

Travailler avec Paul, Kingston, K-théorie et au-delà, une visioconférence en l'honneur des 90 ans de Paul Baum donnée par Alain Connes pour l'Institut Fields le 30 juillet 2026

MASOUD KHALKHALI (SUR LE MICRO DE PIOTR M. HAJAC) : *Bonjour à tous. C'est un grand plaisir et un honneur pour moi de vous présenter notre premier intervenant aujourd'hui, Alain Connes. Alain n'a plus besoin d'être présenté. Cela me facilite grandement la tâche. Sans plus tarder, je lui laisse la parole.*

ALAIN CONNES : D'accord. Merci beaucoup. Je suis très reconnaissant d'avoir cette occasion de rendre hommage à Paul Baum.

Le titre de ma conférence est “*Travailler avec Paul Baum, Kingston, K-théorie et au-delà*”.

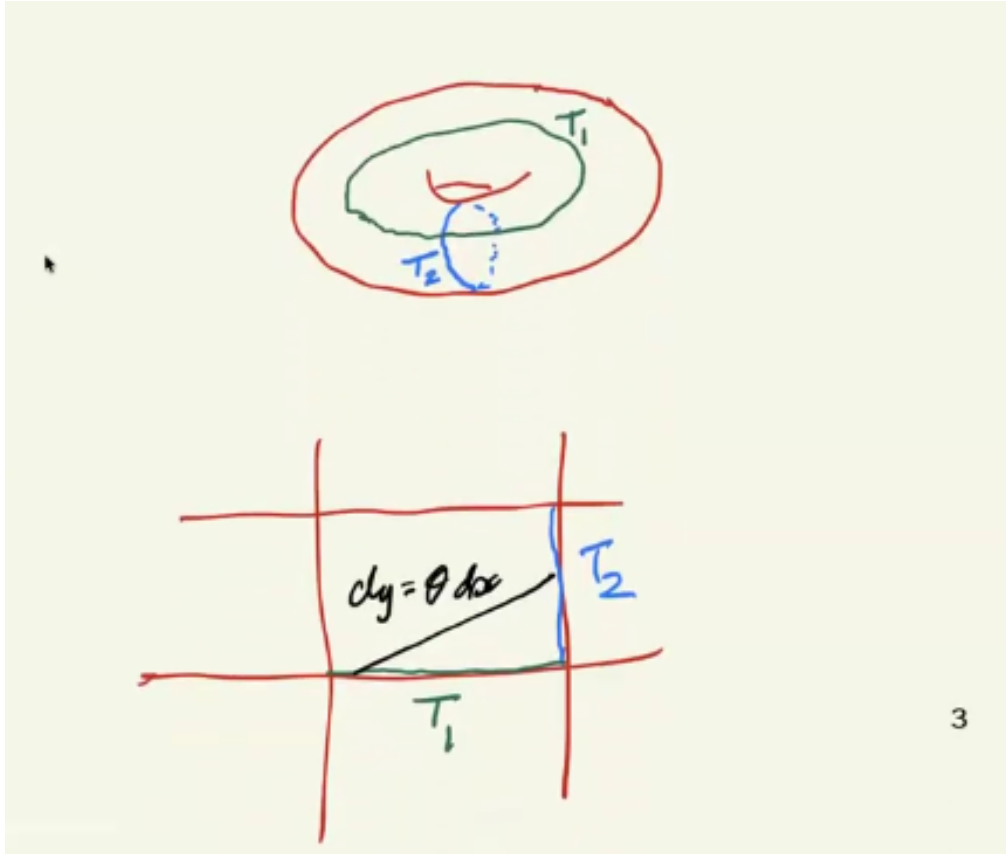
Quand je mentionne Kingston, je fais référence à un événement qui a eu lieu il y a 46 ans, en 1980, une grande conférence était organisée à Kingston, en Ontario. C'est à cette occasion que j'ai rencontré Paul Baum pour la première fois. Je vais donc aborder ce sujet en plusieurs parties, et voici mon plan : la première explication que je vais donner concerne mon état d'esprit lorsque je me suis rendu à cette conférence à Kingston en 1980. Et ce que je veux dire, c'est que j'étais très... vous savez, c'était l'une de ces rares rencontres où... euh... j'étais en quelque sorte préparé à rencontrer Paul et, en même temps, à découvrir la théorie géométrique homotopique. Donc, la deuxième partie portera en effet sur l'excellente contribution de Paul Baum et Ronald B. Douglas, dont j'ai entendu parler pour la première fois lors de la conférence de Kingston. Grâce à cette contribution, Paul Baum et moi avons pu définir l'application d'assemblage et découvrir cette interaction fascinante entre la théorie de l'homotopie et la géométrie non commutative. Enfin, et pour une note plus légère, j'expliquerai dans la dernière partie de mon exposé une découverte récente. Je devais en effet présenter une communication sur les mathématiques et la musique. L'interaction entre la théorie des topos (plutôt que la théorie des opérateurs) et la géométrie non commutative, découverte avec Kattia Consani, offre un magnifique exemple d'interaction entre les mathématiques et la musique. Bien.

Pour commencer, je vais faire un petit flashback, il y a 46 ans, en 1980. Lorsque je me suis rendu à cette conférence, j'avais en tête la construction suivante, que j'appelle, comme vous le savez, modules projectifs, compte tenu du sujet de cette conférence.

Quel était donc l'exemple que j'avais en tête ? Il était purement géométrique. J'ai dessiné ici un feuilletage, et sur ce feuilletage, je considère ce qui est écrit en dessous, le feuilletage de Kronecker.

Référence de la vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=fqDF10GLaZM>.

Transcription en $\text{\LaTeX}$ et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée des outils downsub, thegimp, gnu-emacs et ses macros, google traduction, google lens, google drive, microsoft gestionnaire de fichiers, windows 11, logiciel de messagerie orange, lunettes, ordinateur hp, pixel 7, un certain langage assembleur, et un certain nombre de neurones et matière grise usagée... J'ai pensé que si je citais les outils “un peu sophistiqués”, il n'y avait pas de raison que je ne cite pas aussi tous les autres...



Ce feuilletage de Kronecker divise le 2-tore en feuilles. Ces feuilles représentent l'intégrale de l'équation différentielle $dy = \theta dx$. Lorsque θ est un nombre irrationnel, la situation est particulièrement intéressante car chaque feuille occupe tout l'espace, autrement dit, l'espace est dense. En considérant l'espace des feuilles, on obtient généralement un espace non commutatif. Cet espace non commutatif se comprend mieux à l'aide des algèbres non commutatives. L'approche est assez visuelle : les matrices sont formées de paires x et y , où x et y sont deux éléments d'une même section transverse, par exemple, et appartenant à la même feuille T_1 . Ainsi, ce qui se passe, c'est que pour un x donné, il n'existe qu'une infinité dénombrable de y appartenant à la même feuille. On obtient donc des matrices manipulables, car on peut les multiplier, etc. Il s'agit donc en réalité de comprendre ce que sont ces matrices qui, bien sûr, vous le savez, ont une dimension finie. Et une chose que j'avais découverte avant d'aller à Kingston, c'est que si je prends une autre section transverse, par exemple la section transverse horizontale T_2 (positionnée sur l'autre côté du tore ci-dessous) pour les matrices codant l'algèbre, et une autre section transverse verticale T_2 (qui est aussi un cercle, bien sûr), représentées sur le tore par ces deux cercles, alors on obtient à nouveau des matrices. En effet, on peut prendre des matrices, dont les premiers coefficients sont dans T_1 et les seconds dans T_2 , ou l'inverse, peu importe, et qui se trouvent sur la même feuille. Il ne faut pas beaucoup réfléchir pour se rendre compte que l'on obtient alors le module sur les matrices dont les deux coefficients sont dans T_1 . À ma grande surprise, j'ai découvert que alors que T_1 et T_2 sont des cercles, lorsqu'on considère les paires de matrices formées d'un élément de T_1 et d'un élément de T_2 qui sont sur la même feuille, on obtient la droite réelle $\mathbb{R}$. Et ceci était surprenant et très facile à démontrer d'ailleurs. Parce que si vous considérez l'application de la droite réelle vers le produit de ces deux sections transverses, et vous considérez l'application σ ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R} &\rightarrow T_1 \times T_2 \\
 t &\mapsto (t/\mathbb{Z}, \theta t/\mathbb{Z}) \\
 \theta \notin \mathbb{Q} &\Rightarrow \sigma \text{ is injective} - \\
 (x, 0) \sim (0, y) &\text{ same leaf (flow line)} \\
 \Downarrow \\
 \exists t, x+t \in \mathbb{Z}, t\theta &= y \bmod \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Alors, si θ est irrationnel, l'application σ est injective : cette application vous permettra de vous retrouver exactement sur la bonne feuille, sur la bonne paire.

$$\begin{aligned}
 &\text{Rieffel (au 1980)} \\
 &\mathcal{K}(\mathbb{R}) \text{ finite projective module over } \\
 &\mathcal{K}(\mathbb{T}_\theta) - \\
 &\left. \begin{aligned} \text{Dimension} &= \theta \\ \text{Curvature} &= \frac{2\pi}{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Integrality} \quad 4
 \end{aligned}$$

C'était un résultat très surprenant. Ensuite, j'ai calculé le module correspondant. Pour l'algèbre elle-même, il n'est pas difficile de constater qu'on obtient le tore non commutatif, car on peut prendre comme matrices des matrices diagonales, c'est-à-dire des matrices qui sont juste une exponentielle ou des translations d'un facteur 1. Mais lorsqu'on calcule le module, on découvre quelque chose qui m'a totalement stupéfié : on découvre l'espace de Schwartz, l'espace bien connu des fonctions de Schwartz, forme, par un procédé purement géométrique, un module projectif fini de la fonction lisse sur le tore non commutatif. J'étais donc fasciné par cette découverte lorsque je suis arrivé là-bas, et d'autant plus pour la raison suivante : lorsque vous calculez la dimension de Murray-von-Neumann de ce module projectif fini, vous trouvez θ , si vous voulez, ce nombre irrationnel, et vous trouvez la courbure $\frac{2\pi}{\theta}$ et lorsque vous calculez la valeur de la courbure, vous trouvez qu'elle est égale à $\frac{2\pi}{\theta}$.

