DOCUMENTS

En souvenir de Paulette Libermann

Marc Chaperon

Ce qui suit, moins disparate que ne pourrait le faire croire pareille énumération, se compose

– de l'annonce du prochain colloque dédié à la mémoire de Paulette Libermann,
– d'un bref hommage, qui vient donc s'ajouter à ceux, plus consistants, d'Yvette Kosmann-Schwarzbach et Charles-Michel Marle dans la *Gazette* n° 114,
– des trois lettres qu'elle a adressées en 1942 à Élie Cartan depuis Lyon, où elle était réfugiée,
– de l'introduction de sa thèse, qui constitue le cœur de l'ensemble
– d'un texte destiné à ouvrir aux non-spécialistes un accès à ce travail savant et toujours d'actualité, texte dont la seconde partie paraîtra dans le prochain numéro de la *Gazette*.

Le colloque « Paulette Libermann, héritage et descendance » [1]

Il se tiendra à l'Institut Henri Poincaré du 7 au 12 décembre 2009.

Son comité scientifique est composé de Daniel Bennequin, Alain Chenciner, Victor Guillemin, Lisa Jeffrey, Yvette Kosmann-Schwarzbach et Charles-Michel Marle. Ses organisateurs sont Alain Albouy, Michèle Audin, Marc Chaperon, Jacques Féjoz, Jean-Pierre Marco, Charles-Michel Marle et Eva Miranda.

Voici les sujets qui seront abordés et les conférenciers ayant donné leur accord pour le faire : *structures presque complexes, utilisation en géométrie symplectique et de contact* (Denis Auroux, Paul Biran, Léa Blanc-Centi, Emmanuel Ferrand, Agnès Gadbled, Emmanuel Giroux, Leonor Godinho, Misha Gromov, Tara Holm, Yael Karshon, Ana Rita Pires, Patrick Popescu-Pampu) ; *géométrie de Poisson* (Anne Pichereau, Nguyen Tien Zung, Izu Vaisman, Alan Weinstein) ; *symétries et équations différentielles* (Rui Loja Fernandes, Peter Olver, Shlomo Sternberg [sous réserve]) ; *feuilletages lagrangiens, systèmes intégrables* (Frédéric Hélein, Alfonso Sorrentino, San Vu Ngoc) ; *un peu d'histoire* (David Blair, Ivan Kolář, Jean Pradines) – session organisée par Yvette Kosmann-Schwarzbach.

[1] http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/Paulette.html

Quelques souvenirs

Mademoiselle Libermann, comme nous l'appelions tous[2], a accompagné toute ma vie professionnelle. À mes débuts, elle m'a en effet fait l'honneur de me demander une conférence lors de la journée de géométrie différentielle qu'elle organisait tous les ans à l'IHP. Très jeunes, Michèle Audin, Daniel Bennequin ou Jean-Pierre Françoise, entre autres, ont aussi reçu ce précieux encouragement. Comme Shih Weishu, Mademoiselle Libermann avait le talent rare d'entretenir chez les débutants une flamme mathématique qui, sinon, aurait pu vaciller.

Par la suite, je suis allé assez souvent au séminaire qu'elle organisait avec Yvette Kosmann-Schwarzbach. C'était l'occasion de compléter ma lecture d'Élie Cartan dont, à la suite de son maître Ehresmann, Mademoiselle Libermann continuait d'assumer pleinement l'héritage, en des temps où certains puristes faisaient à ce grand mathématicien une absurde réputation d'obscurité.

Je l'ai mieux connue lors de colloques, puis quand je suis devenu son collègue à Paris 7 et enfin au séminaire Marle. Elle était une mémoire vivante de la communauté mathématique française, dont elle parlait avec une tendresse sans indulgence comme on parle de sa famille.

Issue de l'immigration, comme on dit de nos jours, elle avait fait de très bonnes études secondaires à Paris au lycée Lamartine (sa famille demeurait non loin, rue de la Tour d'Auvergne) avant de voir son mérite récompensé par le succès au concours d'entrée à Sèvres, l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles. Malheureusement, les lois scélérates de Vichy ont pour le moins terni ce succès[3] et elle a dû fuir (à Lyon !) avec sa famille. Dans cette épreuve, la communauté mathématique française a fait tout ce qu'elle pouvait pour soutenir Paulette Libermann, dont la révérence pour Élie Cartan (et la tendresse pour cette communauté) était certainement due *aussi* à ce soutien.

Les lettres à Élie Cartan

Nous remercions la famille Cartan d'avoir bien voulu les communiquer à Michèle Audin, auteur des notes de bas de page.

Ces lettres montrent à la fois le soutien apporté par le grand mathématicien à la jeune sévrienne et le cran de celle-ci car, tout de même, aller seule de Lyon à Clermont-Ferrand voir Ehresmann à cette époque troublée...

« Lyon le 28 août 1942

Cher Monsieur

Au début d'août, je me suis fixée à Lyon. Je suis désolée de ne pouvoir continuer avec vous des travaux qui m'avaient tant intéressée et pour lesquels vous m'aviez témoigné tant de bienveillante attention ; j'espère que vous comprendrez les raisons

---

[2] Ma génération la désignait à son insu d'un *Paulette* affectueux, qu'elle aurait sûrement trouvé impertinent.

[3] Rappelons que, très vite, les juifs n'ont plus eu accès aux grades élevés de la fonction publique (et que le Conseil d'État les a par conséquent bientôt exclus de celle-ci *au nom du principe d'équité...*). Paulette Libermann n'a donc pu passer l'agrégation et c'est ainsi qu'elle est devenue mathématicienne.

qui m'ont poussée à abandonner mes projets. J'ai cependant l'intention, si cela est possible, de continuer mes recherches et je vous serais bien reconnaissante si vous pouviez m'indiquer un Professeur qui voudrait bien me conseiller, soit à Lyon de préférence (car nous avons trouvé un appartement) soit à Grenoble ou à Clermont. Je me suis renseignée ici au sujet de ma bourse ; je ne sais si la bourse Visconti peut être transférée mais si j'obtenais une bourse d'Etat le transfert de celle-ci serait possible. Je ne continuerai mes recherches qu'à cette condition car autrement je me verrais obligée de chercher une situation me trouvant sans autres ressources.

J'ai remis à Mademoiselle Ferrand[4] *les livres que vous m'aviez si obligeamment prêtés pour qu'elle vous les rende. D'ailleurs j'ai mis Mademoiselle Ferrand au courant de mes projets avant son départ en vacances.*

Je vous remercie pour l'aide que vous avez bien voulu m'accorder pour mes travaux et pour tout ce que vous avez fait pour moi.

En vous souhaitant une bonne fin de vacances, je vous prie d'agréer, Monsieur, l'expression de mon profond respect

P. Libermann »

« Lyon le 15 octobre 1942

Cher Monsieur

Je vous remercie beaucoup de votre carte que je viens de recevoir et je vous suis reconnaissante de vous occuper de moi à un moment où vous êtes éprouvé[5]*. J'espère que cette épreuve sera de courte durée.*

Je suis allée rendre visite à Madame Weiss[6] *qui m'a reçue très gentiment et m'a donné des nouvelles de vous et des vôtres.*

En ce qui concerne une bourse je suis allée voir le Doyen de la faculté des Sciences de Lyon avant de recevoir votre carte. Celui-ci va essayer de se mettre en contact avec Monsieur Montel[7]*. J'espère que vos démarches aboutiront et je m'excuse de vous causer tant de dérangements. Je suis allée voir Monsieur Paul Lévy, professeur à Polytechnique qui m'a indiqué et prêté des livres mais ne pourra s'occuper de moi, ne restant pas à Lyon*[8]*.*

Je vous prie de croire, cher Monsieur, à l'expression de ma profonde sympathie

P. Libermann »

[4] Jacqueline Ferrand, caïmane à l'École de Sèvres.

[5] Élie Cartan est éprouvé par l'arrestation de son fils, le physicien Louis Cartan.

[6] Madame Weiss était la belle-mère d'Henri Cartan.

[7] Le mathématicien Paul Montel était doyen de la faculté des sciences à Paris.

[8] Paul Lévy était à Lyon où l'École polytechnique était repliée.

