CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ANDRÉE C. EHRESMANN

Sur Paulette Libermann (1919-2007)

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 48, nº 4 (2007), p. 270-274
<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_2007__48_4_270_0>

Volume XLVIII-4 (2007)

SUR PAULETTE LIBERMANN (1919-2007)

par Andrée C. EHRESMANN

Nous avons appris avec tristesse la mort de Paulette LIBERMANN, décédée en Juillet 2007. Elle a été l'une des premières élèves de Charles EHRESMANN à Strasbourg, où elle a soutenu sa thèse en 1953.

Photo de Paulette Libermann, prise dans notre appartement à Amiens lors de la soutenance de la thèse de René Guitart en Juin 1979, dernière fois où elle a rencontré Charles (trois mois avant sa mort).

Ancienne élève de l'Ecole Normale de Sèvres, elle avait commencé ses recherches avec Elie CARTAN, puis soutenu en 1947 une thèse à Oxford, sous la direction de WHITEHEAD. C'est ensuite qu'elle a travaillé sous la direction de Charles, à l'époque où il développait ses importantes recherches sur les fondements de la Géométrie différentielle basés sur les notions de pseudogroupes, espaces fibrés et jets infinitésimaux. Les travaux de Melle Libermann ont été très liés aux siens à cette période. Les liens se sont distendus au début des années soixante quand elle a été nommée à l'Université de Rennes et que Charles s'est tourné vers la Théorie des Catégories. Mais elle nous téléphonait régulièrement et, lorsque les conférences étaient en rapport avec la Géométrie Différentielle, elle assistait au Séminaire à Paris ou aux Journées Théorie et Applications des Catégories à Amiens.

Elle a produit environ 70 publications, dont beaucoup dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences ou dans les Actes des nombreux colloques de Géométrie auxquels elle participait régulièrement. Voici quelques idées sur ces travaux ; il n'est pas question d'être exhaustif car je ne pourrai parler que de ceux que Charles et/ou moi connaissions, en particulier en m'appuyant sur le rapport qu'il avait écrit à l'appui de sa candidature comme Professeur à l'Université de Paris où elle a été nommée en 1967.

1. Géométrie différentielle des G-structures

Sa thèse [1] constitue le premier travail important sur cette question. Les G-structures sont définies sur une variété différentiable par la donnée en chaque point d'une famille de repères modulo un sous-groupe G du groupe linéaire homogène L_n. Le problème essentiel considéré est l'équivalence locale des G-structures qui se ramène au problème d'équivalence posé par Elie Cartan. Elle étudie en détail les espèces de structures suivantes : structures presque symplectiques, presque complexes et presque paracomplexes, presque hermitiennes et presque kählériennes, presque quaternoniennes. Parmi ses résultats, qui sont à l'origine de nombreux travaux sur les G-structures, citons :

1. l'introduction du tenseur de torsion pour les structures presque symplectiques ou presque paracomplexes dont la nullité équivaut au fait que la structure est symplectique ou paracomplexe ;

2. l'introduction des courbure et torsion conformes pour les structu-

res presque hermitiennes et presque quaternoniennes de $2^{ème}$ espèce

3. Dans le cas des structures presque hermitiennes et presque quaternoniennes, elle trouve des connexions affines canoniques associées, ce qui résout complètement le problème d'équivalence pour ces structures.

4. Pour les structures presque complexes sur une variété V_4 elle résout aussi ce problème, bien que ces structures n'admettent pas de connexion affine associée.

2. Pseudogroupes de Lie et groupoïdes différentiables

Elle a consacré plusieurs articles (*e.g.* [2, 7, 8, 9]) à cette théorie, donnant un exposé original du point de vue global. Concernant le prolongement des systèmes différentiels, elle a démontré dans un cas particulier une conjecture d'Elie Cartan: Si un sous-groupe G de L_n est de type infini (*i.e.* si le pseudogroupe des automorphismes locaux de la G-structure intégrable correspondante est de type infini), alors G est involutif ou semi-involutif. Elle a étudié la notion de pseudogroupe infinitésimmal associé à un pseudogroupe de Lie, ce qui lui a permis de donner une nouvelle démonstration des théorèmes que Charles Ehresmann avait énoncés [E1, E2] relativement au sous-groupe des transformations globales d'un pseudogroupe de Lie de type fini et au groupe des automorphismes globaux d'une G-structure telle qu'une connexion associée à la G-structure soit complètement déterminée par la donnée de sa torsion.