Donc, cela signifie que le produit de la dimension par la courbure, si vous voulez une sorte de cour-

bure totale, est entier lorsque vous le normalisez correctement¹, et je veux dire que cette intégralité devait avoir une explication, et cette explication est en fait un théorème de l'indice.

Integrality $\implies$ Index Theorem

$$U_1 U_2 = \lambda U_2 U_1, \quad \lambda = \exp(i2\pi\theta)$$

$$(\xi U_1)(s) \stackrel{*}{=} \xi(s+\theta), \quad (\xi U_2)(s) = \exp(i2\pi s)\xi(s)$$

$$D_1 f = \frac{d}{ds} f \quad D_2 f(s) = \frac{2\pi i s}{\theta} f(s)$$

5

Donc, algébriquement, ce qui se passe, c'est que vous avez effectué un tore non commutatif, engendré par deux unitaires satisfaisant cette relation de commutation, qui est bien sûr non commutative. Et maintenant, la façon dont il agit sur l'espace de Schwartz est étonnamment simple, car le premier générateur agit par translation et le second générateur agit par multiplication. Cependant, vous voyez, il agit par multiplication par une fonction périodique, mais la période n'est évidemment pas la même que la translation par θ . C'est pourquoi vous avez la relation de commutation non commutative du tore non commutatif. J'ai constaté qu'il existe une généralisation immédiate de la géométrie ordinaire en prenant une connexion pour ce module. Dans cette connexion, la première différentiation était simplement la différentiation ordinaire de la fonction et la seconde différentiation était essentiellement une multiplication par la variable $\frac{2\pi i s}{\theta}$. Mais elle était automatiquement divisée par θ , ce qui signifiait que la courbure avait la bonne valeur. Donc, si cela vous intéresse, tout a été écrit lors de ma venue à la conférence de Kingston, dans une note de synthèse aux Comptes-Rendus où j'avais introduit l'algèbre des fonctions lisses sur le tore non commutatif².

1. θ à la fois au dénominateur et au numérateur dans le produit.

2. Voir <https://denisevellachemla.eu/AC-biblio42.pdf>.

The 1980 Comptes Rendus Note

We introduced the algebra $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$ and established that the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is a finite projective module over it.

The surprising integrality of the product

$$\text{Dimension} \times \text{Curvature} = \theta \times 1/\theta$$

led to an index theorem and the Chern character in cyclic cohomology.

6

Cette note établit un lien très fort avec la géométrie différentielle non commutative, car celle-ci est donnée par l'algèbre des fonctions lisses. Mais j'y aborde bien d'autres sujets, comme cet exemple d'espace de Schwartz et le fait surprenant de son intégralité. Cette intégralité était en fait expliquée dans la note de synthèse par un théorème d'indice dans lequel le caractère de Chern, représentant la cohomologie cyclique, était utilisé pour la première fois. Ainsi, la note ne se contente pas de donner cet exemple de module projectif fini.

En fait, je donnais tous les cas qui, selon Pimsner et Voiculescu, épuisent la K -théorie, et ils étaient associés aux sections transverses du feuilletage de Kronecker. Donc, si vous voulez, quand je suis arrivé à Kingston, j'étais un peu frustré, car dans l'exemple du feuilletage de Kronecker, il est vrai qu'on a suffisamment de sections transverses pour épuiser toute la K -théorie lorsqu'on effectue la construction que j'avais faite dans ce cas, qui est bien sûr une construction générale. Il existe donc une construction générale qui stipule que si l'on a une section transverse fermée pour un feuilletage, alors on obtient un élément de la K -théorie de l'algèbre C^* correspondante. J'ai donc écrit cette note, et je le pense vraiment ; elle contenait en fait beaucoup d'informations. Elle contenait également l'équivalence de Morita entre la C^* -algèbre associée à θ et, par exemple, celle associée à $1/\theta$ par exemple, et ainsi de suite. Alors, si vous voulez savoir, quand je suis arrivé à Kingston, j'étais frustré pour la raison suivante : alors que pour les feuilletages de Kronecker, il existe de nombreuses sections transverses, il existe de nombreux exemples de feuilletages pour lesquelles il n'y a aucune section transverse, mais qui présentent une K -théorie intéressante. Le problème était donc de voir si ce type de classes de K -théorie visibles pouvait être étendu au cas des feuilletages en général, et c'est ma rencontre avec Paul, que je vais maintenant vous raconter, qui m'a apporté la réponse.

Ce qui s'est passé, c'est qu'à cette époque, des contributions très importantes ont été apportées autour du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. La première d'entre elles est celle de Michael Atiyah, qui a formulé la K -homologie analytiquement via la notion d'opérateurs elliptiques généralisés pseudo-différentiels, notion qui est en fait à la base de nombreux développements ultérieurs.

Il y avait aussi la théorie fondamentale de Brown, Douglas et Fillmore, où ils ont développé la théorie de l'extension des C^* -algèbres et établi un lien avec la K -homologie. À cette époque, en 1980, l'apparition remarquable de la théorie bivariante de Kasparov a eu lieu ; cette théorie allait jouer un rôle fondamental dans tous les développements ultérieurs. Mais pour moi, ce qui était crucial, c'était la vision géométrique de Paul Baum et Ron Douglas sur la K -homologie. Qu'ont-ils fait ? Ils ont construit, si l'on veut, une présentation purement géométrique de la K -homologie, ce qu'ils ont appelé les cycles de K -homologie, c'est-à-dire des triplets. En fait, ils décrivaient cette théorie, qui est une théorie covariante. Si l'on a une application d'une variété vers une autre, cette théorie la propage en avant et elle devrait donc être décrite un peu comme l'homologie ordinaire par des cycles.

K -Homology : Geometric Vision

Paul (with R. Douglas) was building a purely geometric presentation of K -homology.

Geometric K -Homology (Baum-Douglas)

Cycles for a space X are given by triples (M, E, f) where :

- M is a compact $Spin^c$ manifold,
- E is a complex vector bundle over M ,
- $f : M \rightarrow X$ is a continuous map.

This provided the exact geometric left-hand side for the assembly map.

8

Ils ont donc défini les cycles pour l'espace par des triplets de M , où M est une variété complexe de spin (dans $\mathbb{C}$). D'accord, E était un fibré vectoriel complexe sur M et f était une application continue de M vers X . Or, la propriété remarquable qu'ils ont découverte est qu'ils ont pu établir la relation d'équivalence entre ces triplets, permettant ainsi d'obtenir précisément la K -homologie de l'espace cible. Ils ont donc défini une sorte de cobordisme, de modification du fibré vectoriel, etc., afin de pouvoir manipuler la K -homologie de manière purement géométrique, d'une façon proche de celle utilisée en homologie classique. Ce qui m'a frappé en découvrant cette théorie, c'est que lorsqu'on considère un espace non commutatif, comme l'espace des feuilles d'un feuilletage, il faut comprendre que la cardinalité effective de cet espace est en fait supérieure à celle du continu. Il est donc impossible de construire des fonctions de cet espace vers les réels ou les complexes. Il faut utiliser le produit vectoriel, vous devez le rendre commutatif afin d'avoir suffisamment d'éléments. Il devrait toutefois être possible d'atterrir facilement dans cet espace, et c'est précisément ce qui se produit. En fait, la construction géométrique de la K -homologie par Baum et Douglas est une construction qui est en quelque sorte Taylorisée de telle façon qu'il est possible d'atterrir dans des espaces quotients, comme l'espace des feuilles d'un feuilletage. Comment atterrit-on dans un tel espace ? Eh bien, par exemple, ce que vous pouvez faire, c'est que vous pouvez atterrir dans

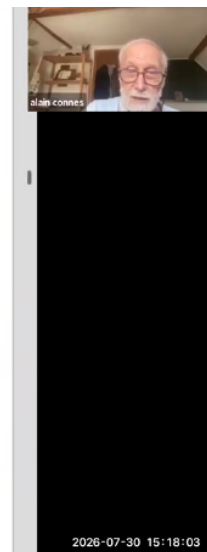
la variété ambiante car celle-ci se projette bien dans l'espace des feuilles. Mais vous pouvez faire quelque chose d'encore plus subtil, car vous pouvez couvrir, si vous le souhaitez, la variété par des cartes locales de telle sorte que vous ayez des applications à ces cartes, mais de telle sorte qu'elles concordent dans le quotient, et vous disposez alors d'une liberté extraordinaire.