« Lyon le 3 décembre 1942

Cher Monsieur

J'ai le plaisir d'apprendre que ma bourse vient de m'être transférée et que je vais la toucher en totalité cette semaine.

Je vous remercie pour toutes les démarches que vous avez faites à ce sujet et je ne saurais comment exprimer ma reconnaissance pour tout ce que vous avez fait pour moi.

En ce qui concerne mes recherches, Monsieur Lichnerowicz m'a adressée à Monsieur Ehresmann ; celui-ci, à qui je suis allée rendre visite à Clermont-Ferrand cette semaine, veut bien me guider dans mon travail et m'a indiqué plusieurs ouvrages de topologie des groupes à lire.

J'espère que vous avez de bonnes nouvelles de tous les vôtres et que l'hiver ne présentera pas trop de difficultés pour vous, l'année prochaine nous voyant tous réunis.

Mes parents qui devaient venir nous rejoindre n'ont pu le faire à leur grand regret.

En vous remerciant encore pour le dévouement dont vous avez fait preuve à mon égard, je vous prie d'agréer, cher Monsieur, l'expression de ma respectueuse sympathie

P. Libermann »

Paulette Libermann vers 1939
Extrait d'une « photo de classe » prise à Sèvre

L'introduction de la thèse

Le document qui suit reproduit le titre et l'introduction de la thèse de Paulette Libermann, soutenue le 21 mai 1953 devant la faculté des sciences de l'université de Strasbourg ; le jury était formé de Georges Cerf (président), Charles Ehresmann et Jacques Deny. Dans la mesure du possible, la typographie de l'original a été respectée : seule la numérotation des références bibliographiques a changé, celles de la thèse n'apparaissant pas toutes dans cette introduction.

Sur le problème de l'équivalence de certaines structures infinitésimales.

Mémoire de Paulette Libermann (à Strasbourg).

Résumé. - *Après avoir rappelé la définition et quelques propriétés des pseudogroupes de Lie, on définit les structures infinitésimales régulières. On peut toujours associer des connexions affines à de telles structures ; courbure et torsion de ces connexions. Equivalence locale de deux structures infinitésimales. Application à l'étude des structures presque complexes, presque paracomplexes, presque symplectiques, presque hermitiennes, presque parahermitiennes, presque quaternioniennes, presque quaternioniennes de deuxième espèce.*

Introduction

La *théorie de l'équivalence* développée par E. Cartan dans de nombreux mémoires (notamment dans [3] et [5])* est à la base de la géométrie différentielle ; elle permet également l'intégration de certains systèmes différentiels.

L'exposé de cette théorie fait l'objet de la première partie du présent travail ; le problème d'équivalence est formulé en le rattachant à la théorie des espaces fibrés, en particulier en introduisant la notion de *structure infinitésimale régulière* due à C. Ehresmann [7] : une structure infinitésimale régulière du premier ordre sur une variété différentiable V_n est une structure fibrée subordonnée à la structure fibrée de l'espace des vecteurs tangents à V_n (le groupe structural G est un sous-groupe du groupe linéaire homogène L_n, la fibre est R^n). Le problème d'équivalence de E. Cartan se ramène au problème d'équivalence locale de ces structures ; nous n'aborderons pas le problème d'existence de telles structures qui conduit à des obstacles, ni celui de l'équivalence globale.

Dans la recherche des conditions d'équivalence locale de deux structures on est amené à étudier le pseudogroupe de leurs automorphismes locaux, d'où la notion de *pseudogroupe fini ou infini de* Lie (« groupe fini » ou « groupe infini » de Lie suivant la terminologie de E. Cartan. C'est d'ailleurs l'étude du problème d'équivalence qui a conduit E. Cartan à édifier sa théorie des « groupes infinis » de Lie, que l'on trouve exposée notamment dans [2] et [4] ; les transformations de ce « groupe infini » constituent l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles que l'on peut ramener à un système de Pfaff *en involution.*

Dans le chapitre I, consacré aux pseudogroupes de Lie, je rappelle d'abord quelques propriétés des systèmes d'équations aux dérivées partielles et les principales notions de la théorie des systèmes de Pfaff en involution. Ensuite est

* Les nombres entre crochets renvoient à l'index bibliographique.

exposée la définition d'un pseudogroupe de LIE, telle qu'elle a été donnée par C. EHRESMANN [7] en utilisant la notion de *groupoïde de jets* ; un pseudogroupe de LIE est caractérisé par son *ordre* ; de plus j'introduis, pour les pseudogroupes finis, la notion de *degré*. Les deux théorèmes fondamentaux de E. CARTAN relatifs à la théorie des pseudogroupes de LIE sont démontrés en utilisant la notion de *prolongement d'une variété différentiable* [7], notion déjà utilisée bien que non formulée explicitement par U. AMALDI dans son ouvrage sur les « groupes infinis » [1]. En vertu du premier théorème de E. CARTAN, tout pseudogroupe de LIE admet un prolongement du premier ordre et, s'il est fini, un prolongement d'ordre et de degré égaux à 1. Dans le deuxième théorème sont énoncées des conditions pour qu'un pseudogroupe de transformations soit un pseudogroupe infini (resp. fini) de LIE d'ordre 1 (resp. d'ordre et de degré égaux à 1).

Dans le chapitre II est définie l'équivalence locale de deux structures infinitésimales régulières. Une structure infinitésimale régulière est déterminée localement par un ensemble de n formes de PFAFF dont la restriction à tout point de V_n est un « corepère ». On envisage en particulier des structures *isotropes, localement homogènes, intégrables.* À toute structure infinitésimale régulière sont associées des *connexions affines* [6] ; à chacune des connexions correspond un tenseur de *courbure* et un tenseur de *torsion.* Je démontre deux théorèmes relatifs aux structures infinitésimales régulières intégrables. J'expose ensuite les méthodes de E. CARTAN pour traiter le problème d'équivalence restreint (structures dont le groupe structural est la transformation identique). Dans la résolution du problème d'équivalence général, on cherche à déterminer en chaque point un corepère distingué ; si cette détermination est possible, on est ramené au problème d'équivalence restreint. Lorsqu'on peut associer canoniquement à la structure une connexion affine, le pseudogroupe de ses automorphismes est un pseudogroupe de LIE de type fini de degré 2 ; dans le cas contraire, le pseudogroupe de ses automorphismes locaux est en général un pseudogoupe infini de LIE (si l'on suppose de plus les données analytiques).

Les théories générales exposées dans la première partie de ce travail ont leurs applications dans la deuxième partie, consacrée aux structures infinitésimales régulières définies sur une variété différentiable V_{2n}, de dimension $2n$, dont le groupe structural G est : le groupe linéaire homogène complexe L'_n ou le groupe linéaire homogène « paracomplexe » $\mathring{L}'_n$ (isomorphe à $L_n \times L_n$) ou encore le groupe symplectique $\tilde{L}_{2n}$; ces structures sont appelées respectivement *presque complexes, presque « paracomplexes »* , *presque symplectiques.* On étudiera également dans cette deuxième partie des structures subordonnées aux précédentes, dont le groupe structural est subordonné à une forme réelle du groupe L'_n : groupe unitaire U_n, groupe $U_n^{(k)}$ unitaire « d'espèce k », groupe « para-unitaire » $\mathring{U}_n$ et groupe $\widehat{L_n}$ (ces deux derniers isomorphes à L_n) et si $n = 2p$, groupe linéaire homogène quaternionien L''_p et quaternionien « de deuxième espèce » $\mathring{L}''_p$ (identique à $\widehat{L_{2p}}$). Contrairement à ce qui a lieu pour les structures presque complexes, presque paracomplexes et presque symplectiques, on peut associer canoniquement au moins une connexion affine à ces structures (structures *presque hermitiennes*, *presque hermitiennes « d'espèce k »* , *presque parahermitiennes*, *presque quaternioniennes*, *presque quaternioniennes de deuxième espèce*). Pour chacune de ces connexions, on peut définir, outre les tenseurs de courbure et de torsion, des tenseurs de courbure et de torsion conformes. La recherche de celles de ces structures qui sont isotropes conduit aux structures intégrables et aux structures localement équivalentes à une structure d'espace hermitien elliptique ou hyperbolique (si le groupe structural est U_n), d'espace hermitien d'espèce k (si le groupe structural est $U_n^{(k)}$), ou à une structure parahermitienne sur la variété $P_n(R) \times P_n(R)$ (si le groupe structural est $\mathring{U}_n$). On obtient ainsi des espaces riemanniens symétriques à métrique définie ou indéfinie. En définissant une isotropie restreinte, on est conduit aux structures précédentes et en outre à des structures localement équivalentes à une structure presque hermitienne sur la sphère S_6 ou à une structure presque parahermitienne sur la quadrique réelle Q_6 ; ces structures admettent respectivement comme groupe d'automorphismes le groupe simple compact G_2 à 14 paramètres et le groupe simple G_2' qui sont les deux formes réelles d'un même groupe complexe.

