] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960
- [13] ——— *Éléments d'Analyse*, tome 4. Gauthier-Villars, Paris, 1971
- [14] C. EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque Top. Bruxelles 1950, 29-
- [15] ——— *Les prolongements d'une variété différentiable*, C. R. Acad. Sc. Paris **233** (1951), p. 598, 777 et 1081
——— *Structures locales et structures infinitésimales*, ibidem, **234**, 1952, p. 587
- [16] R. B. GARDNER, *The method of equivalence and its applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa. , 1989
- [17] M. GOLUBITSKY, I. STEWART, *Nonlinear dynamics of networks : the groupoid formalism*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (2006), 305-364
- [18] P. LIBERMANN, *Sur le problème de l'équivalence de certaines structures infinitésimales*. Thèse, Université de Strasbourg, 21 mai 1953. Ann. Mat. Pura Appl. **36**, 1954, p. 27-120

³³ Bien sûr, la science progresse en grande partie parce que ses acteurs, comprenant mal le travail de leurs prédécesseurs, en font autre chose, parfois plus intéressant que l'original, mais il y a des limites. . .

- [19] ——— *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact*. Colloque de géométrie différentielle globale, 1958, p. 37-59, Gauthier-Villars, Paris, 1959
- [20] ———, C.-M. MARLE, *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique*. Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, **21**, 1986-87
Traduction anglaise par B. E. Schwarzbach : *Symplectic geometry and analytical mechanics*. Mathematics and its Applications, **35**. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987
- [21] B. MALGRANGE, *Systèmes différentiels involutifs*, Panoramas et Synthèses **19**, Société mathématique de France, 2005
- [22] J. MILNOR, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963
- [23] A. WEINSTEIN, *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **16** (1987), 101-104
- [24] — *Groupoids : unifying internal and external symmetry*, Notices Amer. Math. Soc. **43** (1996), 744-752
- [25] H. WHITNEY, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, 1957



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Two Assistant Professorships in Mathematics

The Department of Mathematics at ETH Zurich (www.math.ethz.ch) invites applications for qualified candidates from all areas of mathematics. Duties of these positions include, in addition to research, an active participation in teaching courses of mathematics for students of mathematics, natural sciences, and engineering.

Candidates should have a Ph.D. or equivalent and have demonstrated the ability to carry out independent research work. Willingness to teach at all university levels and to participate in collaborative work both within and outside of ETH Zurich is expected. The successful candidates will teach undergraduate level courses (German and English) and graduate level courses (English).

Assistant professorships have been established to promote the careers of younger scientists. The initial appointment is for four years with the possibility of renewal for an additional two-year period.

Please submit your application together with a curriculum vitae and a list of publications **to the President of ETH Zurich, Prof. Dr. Ralph Eichler, ETH Zurich, Raemistrasse 101, 8092 Zurich, Switzerland (or via e-mail to faculty-recruiting@sl.ethz.ch), no later than February 28, 2010**. With a view toward increasing the number of female professors, ETH Zurich specifically encourages female candidates to apply.