Donc, si vous voulez un exemple de section transverse, c'est l'exemple pur le plus simple d'une telle application, car c'est une application que, bien sûr, vous l'avez compris, vous projetez sur la variété ambiante, puis sur le quotient, et vous avez bien un cycle puisqu'il s'agit d'une section transverse fermée. Mais évidemment, si vous voulez, la définition de la K -homologie, la construction de la K -homologie, qui est purement géométrique, par Baum et Douglas, a fourni une clé fondamentale.

C'est à ce moment-là que j'ai rencontré Paul Baum. D'accord. Et euh, je veux dire, euh, nous avons commencé à discuter ensemble, à bavarder, et euh, c'était comme une rencontre miraculeuse. C'était un peu comme si j'avais rencontré une incarnation de la géométrie lorsque j'ai rencontré Paul pour la première fois.



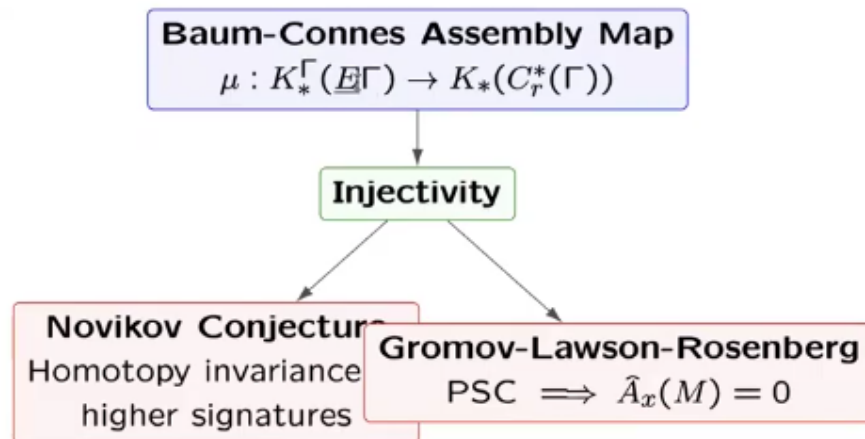
9



Bien sûr, nous avons collaboré et écrit de nombreux articles ensemble. Je ne vais pas énumérer tous ces articles, mais il y avait beaucoup de choses sur l'équivalence d'homotopie feuille par feuille, les classes de Pontrjagin, etc., le caractère de Chern pour les groupes discrets, etc. En 1981, avec Paul, nous avons rédigé un manuscrit, une prépublication de l'IHES, dans lequel nous formulons notre conjecture, mais ce manuscrit n'a pas été publié. En fait, il a été publié bien plus tard avec Nigel Higson, lorsque nous avons formulé la conjecture d'une manière qui utilisait beaucoup de choses, comme la K -théorie bivariante, etc. Mais l'idée de base est très simple. L'idée de base est celle de l'application d'assemblage, qui, comme je l'ai dit, repose sur une interaction fondamentale entre la théorie de l'homotopie et la géométrie non commutative. En quoi consiste cette idée ? Eh bien, je vais simplement l'expliquer, sans vous montrer de formule, mais l'idée est la suivante : imaginons que l'on considère la C^* -algèbre associée à un groupe discret Γ . Comment construire des classes de K -théorie pour la C^* -algèbre réduite de Γ ? En utilisant la théorie des triplets (M, E, f) , on applique donc cette théorie, mais avec l'application f qui est maintenant définie sur l'espace classifiant. Supposons, par souci de simplicité, que Γ soit sans torsion ; considérons alors un (M, E, f) comme celle utilisée par Paul Baum et Ronald Douglas, et f va maintenant vers l'espace classifiant

Γ . D'accord. Et qu'est-ce que cela signifie ? Cela signifie que cette application de la variété M vers Γ induit automatiquement un revêtement de groupe fondamental Γ de la variété M . Et une fois ce revêtement établi, puisque sur la variété M , vous avez une structure de spins complexes, on dispose précisément de ce qu'il faut pour formuler un théorème d'indice, une formule d'indice. De plus, grâce au revêtement, on a une formule d'indice, un problème d'indice si vous préférez, pour l'espace de revêtement. Et donc, ce problème d'indice est automatiquement Γ -équivariant, ou si vous préférez, il existe une action complètement canonique de Γ autour de cet espace, et c'est ce qui permet la construction à partir de l'indice analytique.

Notre idée générale pour la conjecture était que la formule de l'indice de Atiyah-Singer donnait en fait une formule pour l'indice des opérateurs elliptiques. De même, il devrait exister une relation très forte entre l'indice analytique de ce recouvrement avec opérateur de Dirac à coefficients dans la structure $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ et la géométrie de la source. Après de nombreux travaux, cette conjecture a été formulée dans le cas des groupes qui ne sont pas sans torsion, mais alors, on doit prendre l'espace contractile pour une action propre, il faut prendre la K -homologie équivariante, et ainsi de suite. Donc ceci est, si vous voulez, notre application d'assemblage.



Et, comme il s'est avéré, si vous voulez ceci, les conséquences de la supposition que nous avons faite à propos du fait que cette application serait un isomorphisme, se divisent en deux conséquences différentes.

The Assembly Map : Interplay of Homotopy and NCG

The interplay between the world of homotopy theory and noncommutative geometry is best illustrated by the applications of the injectivity or surjectivity of the assembly map.

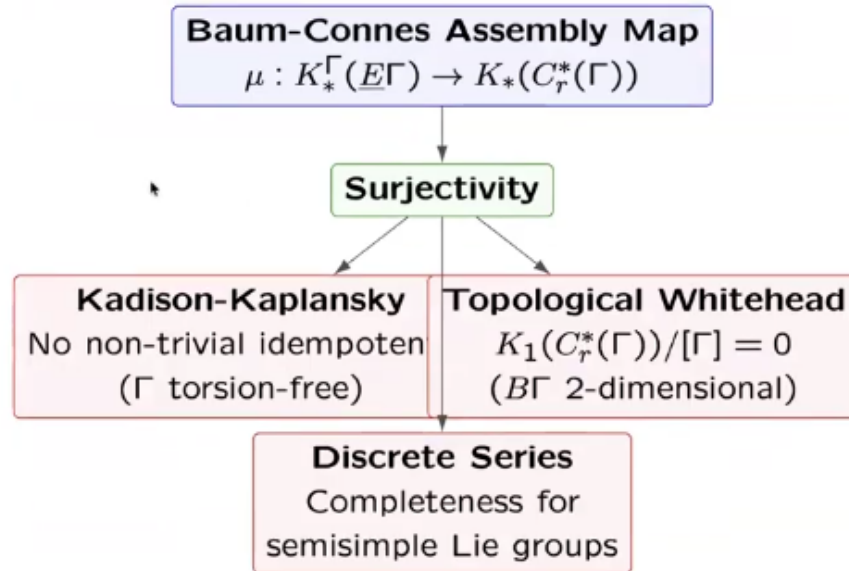
•

The geometric and analytical consequences split naturally depending on which property of the map we invoke.

11

Elles se divisent selon le fait que l'application canonique serait injective ou surjective.

Ainsi, l'injectivité de l'application s'est avérée avoir deux conséquences très importantes. La première est une conjecture de Novikov pour l'invariance d'homotopie des signatures supérieures, qui est une conjecture très connue due à Novikov, et la seconde se trouve dans les travaux de Gromov-Lawson-Rosenberg, le fait qu'une courbure scalaire positive implique une annulation de $\widehat{A}_x(M)$ (obstruction topologique) de la variété. Donc, si vous voulez quelque chose que nous avons établi dès le départ, c'est que si l'application est injective, alors ces deux conséquences en découlent. Et pour la surjectivité, la surjectivité était tout aussi révélatrice.