Dans le chapitre III (qui est purement algébrique) sont étudiées des structures de la fibre R^{2n} admettant comme groupe d'automorphismes L_n', $\mathring{L}_n'$, $\tilde{L}_{2n}$, U_n, $U_n^{(k)}$, $\mathring{U}_n$, $\widehat{L_n}$. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre est définie l'*adjointe* d'une forme extérieure φ par rapport à une forme extérieure quadratique Ω de rang $2n$; l'opérateur Λ, adjoint de l'opérateur $L\varphi = \varphi \wedge \Omega$ ne dépend que de Ω et non de la forme quadratique définie positive échangeable avec Ω ; il en est de même de la notion de *classe* ; il est également prouvé que la décomposition d'une forme en formes de classe déterminée (dont je donne une démonstration différente de celle d'Eckmann-Guggenheimer) est identique à la décomposition de Lepage.

Ces résultats sont utilisés dans le chapitre IV, consacré au problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques, et dans lequel est introduite la notion de *codifférentielle* par rapport à une forme différentielle extérieure quadratique.

Dans le chapitre V sont étudiées les structures presque complexes et presque paracomplexes, ainsi que les structures presque hermitiennes, presque hermitiennes d'espèce k, presque parahermitiennes. En particulier, le problème d'équivalence des structures presque complexes et presque hermitiennes sur une variété V_4 est traité en détail.

Enfin les structures infinitésimales régulières de groupe structural $\widehat{L_n}$ (structures presque quaternionniennes de deuxième espèce si $n = 2p$) font l'objet du chapitre VI ; à de telles structures on peut associer canoniquement trois connexions affines en général distinctes. On envisage également dans ce chapitre des structures subordonnées aux précédentes, de groupe structural isomorphe au groupe orthogonal O_n (on détermine celles de ces structures qui sont isotropes) ; si $n = 2p$, on envisage aussi des structures de groupe structural isomorphe à $L_p \times L_p \times L_p \times L_p$ ou à $L_p' \times L_p'$ ou à un de leurs sous-groupes ; parmi ces dernières, celles dont le groupe structural est isomorphe à L_p' et qui sont isotropes sont ou bien intégrables ou bien localement équivalentes à une structure parahermitienne complexe sur la variété $P_p(C) \times P_p(C)$.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Charles Ehresmann pour l'aide qu'il a bien voulu m'accorder dans mes recherches et dont les nombreux conseils ont été précieux dans l'élaboration de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] U. Amaldi, *Teoria dei gruppi continui infiniti di trasformazioni.* Roma, 1942.
[2] E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de tranformations*, « Ann. Sci. Ec. Norm. », 21, 1904, p. 153–206.
[3] —— *Les sous-groupes des groupes continus de tranformations*, « Ann. Sci. Ec. Norm. », 25, 1908, p. 57–194.
[4] —— *La structure des groupes infinis*, « Séminaire de Math. », 4e année, 1936–37, G, (polycopié).
[5] —— *Les problèmes d'équivalence*, « Selecta », Paris, Gauthier-Villars, 1937, p. 113–136.
[6] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque Top. Bruxelles 1950, p. 29.
[7] —— *Les prolongements d'une variété différentiable*, « C.R. Acad. Sc. Paris », 233, 1951, p. 598, 777 et 1081 – *Structures locales et structures infinitésimales*, ibidem, 234, 1952, p. 587.

Commentaire en forme de petit cours (première partie)

Cette thèse se situe à la charnière de deux mondes : celui de l'avant-guerre, à travers l'œuvre (et la personne) d'Élie Cartan[10], et le modernisme de l'après-guerre, qu'Ehresmann incarne magnifiquement. Contrairement à d'autres disciples de celui-ci (Haefliger, Reeb, Thom dans une large mesure), Paulette Libermann reste en marge des développements de la topologie différentielle globale, rendus possibles par la clairvoyance de leur maître et par le développement fulgurant de la topologie algébrique et des méthodes homologiques autour d'Henri Cartan. En revanche, elle ne sacrifie rien de la complexité inhérente à l'univers d'Élie Cartan[11], qu'elle traduit dans le nouveau langage, jouant un rôle de « passeur » bien avant le Dieudonné des *Éléments d'Analyse* [10, 11] et avec moins de parti-pris.

Les notes qui suivent (et celles qui suivront) insistent sur ce nouveau langage[12] et sur certains des développements qu'il a permis, tout en commentant quelques aspects de la thèse.

Le cadre est celui des variétés et applications différentiables (c'est-à-dire C^∞ ou « assez différentiables », le mot étant sous-entendu lorsque rien n'est spécifié) de dimension finie, dont on suppose connue la définition – la plupart des notions considérées « passent » sans problème dans les catégories analytiques réelle et (en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$) complexe et/ou banachique. La dérivée k–ième d'une application f est notée $D^k f$ comme dans [9]. Les chemins sont définis sur des intervalles.

---

[10] Lequel représente l'avant-garde de l'avant-guerre, ne pas l'oublier.
[11] Par définition, les variétés, les fibrés, les feuilletages, dont l'après-guerre fait ses choux gras, sont localement sans mystère, alors qu'on ne peut pas étudier en toute généralité les propriétés globales d'objets mal compris localement ; la thèse de Paulette Libermann pose justement les fondations locales de telles études globales.
[12] Comme il est devenu en bonne partie classique, je présente mes excuses à ceux qui le connaissent mieux que moi : ce texte n'est pas écrit pour eux. Les choix effectués et les erreurs éventuelles me sont entièrement imputables. Une référence recommandée est bien sûr [14].

Jets

Introduits par Ehresmann [7], curieusement presque absents de [10, 11], ils sont au début de la thèse – et de la géométrie différentielle moderne, puisqu'ils généralisent la notion de développement de Taylor aux applications entre variétés différentiables. Rappelons la *formule de Faà di Bruno*[13] donnant la dérivée k–ième de la composée de deux applications C^k entre ouverts d'espaces de Banach :

$$\frac{1}{k!}D^k(g\circ f)(x)v^k =$$
$$\sum D^{|p|}g(f(x))\left(\frac{1}{p_1!}\Big(\frac{1}{1!}D^1f(x)v^1\Big)^{p_1},\dots,\frac{1}{p_k!}\Big(\frac{1}{k!}D^kf(x)v^k\Big)^{p_k}\right),$$

où x appartient à l'ouvert de définition de $g\circ f$, le vecteur v à l'espace de Banach ambiant, $v^k := (\overbrace{v,\dots,v}^{k\text{ fois}})$ et la somme se fait sur tous les $p=(p_1,\dots,p_k)\in\mathbb{N}^k$ avec $\sum j\,p_j = k$, en posant $|p| = \sum p_j$.

Pour chaque entier naturel k, on dit que deux applications f et g de classe C^k, définies au voisinage d'un point a d'une variété M, à valeurs dans une variété N, ont le même *jet d'ordre k* en a, noté $j^k_af = j^k_ag$, lorsqu'elles y prennent la même valeur b et qu'il existe des cartes locales $\varphi : (M,a)\to\mathbb{R}^n$ et $\psi : (N,b)\to\mathbb{R}^p$ telles que $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ et $\psi\circ g\circ\varphi^{-1}$ aient le même développement de Taylor d'ordre k au point $\varphi(a)$; heureusement pour cette définition, la formule de Faà di Bruno implique que c'est alors le cas *quelles que soient* les cartes locales φ et ψ en a et b respectivement.