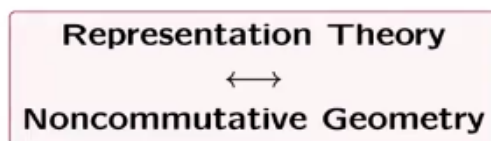
13

Donc, ce qui se passe, c'est que s'il s'avère que l'application est surjective, la première conséquence est ce qu'on appelle la conjecture de Kadison et Kaplansky : si vous prenez un groupe que vous supposez sans torsion, sinon il a une idempotence non triviale, mais si le groupe est sans torsion, il n'y a pas d'idempotence non triviale, ce qui est en réalité une propriété purement analytique de la C^* -algèbre correspondante. Ensuite, il y a une conséquence topologique concernant la topologie de Whitehead, mais une autre conséquence que nous avons vue dès le début était la complétude pour les groupes de Lie semi-simples, notamment le fait que les séries discrètes pour les groupes de Lie semi-simples engendrent automatiquement un élément non trivial dans la K -théorie. Donc, la surjectivité de l'application d'assemblage permettrait, si vous voulez, de comprendre les séries discrètes correspondantes... Après notre conjecture, Paul a poursuivi un travail considérable, notamment avec Nigel Higson et Roger Plymen. Il a approfondi ces travaux dans le domaine p -adique, c'est-à-dire que dans le cas des groupes de Lie réels, tout fonctionnait parfaitement, mais Paul a poussé la recherche beaucoup plus loin avec Higson et Plymen, dans le cas des groupes réels et aussi dans le cas des groupes de Lie adéliques. Ces travaux ont révélé une relation très significative, non évidente du tout, entre deux théories mathématiques a priori totalement différentes : la théorie des représentations d'une part, et la géométrie non commutative d'autre part.

P. Baum, N. Higson, and R. Plymen : "A proof of the Baum-Connes conjecture for p adic $GL(n)$," C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 : 2 (July 1997)

- Real Lie groups
- p -adic groups

In all these situations, the assembly map creates a very non-trivial relation :



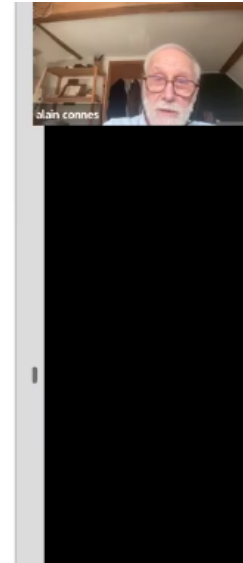
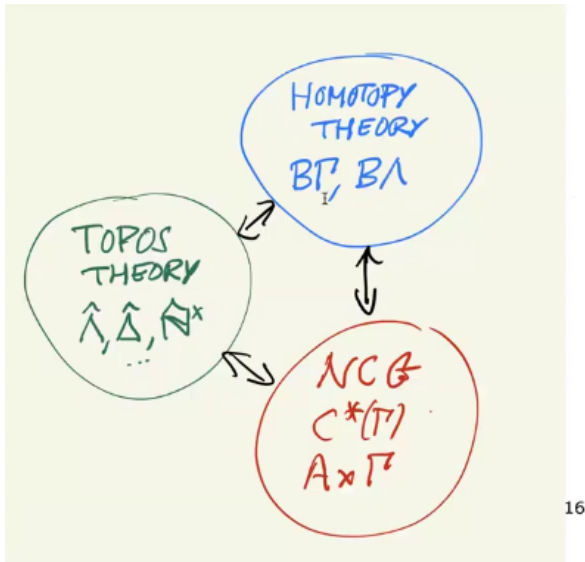
14

Par exemple, l'année dernière, à Paris, à l'IHP, une conférence entière était consacrée à ce lien entre ces deux théories. Il serait erroné de croire que notre conjecture est vraie dans tous les cas. En fait, un contre-exemple a été trouvé dans un article commun de Higson, Vincent Lafforgue et Skandalis. Bien sûr, on pourrait être pessimiste, mais comme je suis plutôt optimiste, ce contre-exemple a permis de mettre en évidence les limites de la conjecture. Ils ont également montré que toute démonstration aboutit à un résultat loin d'être trivial. Je voudrais donc simplement en souligner quelques-uns. Il existe un nombre incroyable de résultats positifs publiés, et il serait injuste de ma part de tous les citer, car j'en oublierais certainement. Permettez-moi donc de vous mentionner les plus évidents. Les plus évidents étaient le résultat de Guoliang Yu, eh bien, la conjecture de la borne supérieure (the coarse Baum-Connes conjecture), que Guoliang a prouvée dans le cas d'un plongement uniforme dans l'espace de Hilbert dans les *Inventiones Mathematicae* en 2000. Ensuite, il y a aussi ce résultat fantastique de Higson et Kasparov où ils ont prouvé notre conjecture dans un cas tellement général qu'il couvre essentiellement tous les cas moyennables possibles, et ainsi de suite.

Donc, cet article de Higson et Kasparov est absolument fondamental et, je dirais probablement que le meilleur résultat, et on pourrait difficilement rêver de mieux, est celui de Vincent Lafforgue, qui est tout simplement exceptionnel. Il a démontré la conjecture, mais il a démontrée la conjecture avec coefficients. Qu'est-ce que cela signifie, la conjecture avec coefficients ? Cela signifie que la conjecture reste valide lorsqu'on prend les produits vectoriels de C^* -algèbres arbitraires par le groupe correspondant.

D'une certaine manière, je suis peut-être un peu injuste, car j'apprécie particulièrement ce résultat de Vincent Lafforgue. L'une des premières choses que nous avons faites dans cette même voie, avec mon collaborateur Moscovici, dans les années 80 (je ne me souviens plus exactement, c'était peut-être 1987), nous avons démontré la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques en utilisant la cohomologie cyclique. Mais le fait remarquable est que Vincent Lafforgue utilise une méthode plus raffinée que la théorie de Kasparov, qui exploite la structure analytique fine

codée par les groupes hyperboliques. Donc, à bien des égards, ces résultats montrent tous que l'on connaît approximativement la limite de la conjecture, qui correspond approximativement au rang un lorsqu'on parle de groupes hyperboliques. C'est exactement ce que cela signifie. Il existe bien sûr encore des groupes discrets pour lesquels nous ne savons pas si la conjecture est vraie ou non, comme $SL_3(\mathbb{Z})$ par exemple. Je dois vous rappeler une déclaration de Gromov, une déclaration pour le moins surprenante : si un fait est vrai pour tous les groupes discrets, alors c'est une trivialité. Il existe une belle présentation de cette conjecture par Guido Mislin et Alain Valette, publiée en 2012. Ce qui est étonnant, c'est qu'il existe une relation incroyable entre la théorie de l'homotopie et la géométrie non commutative.



Ce que je vais vous dire ensuite, c'est qu'il existe une autre théorie géométrique à proximité, qui n'est pas une théorie de l'homotopie ni une théorie classifiant les espaces (comme la théorie BT , etc.). Il s'agit de la théorie des topos. Dans la seconde partie de mon exposé, je décrirai d'abord le lien entre la théorie de l'homotopie et la théorie des topos, puis entre la théorie des topos et la géométrie non commutative. La théorie des topos offre un point de vue plus raffiné que la théorie de l'homotopie, et voici pourquoi.

Topos Theory vs. Homotopy Theory

In which sense is the Topos viewpoint more refined than Homotopy ?

Consider the simplex category Δ (finite ordinals $\{0, \dots, n\}$, non-decreasing maps).

The Homotopy Viewpoint :

- Δ has a final object.
- Its classifying space (Quillen) is a singleton :
 $B\Delta \simeq *$.

17

Vous voyez, l'espace classifiant des grands groupes discrets $B\Gamma$ a été étendu par Quillen à la situation où l'on considère l'espace classifiant d'une petite catégorie. Il y a longtemps, en fait en 1980, lorsque j'ai défini la cohomologie cyclique, j'avais montré que si l'on prend l'espace classifiant de la catégorie cyclique λ , on obtient $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$, ce qui signifie que si l'on veut que la catégorie cyclique soit cyclique, donc bien sûr, elle évoque un cercle, mais elle a le même espace classifiant qu'un cercle U^1 en tant que groupe compact. Mais j'ai été très déçu car, la catégorie cyclique, c'est une ossature qui fournit la cohomologie cyclique et il y a une autre ossature qui fournit la cohomologie de Hochschild, et c'est une catégorie simplexe.

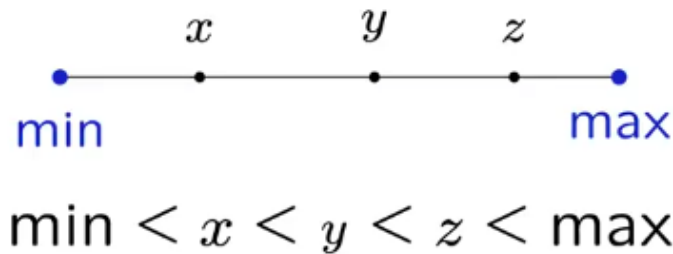
Donc, qu'est-ce que c'est ? C'est une catégorie qui a pour objets des ensembles finis ordinaux. D'accord, si vous voulez des ensembles finis totalement ordonnés, d'accord ? Et les applications, je veux dire les morphismes dans cette catégorie, sont les applications non décroissantes. Mais si vous adoptez le point de vue de l'homotopie et si vous calculez l'espace classifiant au sens de Quillen de cette catégorie simplexe, ou si vous voulez cette catégorie ordinale, peu importe, eh bien, vous constatez que, puisqu'elle a un objet final, l'espace classifiant est un simple point. Donc, si l'on passe à l'espace classifiant, le passage à la théorie de l'homotopie entraîne une perte de structure, structure pourtant bien présente en homologie de Hochschild. Il y a donc un problème, heureusement résolu par le point de vue de Grothendieck, qui est celui de la théorie des topos. Que fait Grothendieck face à une petite catégorie ? Au lieu de considérer l'espace classifiant comme Quillen, il considère un topos, en l'occurrence le topos des foncteurs contravariants de la catégorie vers les ensembles.