Soit $J^k(M,N)$ l'ensemble des jets d'ordre k d'applications de M dans N, c'est-à-dire de tous les j^k_af ainsi définis. Si M,N sont des ouverts U,V de $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p$ respectivement, $J^k(U,V)$ s'identifie à l'ouvert $U\times V\times J^k(n,p)$ de l'espace vectoriel de dimension finie

$$J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times J^k(n,p) := \mathbb{R}^n\times\prod_{j=0}^{k}L^j_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p),$$

où l'on a noté $L^j_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ l'espace des applications j–linéaires symétriques de $(\mathbb{R}^n)^j$ dans $\mathbb{R}^p$ et $L^0_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) := \mathbb{R}^p$; en effet, il est alors naturel d'identifier j^k_af à $\left(a,\big(D^jf(a)\big)_{0\leqslant j\leqslant k}\right)$, et cette identification est bien bijective puisque tout $(a,b_0,\dots,b_k)\in U\times V\times J^k(n,p)$ est de la forme j^k_af pour $f(x)=\sum_0^k\frac{1}{j!}b_j(x-a)^j$.

Dans le cas général, il résulte de la formule de Faà di Bruno que $J^k(M,N)$ est muni d'une structure de variété différentiable par les *cartes naturelles* $\Phi^k_{\varphi,\psi}$ associées aux couples de cartes locales φ de M et ψ de N comme suit :

– l'ouvert de définition $\operatorname{dom}\Phi^k_{\varphi,\psi}$ de $\Phi^k_{\varphi,\psi}$ est l'ensemble des j^k_af avec $a\in\operatorname{dom}\varphi$ et $f(a)\in\operatorname{dom}\psi$

– la carte $\Phi^k_{\varphi,\psi}$ est donnée par la formule[14]

$$\Phi^k_{\varphi,\psi}(j^k_af) := j^k_{\varphi(a)}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})$$

– son image $\operatorname{im}\Phi^k_{\varphi,\psi}$ est donc $J^k(\operatorname{im}\varphi,\operatorname{im}\psi)$.

[13] Béatifié en 1988... Elle s'obtient par « composition des développements limités d'ordre k » [8].

[14] Impliquant que les changements de cartes sont les $\Phi^k_{\varphi_1,\psi_1}\circ(\Phi^k_{\varphi,\psi})^{-1} = \Phi_{\varphi_1\circ\varphi^{-1},\psi_1\circ\psi^{-1}}$.

Exemples et « produits dérivés »

La variété $J^0(M,N)$ s'identifie évidemment à $M \times N$ par le difféomorphisme $j_a^0 f \mapsto \big(a, f(a)\big)$.

Le sous-ensemble de $J^1(\mathbb{R},N)$ formé des $j_0^1 f$ est une sous-variété, le *fibré tangent* TN de N : chaque carte naturelle $\Phi^1_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\psi}$ est une carte adaptée à cette sous-variété et en induit par restriction la carte $T\psi : j_0^1\gamma \mapsto \big(\psi \circ \gamma(0), (\psi \circ \gamma)'(0)\big)$; en outre, $J^1(\mathbb{R},N)$ s'identifie à $\mathbb{R} \times TN$ par l'application $j_t^1\gamma \mapsto \big(t, j_0^1(\gamma \circ \tau_{-t})\big)$, où $\tau_{-t}(x) = x + t$. On dit que $j_0^1(\gamma \circ \tau_{-t})$ est la *vitesse* $\dot\gamma(t)$ du chemin γ au temps t (la donnée de cette vitesse inclut celle de la position $\gamma(t)$, mais non celle du temps t).

Le sous-ensemble de $J^1(M,\mathbb{R})$ formé des $j_a^1 f$ avec $f(a) = 0$ est une sous-variété, le *fibré cotangent* T^*M de M : chaque $\Phi^1_{\varphi,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ en est une carte adaptée et en induit par restriction la carte $T^*\varphi : j_a^1 f \mapsto \Big(\varphi(a), D(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(a)\big)\Big)$; en outre, $J^1(M,\mathbb{R})$ s'identifie à $T^*M \times \mathbb{R}$ par l'application $j_a^1 f \mapsto \big(j_a^1(\tau_{f(a)} \circ f), f(a)\big)$. On dit que $j_a^1(\tau_{f(a)} \circ f)$ est la *différentielle* $d_a f$ de f au point a (sa donnée inclut celle de a, mais non celle de $f(a)$).

Les cartes naturelles munissent $J^k(M,N)$ de beaucoup plus qu'une simple structure de variété, puisque les projections $j_a^k f \mapsto a$ (« projection-source »), $j_a^k f \mapsto f(a)$ (« projection-but ») et $j_a^k f \mapsto j_a^\ell f$, $0 \leqslant \ell < k$, sont toutes des fibrations, comme nous allons le voir maintenant.

Submersions et fibrations

Une application $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$ entre variétés est une *submersion* lorsqu'« elle est localement *en haut* la projection sur le premier facteur d'un produit » : pour tout $a \in E$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, un ouvert V de $\mathbb{R}^r$, une carte locale $\tilde\varphi$ de E en a et une carte locale φ de B en $\pi(a)$ telles que $\operatorname{im}\tilde\varphi = U \times V$, $\operatorname{im}\varphi = U$ et $\varphi \circ \pi = \mathrm{pr}_1 \circ \tilde\varphi$, où $\mathrm{pr}_1 : U \times V \to U$ désigne la projection sur le premier facteur. On dit alors que $\tilde\varphi$ est une *carte fibrée* de la submersion au-dessus de φ.

De même, π est une *fibration localement triviale* lorsqu'« elle est localement *en bas* la projection sur le premier facteur d'un produit » : pour tout $b \in B$, il existe une carte locale φ de B en b, une variété F et un difféomorphisme $\tilde\varphi$ de $\pi^{-1}(\operatorname{dom}\varphi)$ sur $\operatorname{im}\varphi \times F$ tels que $\varphi \circ \pi = \mathrm{pr}_1 \circ \tilde\varphi$, en notant $\mathrm{pr}_1 : \operatorname{im}\varphi \times F \to \operatorname{im}\varphi$ la projection sur le premier facteur[15].

Il est clair (en prenant des cartes locales de la *fibre type* F) qu'une fibration est une submersion et (par définition d'une sous-variété) que les *fibres* $\pi^{-1}(b)$ d'une submersion sont des sous-variétés. Lorsque π est une fibration, on dit que E est (l'*espace total* d')un *fibré*[16] de *base* B et de *projection* π.

Quand F est un ouvert de $\mathbb{R}^r$, le difféomorphisme $\tilde\varphi$ de la définition d'un fibré (qui dans tous les cas détermine φ) est une carte de E. Un *fibré vectoriel* est défini par la donnée d'un atlas de telles cartes $\tilde\varphi$ avec $F = \mathbb{R}^r$ (ou un espace

---

15 On peut faire l'économie de φ en donnant la définition équivalente suivante : pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $\Omega \ni b$ de B et un difféomorphisme h de $\pi^{-1}(\Omega)$ sur $\Omega \times F$ tel que $\pi|_{\pi^{-1}(\Omega)}$ soit la première composante de h, lequel est appelé *trivialisation locale* de π.

16 Le français « espace fibré » est plus appétissant que le « paquet de fibres » (fiber bundle) anglo-saxon.

vectoriel), tel que les changements de cartes $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ soient linéaires par rapport à la fibre type F (« atlas de fibré vectoriel »). Il s'ensuit que les fibres $E_b = \pi^{-1}(b)$ sont munies d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à F. En remplaçant « linéaire » et « vectoriel » par « affine », on obtient la notion de *fibré affine*, dont les fibres sont des espaces affines.

Sections

Avec les notations précédentes, une *section différentiable de la submersion π au-dessus de l'ouvert U de B* est une application différentiable σ de U dans $\pi^{-1}(U)$ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$; si $U = B$, on parle de *section* de π. De même qu'une application est déterminée par son graphe, une section est déterminée par son *image* $\sigma(U)$, qui est une sous-variété (elle apparaît comme un graphe dans les cartes fibrées $\tilde{\varphi}$). Il est donc naturel – d'où la terminologie – de considérer qu'une section différentiable de π au-dessus de U est une sous-variété qui rencontre chaque fibre de $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ en un unique point et *transversalement* (voir plus loin).