Bien sûr, je ne veux pas entrer dans la définition de ce qu'est un topos, mais les topos qui sont de cette catégorie... Alors, qu'est-ce que cela signifie ? Eh bien, cela signifie que vous remplacez, si vous le souhaitez, la catégorie des ensembles par des ensembles munis d'un foncteur de cette catégorie. Et vous constatez que, dans le cas des catégories simpliciales, dans le cas de cette catégorie Δ , vous constatez que ce topos est hautement non trivial. Et il est hautement non trivial, parce que, avant

tout, il encode fidèlement l'homologie de Hochschild, il n'y a aucun problème avec cela. On n'a pas ce cas trivial où l'espace classifiant est un seul point. Donc, il encode parfaitement l'homologie de Hochschild. Vous pouvez calculer les points de ce topos et vous constatez que les points de ce topos sont ce qu'on appelle l'intervalle abstrait, autrement dit, comme l'intervalle $[0, 1]$ par exemple, mais plus généralement, vous pouvez prendre n'importe quel ensemble totalement ordonné qui a un élément minimal et un élément maximal.

The Topos Viewpoint :

- The topos of presheaves $\widehat{\Delta} = \text{Set}^{\Delta^{op}}$ is highly non-trivial.
- Its *points* are “abstract intervals”.
- It is the classifying topos for the logical structure of totally ordered sets with a minimum and a maximum.



On les appelle donc des intervalles abstraits. Et ce qui est encore plus étonnant, c'est que ce topos, qui paraît de prime abord un peu bizarre (on y définit les objets comme des ordinaux et les applications comme des applications non décroissantes, etc.), est en réalité un espace classifiant, le topos classifiant de la structure logique des ensembles totalement ordonnés avec un minimum et un maximum. Qu'est-ce que cela signifie ? Cela signifie que c'est un topos qui représente l'incarnation la plus abstraite d'un intervalle ; tout intervalle que vous avez, où qu'il soit, appartient à l'intervalle abstrait de ce topos. Autrement dit, j'ai ici représenté ce que signifie avoir un élément minimal et un élément maximal, etc. En étudiant progressivement la théorie des topos, on découvre qu'elle est d'une richesse remarquable. Cette richesse tient au fait que, face à un topos, on peut poser des questions très simples, mais dont les réponses peuvent être extrêmement subtiles. Par exemple : que sont les points d'un topos ? La définition d'un point de topos est incroyablement simple et élégante : un point de topos est simplement un morphisme géométrique de la catégorie des topos (ou de la catégorie des ensembles). Il s'agit donc d'un morphisme géométrique de ce topos extrêmement primitif, qui est un point unique (ou la catégorie des ensembles), vers le topos donné. En général, même si cette définition est très simple, le calcul des points d'un topos reste une tâche difficile.

Abordons maintenant le lien entre la théorie des topos et la géométrie non-commutative. Ce lien, découvert lors de notre collaboration avec Katia Consani en 2014, concerne le site de mise à l'échelle.

Ce site de mise à l'échelle est donc un topos très spécifique qui, comme je l'expliquerai, fournira le lien entre la théorie des topos et la géométrie non commutative. Comment est-il défini ? La définition est on ne peut plus simple. Il est défini comme le produit semi-direct de l'espace topologique $[0, \infty]$ formé de nombres réels positifs ou nuls par la multiplication par les entiers $([0, \infty) \rtimes \mathbb{N}^\times$. Ainsi, chaque entier n agit sur cette droite réelle par multiplication. Voilà notre topos. Nous reviendrons bien sûr sur ce topos à la fin de mon exposé.

D'accord. Ce topos est donc intimement lié à un autre espace, un espace non commutatif que j'ai introduit en 1996, lorsque je travaillais sur l'hypothèse du Riemann. Cet espace est non commutatif au sens strict comme un espace de feuilles de feuilletages. Autrement dit, c'est un espace dont la cardinalité effective est strictement supérieure à celle du continu, même si sa cardinalité ordinaire est celle du continu. Cet espace peut être décrit de plusieurs manières différentes. Il existe d'ailleurs une description que vous ne comprendrez pas si vous ne connaissez pas la notion d'adèles, les adèles de $\mathbb{Q}$. Il s'agit donc du double quotient de l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ par l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}^\times$ à gauche) et par le sous-groupe compact maximal du groupe des idèles ($\widehat{\mathbb{Z}^\times}$ à droite) (l'égalité est $X_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} / \widehat{\mathbb{Z}^\times}$). Voilà une définition possible, si vous souhaitez une description abstraite, et si vous savez ce que sont les adèles, mais il existe une autre description géométrique, beaucoup plus concrète à bien des égards. Il s'agit de l'ensemble des sous-groupes de rang un de $\mathbb{R}$. Qu'est-ce qu'un sous-groupe de rang un de $\mathbb{R}$? C'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Mais que signifie être de rang un ? Cela signifie que si je prends deux éléments de ce sous-groupe, alors ils sont comparables. Autrement dit, si je prends deux éléments x et y , je peux multiplier chacun d'eux. Je multiplie le premier par un entier n et le second par un entier m , de sorte qu'ils deviennent égaux. Ils sont donc comparables et, je veux dire, bien sûr, il existe de nombreux exemples de tels sous-groupes de $\mathbb{R}$. À première vue, on pourrait se dire : "Oh, d'accord, si c'est l'espace des sous-groupes de rang un de $\mathbb{R}$, je peux comprendre cet espace". Le problème, c'est qu'on se rend compte assez vite que c'est un espace très difficile à appréhender. Par exemple, prenons les sous-groupes qui sont les nombres rationnels, mais ces sous-groupes, lorsqu'ils sont dans $\mathbb{R}$, sont de la forme λ fois les rationnels. Bon, d'accord, mais il peut arriver que deux λ différents donnent le même sous-groupe. Cela se produit précisément lorsque les λ sont proportionnels à un élément de $\mathbb{Q}^\times$. Et lorsqu'on essaie de diviser $\mathbb{R}$ par l'action de $\mathbb{Q}^\times$, on constate que l'action est ergodique. On obtient donc un espace non commutatif, précisément à cause de l'ergodicité. Lorsqu'on prend une fonction quelconque sur cet espace, à valeurs dans les réels ou les complexes, la fonction doit être presque partout constante, or constructible.

D'accord. Classiquement, cet espace est totalement insoluble, mais grâce à la géométrie non commutative, il possède en réalité une structure géométrique riche et très précise. On peut se le représenter mentalement, et pour cela, le point de vue adélique est le plus approprié.

Periodic orbits C_p

Finite set of places $S \ni \infty, p_j \in S,$

$$X_{\mathbb{Q},S} := \Gamma \backslash \left(\prod_S \mathbb{Q}_v \right) / \prod_{S \setminus \infty} \mathbb{Z}_p^*$$

where

$$\Gamma := \{ \pm p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} \mid n_j \in \mathbb{Z} \}$$

The group $\mathbb{R}_+^*$ acts on $X_{\mathbb{Q},S},$

Generic orbit : Free action on x with $x_v \neq 0$ for all v .

Periodic orbits : $x_p = 0$ & $x_v \neq 0 \rightarrow C_p = p^{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{R}_+^*$

20

Pour voir à quoi il ressemble, ce qu'on fait, c'est qu'au lieu de considérer toutes les adèles, ce qui vous donnerait une valeur pour chaque nombre premier, on considère un ensemble fini de nombres premiers. L'espace est alors très bien approché par le produit des corps p -adiques des nombres premiers appartenant à ce sous-ensemble. Bien sûr, ceci contient aussi le corps archimédien qui donne $\mathbb{R}$, et alors on divise par ce qui remplace le sous-groupe compact maximal du groupe des classes idèles, c'est-à-dire ce produit des $\mathbb{Z}_i^*$. On divise à gauche uniquement par les puissances de nombres premiers appartenant à l'ensemble fini. Si l'on observe cet espace, on constate qu'il offre déjà une représentation de $\text{Spec } \mathbb{Z}$, au sens où vous avez une orbite générique et cette orbite générique est dense, et vous avez une orbite périodique de longueur $\log p$, qui intervient dans les formules explicites. Pour un nombre premier donné, l'image est la suivante : cette orbite générique (en vert) s'enroule autour d'un cercle limite, lui-même constitué de l'orbite périodique de longueur $\log p$. Lorsque l'on considère plusieurs nombres premiers, on obtient une représentation complexe à appréhender par la géométrie classique. La géométrie non commutative, en revanche, la rend beaucoup plus claire. On retrouve cette orbite générique qui s'enroule autour de toutes ces orbites périodiques, par exemple de longueur $\log 2, \log 3, \log 5$, etc. Donc, euh, et cela reflète exactement le fait que dans $\text{Spec } \mathbb{Z}$, le point générique est dense, c'est-à-dire que lorsqu'on prend l'adhérence du point générique de $\text{Spec } \mathbb{Z}$, on obtient tous les nombres premiers, c'est-à-dire qu'on obtient le spectre complet de $\mathbb{Z}$. Maintenant, si vous le souhaitez, j'en viens à la nouveauté de mon exposé. Je peux l'expliquer ainsi. En février, je crois, j'ai reçu une invitation à donner une conférence sur la musique et les mathématiques. J'étais donc perplexe, car je me demandais, vous savez, que dire ? Enfin, j'étais indécis et j'ai donc longuement réfléchi à ce que je pourrais dire d'original et de pertinent sur la relation entre la musique et les mathématiques, et puis, au bout d'un moment, j'ai reçu un autre message m'annonçant que je ne donnerais pas de conférence, mais que je participerais à une table ronde.