Cas des jets

Il est immédiat que les projections $\pi_k^\ell : J^k(M,N) \to J^\ell(M,N)$ définies pour $\ell \leqslant k$ par $\pi_k^\ell(j_a^k f) = j_a^\ell f$ sont des fibrations, dont la fibre type est l'espace vectoriel $\prod_{\ell<j\leqslant k} L_s^j(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$: il suffit de prendre $\tilde{\varphi} = \Phi_{\varphi,\psi}^k$ et $\varphi := \Phi_{\varphi,\psi}^\ell$ dans la définition. De même, en prenant $\tilde{\varphi} = \Phi_{\varphi,\psi}^k$ et $\varphi = \varphi$ (resp. $\varphi := \psi$) dans la définition d'une submersion, on voit que la projection-source $s_k : j_a^k f \to a$ et la projection-but $b_k : j_a^k f \to f(a)$ sont des submersions[17].

La formule de Faà di Bruno montre que

– l'on définit ainsi sur $J^1(M,N)$ une structure de fibré vectoriel de base $J^0(M,N) = M \times N$, de projection π_1^0 et de fibre type $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$

– le fibré tangent TN est donc un fibré vectoriel de base N et de fibre type $\mathbb{R}^p = L(\mathbb{R},\mathbb{R}^p)$, et le fibré cotangent T^*M un fibré vectoriel de base M et de fibre type $\mathbb{R}^{n*} = L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

– pour $k > 1$, le fibré $J^k(M,N)$ est un fibré *affine* de fibre type $L_s^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ sur $J^{k-1}(M,N)$

– pour $\ell < k \leqslant 2\ell+1$, l'espace $J^k(M,N)$ est muni par les cartes $\Phi_{\varphi,\psi}^k$ d'une structure de fibré *affine* sur $J^\ell(M,N)$

– ce n'est pas le cas pour $k > 2\ell+1$, les changements de cartes naturelles étant polynomiaux de degré au moins 2 par rapport à la fibre type, *mais*

– si N est un espace vectoriel, $J^k(M,N)$ est muni pour $0 \leqslant \ell < k$ d'une structure de fibré affine sur $J^\ell(M,N)$ (fibré *vectoriel* si $\ell = 0$) par les cartes $\Phi_{\varphi,\mathrm{id}_N}^k$.

[17] Ce sont en fait des fibrations, dont les fibres type sont respectivement l'ensemble $J_0^k(\mathbb{R}^n,N)$ des $j_0^k f \in J^k(\mathbb{R}^n,N)$ et l'ensemble $J^k(M,\mathbb{R}^p)_0$ des $j_a^k f \in J^k(M,\mathbb{R}^p)$ avec $f(a) = 0$; on le voit comme pour les fibrés tangents et cotangents : à toute carte φ de M on peut associer le difféomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $s_k^{-1}(\mathrm{dom}\,\varphi)$ sur $\mathrm{im}\,\varphi \times J_0^k(\mathbb{R}^n,N)$ qui envoie $j_a^k f$ sur $\big(\varphi(a), j_0^k(f \circ \varphi^{-1} \circ \tau_{-\varphi(a)})\big)$; à toute carte φ de N on peut de même associer le difféomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $b_k^{-1}(\mathrm{dom}\,\varphi)$ sur $\mathrm{im}\,\varphi \times J^k(M,\mathbb{R}^p)_0$ qui envoie $j_a^k f$ sur $\big(\varphi \circ f(a), j_a^k(\tau_{\varphi\circ f(a)} \circ \varphi \circ f)\big)$.

La fibre T_aM de TM au-dessus de $a \in M$ est l'*espace tangent*[18] à M en a ; la fibre T_a^*M de T^*M s'identifie naturellement au dual $(T_aM)^*$, la forme de dualité étant $\big(\dot\gamma(a), d_af\big) \mapsto (f \circ \gamma)'(a)$.

Exemples de sections

Pour toute application différentiable f d'un ouvert U de la variété M dans la variété N, l'application $j^kf : a \mapsto j_a^kf$ est une section de la projection-source $J^k(M,N) \to M$ au-dessus de[19] U, appelée *jet d'ordre k de f* ; de telles sections sont dites *holonomes.*

Une section du fibré tangent $TM \to M$ au-dessus de U est appelée *champ de vecteurs*[20] sur U.

Pour toute fonction réelle différentiable f sur un ouvert U de M, l'application $df : a \mapsto d_af$ est une section du fibré cotangent $T^*M \to M$ au-dessus de U, ou encore une section du fibré cotangent $T^*U \subset T^*M$; une section du fibré cotangent $T^*U \to U$ est appelée « champ de covecteurs » ou *forme de Pfaff* (ou *forme différentielle de degré* 1, ou 1–*forme différentielle*, ou 1–*forme*) sur U.

Plus généralement, à toute application différentiable $f : M \to N$ est associée l'application Tf de TM dans TN définie par $Tf\big(\dot\gamma(a)\big) = \dot{\overline{f \circ \gamma}}(a)$; sa restriction T_af à chaque fibre T_aM est une application *linéaire* dans $T_{f(a)}M$ (« application linéaire tangente à f en a ») : on dit que Tf un homomorphisme de fibrés vectoriels.

Bien sûr, T_af s'identifie à j_a^1f. Dans les années 70, on prétendait [10, 11] remplacer par exemple j^2f par $T(Tf)$, mais l'inflation de dimensions et la redondance qui en résultent sont déraisonnables.

Caractérisation des submersions, espaces verticaux, horizontaux et sections

On déduit aisément du théorème d'inversion locale qu'une application différentiable $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$ entre variétés est une submersion au voisinage de $a \in E$ si et seulement si l'application linéaire tangente $T_a\pi$ est surjective ; par conséquent, π est une submersion si et seulement si $T_a\pi$ est surjective pour tout $a \in E$.

Pour chaque $a \in E$, en posant $b = \pi(a)$, l'espace tangent au point a à la fibre $\pi^{-1}(b)$ de la submersion π est le noyau $\ker T_a\pi$; on l'appelle *espace vertical* $\mathcal{V}_a$ de π au point a ; dans le cas d'un fibré vectoriel, il s'identifie donc à l'espace vectoriel E_b ; pour un fibré affine, il s'identifie à l'espace vectoriel $\vec{E}_b$ sous-jacent à la fibre.

Achevons de caractériser les sections différentiables σ de la submersion π au-dessus d'un ouvert U de B comme sous-variétés : ce sont les sous-variétés W de $\pi^{-1}(U)$ qui rencontrent chaque fibre $\pi^{-1}(b)$ avec $b \in U$ en un unique point a, où l'espace tangent T_aW est *horizontal*, c'est-à-dire supplémentaire dans T_aE

---

18 C'est donc un espace *vectoriel*, ce qui n'empêche nullement, quand M est une sous-variété de $\mathbb{R}^d$, de le dessiner authentiquement tangent à M en a : considérer les vecteurs tangents à M en a, c'est « regarder M au microscope en se centrant en a » c'est-à-dire en y plaçant l'origine de l'espace *affine* $\mathbb{R}^d$.

19 C'est aussi évidemment une section de la projection-source $J^k(U,N) \to U$.

20 En tout point a de U on fait pousser en guise d'épi de blé un vecteur $X_a \in T_aU = T_aM$.

de l'espace vertical $\mathcal{V}_a$; bref, $\pi|_W$ est un difféomorphisme de W sur U et la section σ correspondante est la composée de $(\pi|_W)^{-1}$ et de l'inclusion $W \hookrightarrow \pi^{-1}(U)$.

Remarques
Dans le cas du fibré tangent, il faut donc imaginer les fibres T_aM verticales, transversales à M (identifiée à la section nulle). Cela contrarie un peu l'intuition géométrique venant des sous-variétés de $\mathbb{R}^d$, pour lesquelles T_aM est couché le long de M, mais il faut bien voir qu'en identifiant chaque T_aM au sous-espace affine ainsi dessiné, on obtient une *très mauvaise* représentation de TM : dans le cas où M est une courbe dans $\mathbb{R}^3$, par exemple, la surface de $\mathbb{R}^3$ ainsi obtenue admet M comme arête de rebroussement aux points où la courbe est « vraiment gauche », c'est-à-dire à courbure et torsion non nulles, qui sont pourtant les points les moins singuliers de la surface contenus dans M.