J'étais donc un peu déçu, car entre-temps j'avais découvert quelque chose que je vais vous expliquer

maintenant, et j'ai donc demandé à l'organisateur de me laisser cinq minutes avant la table ronde afin d'expliquer ce que j'avais découvert.

D'accord. Permettez-moi d'essayer de l'expliquer maintenant. Ce que j'ai découvert, et que je considère comme le lien le plus profond entre les mathématiques et la musique, est le suivant. Il s'agit d'une découverte que nous avons faite avec Katia Consani en 2014 : l'ensemble des points du topos, qui est le site de mise à l'échelle, est exactement l'espace non commutatif $\text{Spec } \mathbb{Q}$.

Mathematics, Music, and the Zeros of Zeta

The deepest relation I know between mathematics and music is encapsulated in the following identity (**ac+cc**) :

The set of points of the **Scaling Site**
=
The noncommutative space $X_{\mathbb{Q}}$

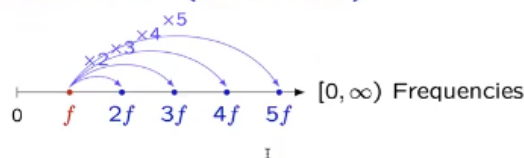
23



Lorsque nous avons fait cette découverte en 2014, j'ai été contraint d'apprendre la géométrie algébrique, car Grothendieck avait développé la géométrie algébrique sur un topos arbitraire. J'ai constaté que cela éclairait profondément $X_{\mathbb{Q}}$, car $X_{\mathbb{Q}}$ était initialement construit à partir d'adèles. Mais lorsqu'on découvre que ce même espace est l'ensemble de points du site de mise à l'échelle, la perspective change complètement. Et la raison de ce changement de perspective est la suivante :

The Musical Metaphor

Action of $\mathbb{N}^{\times}$ (Harmonics)



- $[0, \infty)$ encodes the **frequencies**.
- $\mathbb{N}^{\times}$ encodes the **harmonics**.

The scaling site is the mathematical idealization of a musical instrument.

24



en fait, qu'est ce qu'est le site de mise à l'échelle. Eh bien, j'affirme que le site de mise à l'échelle est l'instrument de musique ultime, voire universel. Pourquoi ? Parce que le demi-droite $[0, \infty)$ encode

en réalité les fréquences. Voyez-vous, lorsque nous faisons de la musique, ce que nous entendons correspond à une fréquence, comme celle d'une note, et l'oreille est sensible aux harmoniques. L'oreille est donc sensible à la multiplication par des entiers.

La multiplication par deux correspond au passage à l'octave. La multiplication par trois, qui consiste à diviser par deux, correspond au passage à la quinte, et ainsi de suite. Si vous souhaitez encoder cela, vous ne pouvez pas utiliser un espace topologique, car il faut encoder non seulement la demi-droite, mais aussi la multiplication par les entiers. C'est la théorie des topos qui le fait de la manière la plus économique. Plus précisément, ce que ce topos fait, au niveau des décalages, les objets intéressants de ce topos sont les faisceaux sur l'intervalle $[0, \infty)$, mais ils sont équivariants pour cette action de $\mathbb{N}^\times$. Ainsi, lorsque vous combinez cela avec ce que nous avons découvert avec Katia, à savoir que l'ensemble des points de l'espace de mise à l'échelle est le même que l'espace non commutatif, vous obtenez un corollaire, qui découle immédiatement de cela et qui est que cet espace, véritable instrument de musique ultime, atteint en réalité les profondeurs des mathématiques. Pourquoi ? Parce qu'en 1998, j'ai découvert que, depuis l'espace $X_{\mathbb{Q}}$, on accède aux zéros de la fonction zêta de Riemann, sous forme de spectre d'absorption, sans même avoir à définir cette fonction elle-même.

Donc, en observant simplement l'action du groupe d'échelle, c'est-à-dire le groupe qui multiplie les fréquences par un nombre réel positif, et en analysant le spectre d'absorption correspondant, on obtient les zéros de la fonction ζ de Riemann. C'est un résultat que j'avais déjà obtenu. Lors de cette conférence, pendant les cinq minutes où j'étais autorisé à présenter mon travail, j'ai dessiné deux cercles au tableau. À gauche, j'ai écrit "musique" et j'ai expliqué le rôle de cet instrument. À droite, j'ai écrit mathématiques, et il est difficile de nier que la partie la plus profonde des mathématiques réside dans les zéros de la fonction ζ de Riemann. J'ai ensuite expliqué qu'il existe un lien direct entre les deux, lien que la théorie des topos met en évidence. À présent, si vous le souhaitez, je peux revenir à notre cher ami, Paul. Je te souhaite, Paul, un joyeux anniversaire.



Je voulais te dire qu'il y a un dicton français, je ne sais pas si je le traduis correctement, qui dit qu'avec l'âge, la pente se raidit, mais que la vue est magnifique. Je me souviens que lorsque

Paul a eu 60 ans, c'est exactement ce qu'il disait. Il disait qu'à 60 ans, on peut avoir une certaine perspective sur sa vie et en profiter. Le deuxième souvenir que j'aimerais évoquer brièvement est le suivant. Paul est indissociable de Celia. Celia était sa mère et, pendant longtemps, Paul a voyagé avec elle. Elle était donc toujours à ses côtés. On s'amusait beaucoup et ce dont je me souviens - et j'espère que Paul s'en souvient aussi - c'est que, pour mes 50 ans, on a fêté ça dans un restaurant à New York avec Paul and Celia. Il s'est avéré que Celia avait exactement 90 ans à ce moment-là. Je me souviens que Celia était une personne incroyable. Elle était toujours extrêmement perspicace. Je ne devrais peut-être pas raconter cette histoire, mais je me souviens de ce qu'elle m'a dit, lors de cette fête d'anniversaire avec Paul à New York, que si elle avait été plus jeune, elle aurait eu une liaison avec moi. Et puis, vous savez, j'étais curieux. Je lui ai dit : "D'accord! (que pouvais-je faire?) Mais qu'ai-je donc fait pour te plaire?". Et là, elle m'a raconté. Elle m'a dit qu'on était allés à un événement en France. On était à Paris, dans un restaurant, et quand on est revenus à l'appartement à Bures, il s'est avéré que l'accès normal, qui passait par l'Université d'Orsay, était fermé par une barrière. Et ce qu'elle m'a dit que j'avais fait et qui lui avait plu c'était que j'ai arrêté la voiture, je suis descendu. *[Rires]*, j'ai pris la barrière, je l'ai poussée sur le côté, et on est passé. Voilà, c'était un exemple parmi d'autres. C'était toujours un grand plaisir de partager la vie de Paul et de sa mère, et de partager leur joie de vivre. J'aimerais donc conclure mon intervention par ces mots pour remercier Paul de ses 46 années de profondes contributions aux mathématiques et d'amitié. Je termine donc ici. Merci.

MASOUD KHALKHALI : Des questions ou des commentaires ?

ALAIN CONNES : j'arrête mon partage d'écran, je souhaite voir l'audience dans la salle en visio.

MASOUD KHALKHALI : Oui, tout le monde ici a tout compris. Je n'ai pas... Il y a une question en ligne. J'ai posé la question à la salle.

UN AUDITEUR PRÉSENT SUR PLACE : Oui, c'est probablement la mauvaise question, mais il y a eu des recherches menées par... Parlez plus fort ! Oui, pardon. Bonjour Alain, c'est Frederick. Il y a eu des recherches menées par Lanceman et quelques autres personnes qui ont associé un topos à une C^* -algèbre d'une manière très simple, voire naïve, en associant toutes les C^* -algèbres maximales abéliennes, c'était un peu... ?