De même, les géodésiques d'une surface S de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ sont les courbes paramétrées γ à valeurs dans S dont l'accélération $\gamma''(t)$ est *normale* à la surface pour tout t, alors que la dérivée seconde $\ddot{\gamma}(t)$ est *horizontale* pour la connexion de Levi-Civita (voir plus loin). Il faut s'habituer...

Bien pire : le *rang* d'un fibré est la dimension de sa fibre, c'est-à-dire le *corang* de sa projection.

Quelques fibrés de la thèse
La donnée d'une base (« repère ») $(e_1, \dots, e_n)$ d'un espace vectoriel réel E équivaut à celle de l'isomorphisme $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^1e_1 + \cdots + x^ne_n$ de $\mathbb{R}^n$ sur E. Un objet essentiel, introduit au langage près par Élie Cartan, est le *fibré des repères* d'une variété M de dimension n, dont la fibre au-dessus de $a \in M$ est l'ensemble des *isomorphismes* (linéaires) A_a de $\mathbb{R}^n$ sur T_aM ; c'est donc un ouvert dense du fibré vectoriel de base M (généralisant TM) formé de tous les $j_0^1 f \in J^1(\mathbb{R}^n, M)$, et évidemment un fibré dont la fibre type est le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ (noté L_n dans la thèse) : on le voit en y restreignant les cartes naturelles $\Phi_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},\varphi}$ de $J^1(\mathbb{R}^n, M)$.

Ce fibré des repères, noté $\mathrm{Isom}(M \times \mathbb{R}^n, TM)$ dans [11][21], est naturellement muni de l'action $(B, A_a) \mapsto A_a \circ B^{-1}$ de $GL_n(\mathbb{R})$, qui est libre et transitive dans chaque fibre : on dit que c'est un *fibré principal* de *groupe structural* $GL_n(\mathbb{R})$.

Les « structures infinitésimales régulières » de la thèse sont des « sous-fibrés principaux du fibré des repères ».

Par exemple, se donner une métrique riemannienne sur M (c'est-à-dire un produit scalaire dans chaque espace tangent T_aM, dépendant différentiablement de a en ce sens que la fonction réelle qui à $v \in TM$ associe son carré scalaire est différentiable) revient à se donner le sous-fibré du fibré des repères formé des A_a envoyant la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sur une base orthonormée pour le produit scalaire dans T_aM. On obtient ainsi un fibré principal dont le groupe structural est le groupe orthogonal O_n, le *fibré des repères orthonormés* de la variété riemannienne considérée. Le produit scalaire sur T_aM est alors l'image du produit scalaire euclidien standard sur $\mathbb{R}^n$ par un quelconque de ces « repères orthonormés » A_a.

Étant donné un sous-groupe fermé H de $GL_n(\mathbb{R})$, se donner un sous-fibré principal du fibré des repères, de groupe structural H, revient de même à se donner pour

[21] Au risque de faire croire que la sphère de dimension2 est parallélisable, voir la note suivante.

chaque $a \in M$ *un* des repères[22] A_a, les autres étant déterminés par l'action de H. La « structure » préservée (ou définie) par H est alors transportée dans T_aM par un quelconque des A_a considérés.

Pour chaque A_a, les n composantes de A_a^{-1} (applications coordonnées dans le repère A_a) sont des formes linéaires sur T_aM ; elles forment le « corepère » dont parle l'introduction de la thèse ; si l'on se donne une section du fibré de repères considéré au-dessus de l'ouvert U de M, c'est-à-dire que l'on choisit pour chaque $a \in U$ *un* repère A_a dans la fibre, les composantes de $a \mapsto A_a^{-1}$ sont donc des formes de Pfaff sur U : c'est le sens de la phrase « une structure infinitésimale régulière est déterminée localement par un ensemble de n formes de PFAFF ».

Systèmes de Pfaff et systèmes d'(in)équations aux dérivées partielles

Non content d'être fibré en tous sens, l'espace $J^k(M,N)$ est pour $k > 0$ muni d'un système de Pfaff canonique, facile à comprendre[23] lorsque $M = \mathbb{R}^n$ et $N = \mathbb{R}^p$.

Une section σ de la projection-source de $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n \times \prod_0^k L_s^j(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ au-dessus d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application de U dans $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ qui s'écrit $\sigma(x) = \big(x, y_0(x), \ldots, y_k(x)\big)$; pour qu'elle soit holonome (c'est-à-dire, rappelons-le, de la forme j^kf), il faut et il suffit évidemment que, modulo l'identification canonique de $L\left(\mathbb{R}^n, L^j(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\right)$ à $L^{j+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ fondamentale en calcul différentiel, $Dy_j(x) = y_{j+1}(x)$ pour $0 \leqslant j < k$ quel que soit $x \in U$.

Exprimons-le en regardant σ comme la sous-variété $W = \sigma(U)$: si l'on note $z = (x, y_0, \ldots, y_k)$ les points de $J^k := J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$, la section est holonome si et seulement si, en tout point z de W, l'espace tangent T_zW (autrement dit l'image de $D\sigma(x)$) est contenu dans le sous-espace $\mathcal{K}_z^k = \mathcal{K}_z^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ de $T_zJ^k \simeq J^k$ défini par les équations

$$dy_j = y_{j+1}\,dx \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j < k, \tag{1}$$

c'est-à-dire formé des vecteurs $\delta z = (\delta x, \delta y_0, \ldots, \delta y_k)$ tels que, modulo l'identification canonique que nous venons de mentionner[24], $\delta y_j = y_{j+1}\,\delta x$ pour $0 \leqslant j < k$.

On dit que (1) est le *système de Pfaff canonique* ou *système de Cartan* (ou, dirais-je, la *structure de contact canonique*) de $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$; de manière équivalente, on peut désigner par le même nom le champ de sous-espaces vectoriels (« champ de plans ») $z \mapsto \mathcal{K}_z^k$, que l'on peut voir plus géométriquement comme le sous-fibré vectoriel $\mathcal{K}^k = \mathcal{K}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ de $TJ^k \simeq J^k \times J^k$ réunion des $\{z\} \times \mathcal{K}_z^k$.

Là-dessus, on remarque que, pour chaque $z \in J^k$, le « plan » $\mathcal{K}_z^k$ est l'adhérence[25] de la réunion des T_zW lorsque W varie parmi les sections holonomes passant par z ; en utilisant les cartes naturelles, on en déduit le fait suivant : si l'on se donne maintenant deux variétés M et N, on définit un *système de Pfaff* $\mathcal{K}^k(M,N)$ sur $J^k(M,N)$, c'est-à-dire un sous-fibré vectoriel du fibré tangent

---

[22] Si l'on veut que celui-ci dépende différentiablement de a, il faut en général rester au niveau local : sinon, on obtiendrait un isomorphisme du fibré vectoriel trivial $M \times \mathbb{R}^n$ sur TM, isomorphisme qui n'existe pas [16] dans le cas de variétés aussi respectables que la sphère de dimension 2 : on dit qu'elles ne sont pas *parallélisables*, un des « obstacles » mentionnés dans la thèse – on parle aujourd'hui d'*obstructions*.

[23] Dans les parfois stupides années 70, on avait peur d'être métamorphosé en crapaud si l'on osait donner une définition compréhensible mais non intrinsèque ; les temps ont changé, j'espère.

[24] Bref, $y_{j+1}\,\delta x$ est le produit intérieur (« contraction ») de y_{j+1} par δx, c'est-à-dire l'application j–linéaire symétrique $(\delta x_1, \ldots, \delta x_j) \mapsto y_{j+1}(\delta x, \delta x_1, \ldots, \delta x_j)$.

[25] Il faut bien « attraper » aussi les vecteurs verticaux pour la projection sur J^{k-1}.

$TJ^k(M,N)$, par le fait que sa fibre au-dessus de $z \in J^k(M,N)$ est l'adhérence dans $T_z J^k(M,N)$ de la réunion des espaces tangents en z aux sections holonomes passant par z. Naturellement,

– on l'appelle *système de Pfaff canonique* ou *système de Cartan* (ou *structure de contact canonique*) de $J^k(M,N)$

– on a $T_z\Phi\big(\mathcal{K}_z(M,N)\big) = \mathcal{K}_{\Phi(z)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ pour toute carte naturelle Φ de $J^k(M,N)$ et tout jet $z \in \operatorname{dom}\Phi$, c'est même pourquoi $\mathcal{K}^k(M,N)$ est bien un sous-fibré vectoriel de $TJ^k(M,N)$.

On a donc compris qu'un *système de Pfaff* sur une variété V peut être défini[26] comme un sous-fibré vectoriel $\mathcal{P}$ du fibré tangent TV ; une *variété intégrale* de $\mathcal{P}$ est une sous-variété W de V telle que l'on ait $T_z W \subset \mathcal{P}_z$ pour tout $z \in W$; dans ce langage, une section de la projection-source de $J^k(M,N)$ est holonome si et seulement si, vue comme sous-variété, c'est une variété intégrale du système de Cartan – lequel admet d'autres variétés intégrales, par exemple les fibres de la projection sur $J^{k-1}(M,N)$.

Exemple

Si $p=1$, le système de Cartan $\mathcal{K}^1(M,N)$ est un champ d'hyperplans, authentique structure de contact au sens restrictif actuel, et ses variétés intégrales de dimension n s'appellent *sous-variétés de Legendre*, terminologie due à V.I. Arnol'd. En particulier, (1) ne comporte qu'une équation, et la forme de Pfaff $\alpha = dy_0 - y_1\,dx$ sur $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ est une *forme de contact*, c'est-à-dire que $d\alpha_z$ induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathcal{K}^1_z = \ker\alpha_z$; selon un théorème de Darboux [8], à difféomorphisme près, toutes les formes de contact en dimension $2n+1$ se ramènent *localement* à α.

Systèmes d'équations aux dérivées partielles

Un système de q équations aux dérivées partielles de degré k à p fonctions inconnues de n variables s'écrit de manière condensée $F(j^k_x y) = 0$, où F est une application d'un ouvert de $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ dans $\mathbb{R}^q$, la variable est $x \in \mathbb{R}^n$ et la fonction inconnue y (à valeurs dans $\mathbb{R}^p$). Une solution f du système définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ s'identifie à $j^k f$, c'est-à-dire à une section holonome de la projection-source $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^n$ au-dessus de U et à valeurs dans $E = F^{-1}(0)$; autrement dit, à une variété intégrale de la structure de contact canonique contenue dans E et se projetant difféomorphiquement (beuh !) sur U.

Un système d'équations aux dérivées partielles s'identifie donc à un système de Pfaff, à condition d'appeler ainsi le couple formé de (1) et de l'équation $F(z)=0$ (ce que fait la thèse, à la suite d'Elie Cartan). Si l'on veut se ramener à notre première définition, il faut prendre comme variété V la partie lisse de E (dans la thèse, F est analytique et cela a un sens) et le système de Pfaff $\mathcal{P}_z := \mathcal{K}_z \cap T_z V$, « fibré » dont le rang peut avoir une fâcheuse tendance à sauter (par exemple, si $k=n=p=q=1$, il peut parfaitement arriver que $\mathcal{K}_z = T_z V$ en certains points, qu'il faut exclure à leur tour de V si l'on veut un vrai sous-fibré vectoriel).

---

26 Dans la « vraie vie », nous allons voir tout de suite qu'il faut parfois un peu compliquer les choses : la variété V peut avoir des points singuliers, la dimension de la fibre $\mathcal{P}_z$ peut varier en certains points $z \in V$, etc.

Bien entendu, tout cela s'étend au cas où E est une sous-variété de codimension q de $J^k(M,N)$, pas forcément définie globalement par q équations réelles.

Pour $k = p = q = 1$, il est fructueux d'oublier dans un premier temps la projection $J^1 \to J^0$ et de considérer les « solutions géométriques » de l'équation, c'est-à-dire les variétés de Legendre contenues dans E, qu'elles soient ou non des sections de la projection-source. Elles ont parfois un sens physique, les caustiques étant par exemple les projections dans J^0 de telles solutions géométriques. Ce cas, dont la théorie locale est faite depuis le dix-neuvième siècle, connaît encore des développements globaux.

Systèmes d'inéquations aux dérivées partielles

Les espaces de jets servent aussi de cadre au principe d'homotopie ou h–principe [13], introduit par Gromov dans sa thèse[27] par une étonnante abstraction de celle de Smale sur la classification des immersions. Cela nous éloigne un peu de Paulette Libermann mais l'idée est intéressante, duale de celle que je viens d'indiquer : dans le cas des immersions d'une variété M dans une variété N, on se donne dans $J^1(M,N)$ l'ensemble ouvert Ω formé des jets d'immersions, c'est-à-dire des $j^1_a f$ tels que $T_a f$ soit injective. Étant données deux immersions f_0, f_1 de M dans N, on se demande si elles sont *régulièrement homotopes*, c'est-à-dire s'il existe un chemin différentiable $[0,1] \ni t \mapsto f_t$ qui les joint *dans l'espace des immersions* ; en d'autres termes, on se demande s'il existe un chemin de sections holonomes $j^1 f_t$ de $J^1(M,N) \to M$ joignant $j^1 f_0$ à $j^1 f_1$ et tel que toutes ces sections soient à valeurs dans Ω. Naturellement, on peut poser le même problème pour divers sous-ensembles Ω de divers $J^k(M,N)$; le principe d'homotopie (quand il est vrai) affirme que la question admet une réponse positive si et seulement si c'est le cas *en oubliant la structure de contact mais pas la projection-source*, c'est-à-dire que l'on peut joindre les deux sections holonomes considérées par un chemin dans l'ensemble des sections pas forcément holonomes à valeurs dans Ω. Au fil des ans, c'est devenu étonnamment simple [12].

Connexions

Là encore, Ehresmann a fait du bon travail[28]. Le problème est qu'une submersion $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$ ne permet pas de relever localement les chemins de manière unique, sauf quand elle est un difféomorphisme local en tout point (auquel cas, si c'est une fibration, on dit que c'est un *revêtement*) : si $\tilde{\varphi}$ est une carte fibrée de π, d'image $U \times V$, au-dessus d'une carte φ de B, alors, pour tout chemin γ à valeurs dans $\operatorname{dom}\varphi$, n'importe quel chemin $\tilde{\gamma}$ à valeurs dans $\operatorname{dom}\tilde{\varphi}$ de la forme $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\varphi}^{-1}\big(\varphi\circ\gamma(t), f(t)\big)$ avec $\operatorname{dom}\tilde{\gamma} = \operatorname{dom}\gamma$ *relève* γ, c'est-à-dire que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$; par conséquent, même si l'on impose à $\tilde{\gamma}$ de prendre pour $t = t_0$ une valeur donnée $a \in \pi^{-1}\big(\gamma(t_0)\big)$, il y a beaucoup de choix f possibles, dont aucun n'est *a priori* meilleur que les

[27] Les années 70 n'étaient pas toujours stupides.

[28] Dans les années 70, un point de vue algébrique moins général et incompréhensible sévissait pourtant, suscitant parfois, comme souvent en pareil cas, la fierté des initiés : je me souviens de protestations bruyantes contre le recrutement comme professeur d'un mathématicien « appliqué » (maintenant académicien) qui *ne savait pas ce que c'est qu'une connexion.*

autres. La donnée d'une connexion lève cette indétermination et fournit (au moins localement) un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ tel que $\tilde{\gamma}(t_0) = a$.

Par exemple, si E est le fibré des repères de B (ou un sous-fibré principal), une connexion permet d'obtenir le long de γ un *repère mobile* $\tilde{\gamma}(t)$ déterminé par sa valeur en t_0. Si une connexion s'impose, ce repère mobile sera donc « le bon ».