ALAIN CONNES : Oui, je peux répondre à cette question, car je le sais, ou je veux dire plutôt non, voyez-vous, je pense que cela ne peut pas fonctionner pour la raison suivante : il y a une énorme différence entre, euh, la C^* -algèbre et la théorie des topos, ou la géométrie non commutative et la théorie des topos. Cette énorme différence est que la géométrie non commutative est conçue pour la physique quantique, et la physique quantique, si vous voulez, n'existerait pas sans le nombre de Bombelli, qui est la racine carrée de moins un, qui est le nombre i . Donc, si vous remplacez une C^* -algèbre par ses sous-algèbres abéliennes, etc., c'est un peu ennuyeux, si on veut une approche classique, etc. Il y a des résultats intéressants, mais je ne pense pas que ce soit la bonne voie. Je comprends ce que vous voulez dire, mais je ne pense pas que ce soit ce qui se passe. Ce qui se passe est différent. Si vous avez un espace non commutatif du côté des topos, vous pouvez en général en

effet lui associer une C^* -algèbre du côté analytique, mais il y a une différence fondamentale entre les deux, déjà visible au niveau des feuilletages, car un feuilletage peut aussi être décrit comme un topos. La différence fondamentale est la suivante : au niveau des C^* -algèbres, on a une invariance globale, comme l'indice, etc. Au niveau des topos, on a une connaissance locale de la situation, ce qui est totalement différent. C'est une vision totalement différente de la même chose. Ces deux visions sont importantes. La relation entre les deux est très importante. Du côté des topos, une qualité est absolument remarquable : l'existence d'un topos implique une logique différente. On parle alors de logique qui n'est plus celle du tiers exclu, et l'on dispose de valeurs de vérité propres au topos, qui ne sont plus binaires (vrai ou faux). Il s'agit là d'une immense richesse, exploitée dans de nombreux contextes. De prime abord, on pourrait penser que la géométrie non commutative ne possède pas cette même richesse. Pourtant, elle possède cette richesse, en ce sens qu'elle modifie également la logique. Pourquoi ? Parce que nous savons que la logique de la mécanique quantique, ou plus précisément la logique des sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert, n'est pas du tout celle du tiers exclu. C'est beaucoup plus subtil que cela. Vous voyez, il y a beaucoup de nuances, beaucoup de choses. Par exemple, un avantage du côté non commutatif, c'est l'évolution temporelle, l'évolution temporelle "donnée par Dieu". Un avantage du côté topologique, comme je l'ai dit, est le changement de logique et le fait qu'il puisse être utilisé dans de nombreuses circonstances importantes. Mais il existe des différences fondamentales qu'il ne faut pas confondre. Et je ne pense pas avoir vu jusqu'à présent de moyen de revenir des C^* -algèbres au côté topologique et qui m'aurait convaincu. Non pas que ce soit pertinent, mais il est inutile d'essayer, comme je l'ai dit, dans ce dont vous avez parlé de Lanzman, etc., il y a des résultats intéressants, mais cela ne me semble pas correct.

MASOUD KHALKHALI : Des questions ?

UN AUDITEUR DANS LA SALLE : Oui. Un commentaire qui n'est pas vraiment une question. Vous avez mentionné au milieu de votre exposé, et vous avez introduit l'application de Baum-Connes, puis vous avez mentionné plus tard qu'il existe des contre-exemples.

ALAIN CONNES : Oui.

L'AUDITEUR : Vous voulez dire des contre-exemples pour les coefficients de Baum-Connes, n'est-ce pas ?

ALAIN CONNES : Oui. Oui. Oui. Oui. Non. Et si vous voulez, il y avait cet article très important qui donnait des contre-exemples, mais vous voyez, l'idée est la suivante : l'idée est que ce n'est pas comme si l'on se contentait d'une seule conjecture. Par exemple, si l'on prend l'hypothèse de Riemann, et qu'elle est fausse, c'est une catastrophe. Maintenant, si l'on prend la conjecture de Baum-Connes, les contre-exemples trouvés montrent les limites de son domaine d'application. Ce qui est amusant, c'est que cela rejoint ce que je viens de dire à propos de la logique d'un topos. Autrement dit, si l'on travaillait sur un point unique, comme le topos des ensembles, si la conjecture est fausse, elle est fausse, car il n'y a que vrai et faux. Mais lorsqu'on travaille avec des groupes discrets, on travaille en fait dans un topos, et la conjecture peut être vraie pour de nombreux groupes discrets, ce qui est le cas ici. C'est un exemple typique qui illustre bien la nuance entre vrai et faux, qui sont les valeurs de vérité associées à un topos. C'est un fait très important. Il existe

donc en fait un certain nombre de conjectures de ce type. Si vous voulez d'abord une conjecture, bien sûr, lorsque vous voyez un contre-exemple, vous êtes un peu déçu. Mais comme je l'ai dit, il y a ce dicton de Gromov qui stipule que si quelque chose est vrai pour tous les groupes discrets, alors c'est une trivialité. Le risque est donc le suivant : quelqu'un pourrait trouver une démonstration triviale. Mais ici, comme il existe des contre-exemples, ce risque est nul. Vous savez, c'est un symptôme de mon optimisme général, qui se manifeste dans de nombreux cas. J'espère avoir répondu à votre question, mais réfléchissez au fait que le topos vous fournit les valeurs de vérité. C'est assez intéressant, en fait, la façon dont on définit ces valeurs. Vous voyez, la façon dont vous les définissez est la suivante : lorsque vous prenez la catégorie des ensembles, alors ce qui se passe, c'est qu'il existe un foncteur qui, à un ensemble, associe à tous ses sous-ensembles, il est représentable. Il est représentable car il s'agit de l'application Hom de X , et de 0 et 1. On met 1 lorsqu'on est dans le sous-ensemble et 0 sinon. Il s'avère donc que c'est un foncteur représentable. Maintenant, dans le cas général d'un topos, qui n'est pas le topos des ensembles, on peut aussi chercher à représenter l'application qui associe à un objet du topos tous ses sous-objets. Il s'avère que c'est possible, mais pas seulement par 0 et 1. Par exemple, si l'on prend le topos le plus simple, qui est le topos des ensembles avec son auto-application, il s'avère que c'est un topos, et si on essaie de classifier les sous-objets des objets de ce topos, on trouve que les valeurs de vérité sont vrai, à un pas de vérité, à deux pas de vérité, à trois pas de vérité, etc., et faux. Voici donc un exemple simple des incroyables nuances que la notion de topos peut apporter à la notion de vérité. C'est absolument remarquable et cela mérite réflexion. À ce sujet, il existe un excellent ouvrage de McLane et Moerdijk qui constitue une très bonne introduction à la théorie des topos ; je vous le recommande vivement. Je veux dire, après tout, vous savez, ce que nous cherchons, ce n'est pas seulement à creuser dans notre propre domaine, mais aussi à rechercher des interrelations avec d'autres sujets fondamentaux en mathématiques. Et ces relations sont toujours fructueuses.

LE MÊME INTERVENANT : Pensez-vous qu'il y aura des contre-exemples pour l'énoncé original de la conjecture.

ALAIN CONNES : Oui, oui, oui, je ne serais pas surpris. En fait, vous savez, dès que vous passez au rang supérieur, je ne parierais pas, je ne parierais pas, vous savez. Donc bien sûr, c'est formidable de les chercher. Je veux dire, parce que nous apprenons, nous apprenons davantage. C'est tout.

UN AUTRE AUDITEUR : Permettez-moi de vous poser une question très bête : comment ce que vous nous avez dit sur la vérité, dans le contexte du topos, se rapporte-t-il à cette fameuse définition de la vérité par Tarski en logique ?

ALAIN CONNES : Une définition de quoi ? De la vérité ? Non, non, mais je n'ai pas entendu la fin de votre phrase...

LE MÊME INTERVENANT : La définition de la vérité ?

ALAIN CONNES : Oh, de la vérité ! Bien sûr que oui, c'est lié à ça. Et j'ai justement défendu, dans mon livre avec un psychanalyste³, l'idée que lorsqu'on écoute un débat, par exemple à la télévision, sur tel ou tel sujet, on a tort de se limiter à la logique du vrai ou du faux. C'est naïf, car il existe

3. À l'ombre de Grothendieck, écrit avec le psychanalyste Lafaye.

de nombreuses situations dans la vie courante où l'on ne peut pas simplement affirmer que ceci est faux ou que cela est vrai. C'est beaucoup plus nuancé que cela et vous savez, ce qui est absolument incroyable, c'est que lorsque Grothendieck était un peu rebelle au début des années 70, il a donné une conférence au CERN où il demandait si nous devions continuer à faire de la science et des mathématiques, etc. À la fin de son intervention, quelqu'un a posé une question très intéressante, et j'ai toujours été perplexe en écoutant la réponse de Grothendieck, car il a dit : "Mais les mathématiques n'ont pas de moyen de dire qu'une porte n'est ni fermée ni ouverte." Il est donc étonnant de constater que le fondateur de la théorie des topos, l'outil indispensable pour formuler des nuances, la rejetait en mathématiques. Bien sûr, cela a changé après que de nombreuses personnes l'aient remarquablement bien démontré. Je recommande donc le livre de McLane et Moerdijk ; c'est une excellente introduction, accessible et qui présente, par exemple, toutes les applications, notamment aux travaux de Paul Cohen sur l'hypothèse du continu. Ce livre vaut vraiment la peine d'être lu. C'est un sujet passionnant, mais différent de la géométrie non commutative. C'est lié, certes, mais les questions posées par MacLane sont différentes.

MASOUD KHALKHALI : Vous voulez poser votre question ?