Définition
Une *connexion* sur la submersion π est un *champ d'espaces horizontaux*, c'est-à-dire un système de Pfaff $\mathcal{H}$ sur E tel que $\mathcal{H}_a$ soit, pour tout $a \in E$, un supplémentaire dans T_aE de l'espace vertical $\mathcal{V}_a = \ker T_a\pi = T_a\left(\pi^{-1}(a)\right)$; autrement dit, $T_a\pi|_{\mathcal{H}_a}$ est un isomorphisme sur $T_{\pi(a)}B$.

La donnée de $\mathcal{H}_a$ équivaut à celle de la projection de T_aE sur $\mathcal{V}_a$ parallèlement à $\mathcal{H}_a$, qui est l'objet choisi par Dieudonné [11] pour définir une connexion, et que l'on peut noter $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_V$ (*composante verticale* du vecteur tangent $\mathbf{v}$). L'unique relèvement (« relèvement horizontal ») $\tilde{\gamma}$ annoncé va être défini par la condition initiale et par le fait que la dérivée $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ est *horizontale* pour tout t, qui s'écrit (notation de [15])

$$\frac{D\tilde{\gamma}}{dt} := \dot{\tilde{\gamma}}(t)_V = 0. \qquad (2)$$

La connexion $\mathcal{H}$ se « lit » en effet de la manière suivante dans une carte fibrée $\tilde{\varphi}$ de E au-dessus de φ, ayant pour image l'ouvert $U \times V$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$: pour tout $a \in \operatorname{dom}\tilde{\varphi}$, si $\tilde{\varphi}(a) = (x, y)$, l'image de $\mathcal{H}_a$ par $T_a\tilde{\varphi}$ est le graphe d'une application linéaire $-\Gamma(x, y)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^r$: on définit ainsi l'*application de Christoffel* Γ : $U \times V \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$ de la connexion $\mathcal{H}$ dans la carte fibrée $\tilde{\varphi}$, et elle est différentiable parce que $\mathcal{H}$ l'est ; l'équation $\mathbf{v}_V = 0$ exprimant que $\mathbf{v} \in TE$ est horizontal s'écrit donc $\delta y + \Gamma(x, y)\delta x = 0$, où $\big((x, y), (\delta x, \delta y)\big) = T\tilde{\varphi}(\mathbf{v})$. Par conséquent, si γ est un chemin dans $\operatorname{dom}\varphi$ et que $x(t) := \varphi \circ \gamma(t)$, un relèvement $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\varphi}^{-1}\big(x(t), y(t)\big)$ de γ à valeurs dans $\operatorname{dom}\tilde{\varphi}$ est horizontal si et seulement si le chemin $t \mapsto y(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) + \Gamma\big(x(t), y(t)\big)x'(t) = 0$$

traduisant (2), ce qui permet d'appliquer le théorème de Cauchy sur les équations différentielles pour obtenir l'existence et l'unicité locales du relèvement $\tilde{\gamma}$ prenant une valeur donnée au temps t_0.

Son existence *globale* est assurée par exemple quand π est *propre*, c'est-à-dire lorsque $\pi^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K de B : la solution $\tilde{\gamma}$ de (2) ne peut en effet dans ce cas « partir à l'infini » au temps $t \in \operatorname{dom}\gamma$. Déduisons-en un résultat de base de la topologie différentielle :

Théorème (Ehresmann) Si la submersion π est propre, c'est une fibration[29].

Démonstration Pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $\Omega \ni b$ de B et une connexion $\mathcal{H}$ sur $\pi|_{\pi^{-1}(\Omega)}$: pour le voir, recouvrons la variété compacte $\pi^{-1}(b)$ par les domaines de cartes fibrées $\tilde{\varphi}_j$ en nombre fini et prenons $\Omega = \bigcap \operatorname{dom}\varphi_j$, où les φ_j sont les

[29] Réciproquement, une fibration à fibres compactes est évidemment propre. Comme dans la définition d'une fibration, si l'on veut absolument que la fibre-type soit unique à difféomorphisme près, il faut supposer B connexe.

cartes de B au-dessous des $\tilde{\varphi}_j$; par restriction, on se ramène donc au cas où $\operatorname{dom}\varphi_j = \Omega$ pour tout j, de sorte que les $\operatorname{dom}\tilde{\varphi}_j$ forment un recouvrement fini de $\pi^{-1}(\Omega)$ et qu'il existe [10] une partition différentiable de l'unité θ_j subordonnée à ce recouvrement ; pour chaque j, il existe une connexion $\mathcal{H}_j$ sur $\pi|_{\operatorname{dom}\tilde{\varphi}_j}$, par exemple celle dont l'application de Christoffel dans la carte fibrée $\tilde{\varphi}_j$ est identiquement nulle ; en notant $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_{j,V}$ la projection correspondante, il suffit alors de prendre comme connexion $\mathcal{H}$ celle dont la projection $T_aE \to \mathcal{V}_a$ est définie par $\mathbf{v}_V := \sum_j \theta_j(a)\mathbf{v}_{j,V}$ pour chaque $a \in \pi^{-1}(\Omega)$ (somme prise comme d'habitude sur les j tels que $a \in \operatorname{dom}\tilde{\varphi}_j$).

Quitte à restreindre Ω, on peut supposer qu'il existe une carte φ de B avec $\operatorname{dom}\varphi = \Omega$ et telle que $\varphi(\Omega)$ soit une boule ouverte de centre $0 = \varphi(b)$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $y \in \Omega$, on définit donc un chemin $\gamma_y : [0,1] \to \Omega$ joignant y à b par $\gamma_y(t) := \varphi^{-1}\big((1-t)\varphi(y)\big)$; quel que soit $x \in \pi^{-1}(y)$, le chemin γ_y admet un unique relèvement horizontal $\tilde{\gamma}_x : [0,1] \to E$ tel que $\tilde{\gamma}_x(0) = x$, et l'application $x \mapsto \tilde{\gamma}_x(1)$ de $\pi^{-1}(y)$ dans $\pi^{-1}(b)$, appelée *transport parallèle du temps* 0 *au temps* 1 *le long du chemin* γ_y *pour la connexion* $\mathcal{H}$, est évidemment bijective (son inverse est obtenu en relevant $t \mapsto \gamma_y(1-t)$) ; d'après le théorème sur la dépendance des solutions d'équations différentielles par rapport aux conditions initiales et aux paramètres, c'est donc un difféomorphisme ainsi que l'application h de $\pi^{-1}(\Omega)$ sur $\Omega\times\pi^{-1}(b)$ donnée par $h(x) := \big(\pi(x), \tilde{\gamma}_x(1)\big)$, qui est la trivialisation locale cherchée.

Remarque

Ce théorème très robuste vaut, avec la même preuve, dans le cadre banachique. En procédant comme dans la première partie de la démonstration, on voit qu'une submersion définie sur une variété paracompacte (comme dans la vie réelle) admet une connexion, utilisable dans la fin de la preuve, Ω étant le domaine de n'importe quelle carte φ nulle en b ayant pour image une boule.

Un exemple

La structure de contact $\mathcal{K}^1(M,\mathbb{R})$ est une connexion pour la fibration $\pi : j^1_a f \mapsto d_a f$ de $J^1(M,\mathbb{R})$ sur T^*M. Nous y reviendrons dans la seconde partie de ce texte à propos de la courbure.

Bibliographie complémentaire

[8] M. Chaperon, *Calcul différentiel et calcul intégral*, deuxième édition. Dunod, Paris, 2008

[9] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York, 1960

[10] —— *Éléments d'Analyse*, tome 3. Gauthier-Villars, Paris, 1970

[11] —— *Éléments d'Analyse*, tome 4. Gauthier-Villars, Paris, 1971

[12] Y. Eliashberg, N. Mishachev, *Introduction to the h-principle.* Graduate Studies in Mathematics, **48**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002

[13] M. Gromov, *Partial differential relations.* Springer-Verlag, Berlin, 1986

[14] P. Libermann, C.-M. Marle. *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique.* Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, **21**. Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1986–87
Traduction anglaise par B. E. Schwarzbach : *Symplectic geometry and analytical mechanics.* Mathematics and its Applications, **35**. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987

[15] J. Milnor, *Morse Theory.* Princeton University Press, 1963

[16] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint.* University of Virginia Press, 1969