UN AUTRE INTERVENANT EN VISIO : Euh oui, j'en avais une auparavant, mais j'en ai maintenant deux, car l'une d'elles fait suite à cette relation entre la mécanique quantique et cette théorie des topos. Après une autre discussion, vous avez mentionné une autre approche possible de l'utilisation des topos en mécanique quantique via la notion de temps et ces effondrements. Et...

ALAIN CONNES : Oui, non, non, mais ce n'est pas le cas si vous voulez... Il y a donc un mystère, mais cela va assez loin. En fait, je recommande d'écouter la TedX (WorldTech) conférence de 20 minutes que j'ai donnée récemment à Milan à ce sujet⁴. D'accord, parce que si vous voulez savoir, le cœur de la mécanique quantique est bien l'intrication, et... ce que cela suggère, et je l'ai expliqué dans ma conférence TedX à Milan, c'est que le temps n'est pas fondamental, il émerge de la non-commutativité. Mais s'il vous faut comprendre ce qui manque, il manque quelque chose... Si vous voulez comprendre ce qui pourrait être avant le temps, ce qui pourrait être... si vous voulez comprendre le fait que chaque expérience quantique est créative, qu'elle crée quelque chose d'imprévisible, alors... Et c'est pourquoi je suggérerais que la théorie des topos pourrait être utile. Bon, d'accord, c'est extrêmement spéculatif. Mais d'un autre côté, si l'on considère que l'apparence du temps est quelque chose de robuste, et je crois sincèrement que, depuis Galilée, nous avons toujours décrit l'évolution du temps en physique, je pense que c'est là l'obstacle à la compréhension de la gravité quantique, etc., et qu'il nous faut aller au-delà de cette notion, à savoir que le temps émergera tel que nous le connaissons. Mais il y a quelque chose de plus primitif, lié au quantique. Si vous voulez une formulation en français, il y a quelque chose que nous avons écrit dans un livre (désolé, c'est assez difficile à traduire en anglais) qui dit en substance que l'agitation ou l'inépuisable aléatoire du quantique est le véritable rythme de l'horloge divine⁵. Quelque chose comme ça. D'accord. Et je pense que cette phrase suffit. D'accord. Il suffit de s'en inspirer. L'idée, si vous voulez, c'est que l'aléatoire du quantique n'est pas arbitraire entre un point x et un point y , non,

4. Voir transcription <https://denisevellachemla.eu/AC-interview-milan-juin-2026.pdf> de cette conférence <https://www.rainews.it/video/2026/06/il-mondo-e-scritto-nella-lingua-della-matematica-senza-limiti-alain-connes-wtc-world-tech-conference-62637abf-fa18-4b4f-a579-f21096d54411.html>.

5. L'aléa quantique est le tic-tac de l'horloge divine.

précisément à cause de l'intrication. Donc, si vous voulez la cohérence de l'aléatoire du quantique, c'est précisément l'intrication.

LE MÊME INTERVENANT : Mais auriez-vous une idée de ce topos sous-jacent ?

ALAIN CONNES : Non, non, non, non. C'est totalement ouvert. Je me souviens que j'ai été contacté par Gisin, un physicien suisse qui avait conçu une sorte de générateur de nombres aléatoires. Il avait lu mon livre avec mon épouse Danye et Jacques Dixmier. Il est venu me voir à Paris et nous avons discuté de ce problème. Nous en discussions aussi avec des spécialistes des topos, si vous voulez. Mais la question reste ouverte, totalement ouverte. Je ne ferais rien, car cela pourrait vous induire en erreur. La question est donc totalement ouverte. L'étape manquante est un peu comme celle d'Einstein lorsqu'il réfléchissait à ces tendances. Il manque une réflexion philosophique fondamentale.

LE MÊME INTERVENANT : D'accord. Merci beaucoup. Une dernière question : dans votre article de synthèse sur la géométrie non commutative du point de vue spectral, vous avez mentionné que l'espace des moments d'une géométrie spectrale devait être considéré comme un espace grossier.

ALAIN CONNES : C'est très important, oui, c'est une idée fondamentale, bien sûr. Et la raison pour laquelle on le considère comme un espace grossier est que, lorsqu'on effectue une analyse de Fourier, on constate que le comportement au niveau infinitésimal dans l'espace est lié au comportement à l'infini dans l'espace des moments. Mais pourquoi grossier donc ? Eh bien, parce que seule la géométrie grossière de l'espace des moments est pertinente. Il ne s'agit pas de percevoir la différence que l'on observerait en considérant un espace des moments discret ou continu, cela ne changerait rien. Cela ne change rien au niveau de la structure infinitésimale de l'espace lui-même. Seule la géométrie grossière de l'espace des moments entre en jeu. Quand on veut comprendre la géométrie infinitésimale de l'espace dans lequel on se trouve, on ne se soucie de rien d'autre que de la géométrie grossière de l'espace des moments. D'accord ? On ne se soucie pas de savoir si l'espace des moments est continu ou discret. Cela ne change rien pour la structure à petite échelle. Voilà l'idée.

LE MÊME INTERVENANT : Je vois. D'accord. Et peut-être une autre chose liée à cela : la position et le moment en mécanique quantique sont duaux l'une de l'autre, et ce sont toutes deux des opérateurs. Mais il y a aussi une dualité entre l'énergie et le temps, mais le temps en mécanique quantique ordinaire n'est pas un opérateur. Qu'en pensez-vous ?

ALAIN CONNES : Eh bien, c'est le problème fondamental de *[Rires]* toute l'histoire du monde. Je veux dire, le seul qui a fait une percée, c'est Dirac. Oui, c'est tout.

LE MÊME INTERVENANT : Oui. Mais pensez-vous que le fait que le temps ne soit pas un opérateur en mécanique quantique pose problème ?

ALAIN CONNES : Bien sûr, bien sûr, non, non, c'est le cas. Par exemple, Dirac a écrit des articles où il a traité plusieurs fois le problème du temps. Donc, je veux dire, c'est un problème fondamental, bien sûr, le problème du temps en mécanique quantique ou en théorie quantique des champs, etc.,

c'est un problème fondamental. C'est lié à ce dont nous discutons précédemment. Bien sûr, vous savez.

LE MÊME INTERVENANT : D'accord. Je vois. D'accord. Merci. Très bien. Merci.

MASOUD KHALKHALI : D'autres questions sur Zoom, à distance ?

GEORGE ELLIOTT : Eh bien, je me demandais si je pouvais vous demander...

ALAIN CONNES : Oui, bien sûr.

GEORGE ELLIOTT : Vous avez mentionné le temps, mais vous n'avez pas mentionné la température. Est-ce lié ?

ALAIN CONNES : Oh, oui. Non, non. D'accord. Non. Pour cela, vous devriez écouter ma conférence à Milan, car j'y ai expliqué ce qui suit. J'ai expliqué qu'Heisenberg a découvert, en mécanique quantique, que $AB \neq BA$. J'ai ensuite affirmé que $5AB$ peut être égal à $5BA$, à ceci près qu'il faut laisser B évoluer pendant un certain temps. Ce temps fait intervenir deux éléments : premièrement, le nombre de Bombelli, c'est-à-dire le temps imaginaire, un fait surprenant ; deuxièmement, on peut calculer le temps nécessaire pour que A et B échangent leurs valeurs. D'accord ? Et ce laps de temps est infime. À température ambiante, la lumière ne traverse qu'un micron pendant ce laps de temps. C'est donc un temps extrêmement court. Et bien sûr, je fais référence à la condition KMS qui implique l'inverse de la température. Alors ce que je trouve encore plus étonnant, c'est que cela implique les nombres de Bombelli. C'est pourquoi je dis que la mécanique quantique utilise fondamentalement les nombres complexes, et c'est là qu'elle échappe à la théorie des topos, à cause de cette implication des nombres complexes. Je veux dire, les nombres complexes sont partout, partout, partout. En fait, je crois qu'il y a une déclaration, je pense que c'est dû à Bohr ou Bohm... Je ne sais pas, je ne suis pas sûr duquel des deux il s'agissait, mais ce qu'ils disent, c'est que les principales découvertes de la physique au XXe siècle impliquaient les nombres complexes. Et pourquoi ? Parce qu'ils réfléchissaient à la gravité et... si vous voulez la signature de Minkowski, qui devient la signature euclidienne lorsqu'on utilise à nouveau les nombres de Bombelli...

GEORGE ELLIOTT : Eh bien, je crois me rappeler que Feynman a insisté...

ALAIN CONNES : Bien sûr. Bien sûr. Bien sûr. Bien sûr, Feynman. D'accord. Il faut trouver une bonne formulation de Feynman. C'est certain. *[Rires]* Bien sûr. Parce que les intégrales de Feynman, enfin, quand on y pense, on sait bien qu'il s'agit simplement d'exponentielles imaginaires, ce qui n'aurait absolument aucun sens sans Bombelli. Donc, je veux dire, c'est vraiment une entrée incroyable pour les nombres complexes, que nous avons heureusement en géométrie non commutative, mais que les topos n'ont pas. Voilà la situation.

GEORGE ELLIOTT : Merci.

MASOUD KHALKHALI : Les commentaires sont épuisés. Oui, remercions à nouveau Alain pour cette belle intervention. Merci.