Elle a décrit explicitement l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux globaux d'une structure symplectique (c'est l'espace des formes de Pfaff fermées) et d'une structure de contact. Enfin, elle a obtenu [3] une résolution fine du faisceau des germes d'automorphismes infinitésimaux d'une G-structure intégrable sur V_n, lorsqu'elle est définie par une forme fermée de degré 2 et de rang $2q \leq n$, par une forme de Pfaff de rang $2k+1 \leq n$, ou par une forme extérieure de degré n.

3. Géométrie différentielle d'ordre supérieur

Plusieurs articles (*e.g.* [4, 5]) constituent une contribution intéressante à cette géométrie. En utilisant la notion de forme différentielle tensorielle d'ordre q, Melle Libermann définit et étudie une notion de connexion d'ordre supérieur pour les espaces fibrés vectoriels. De telles connexions interviennent, par exemple, par prolongement d'une connexion affine ordinaire. La notion de surconnexion (qui est une suite de connexions d'ordre 1 à q) [6] la conduit à la notion de géodésique d'ordre q. Ces géodésiques sont solutions d'un système différentiel isobare. Inversement, tout système différentiel isobare symétrique détermine une surconnexion. Dans le cas des connexions d'ordre 2, elle montre qu'à la connexion sont associés 4 champs de tenseurs, courbure et torsion d'holonomie, courbure et torsion de prolongement, dont la nullité équivaut à l'intégrabilité de la connexion. Relativement à une surconnexion d'ordre q, elle définit aussi la notion de sous-variété totalement géodésique ; pour toute sous-variété W de V_n il existe une surconnexion d'ordre q pour laquelle W est totalement géodésique; elle énonce un théorème de Meusnier généralisé. Elle étudie aussi les relations entre les notions de surconnexion et de singularité d'applications différentiables.

4. Travaux divers

Elle a rédigé différents cours et travaux de synthèse. Dans les années 80, en collaboration avec C.M. Marle, elle a consacré beaucoup de temps à la rédaction d'un important livre sur la géométrie symplectique, écrit d'abord en français puis publié en anglais sous le titre "Symplectic geometry and analytic Mechanics" [13].

Après la mort de Charles, elle a publié plusieurs articles sur ses travaux de géométrie. En particulier elle a écrit un long article [10] dans les Commentaires de la Partie I de "Charles Ehresmann : Œuvres complètes et commentées". A l'occasion du centième anniversaire de Charles en 2005, elle a participé au Colloque de Bedlewo en son honneur [11], et elle est aussi venue faire une conférence [12] au Colloque "Charles Ehresmann : 100 ans" (Amiens, 2005) ; c'est d'ailleurs la dernière fois que je l'ai vue et j'ai pu constater qu'à plus de 85 ans elle avait conservé toute sa vivacité et son goût de la conversation.

Références

1. Sur le problème d'équivalence des structures infinitésimales régulières (Thèse, Strasbourg 1953), *Ann. Mat. Pura Appl.* 36 (1954), 27-120.
2. Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie, *Bull. Soc; Math; Franced* 87 (1959), 409-425.

3. Sur certaines résolutions de faisceaux, *C.R.A.S. Paris* 254 (1962), 1735-37.
4. On sprays and higher order connections, *Proc. Nat. Acad. Sc.* 49 (1963), 459-462.
5. Sur la géométrie des prolongements des fibrés vectoriels (Coll. Intern. CNRS Grenoble), *Annales Inst. Fourier* XIV (1964), 145-172.
6. Surconnexions, *C.R.A.S. Paris* 258 (1964), 6327 ; 259 (1964), 2948 ; 260 (1965), 776.
7. Groupoïdes différentiables et presque parallélisme, *Symp. Math. X* (Convegno di Geom. Dif.), Roma (1971), 59-93.
8. Parallélismes, *J. Diff. Geom.* 8 (1973), 511-539.
9. Remarques sur les systèmes différentiels, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXIII-1 (1982), 55-72.
10. Les travaux de Charles Ehresmann en Géométrie Différentielle, dans *Charles Ehresmann : Œuvres complètes et commentées,* Partie I (Ed. A.C. Ehresmann), Amiens 1982, 510-522.
11. The mathematical legacy of Charles Ehresmann. On the occasion of the hundredth anniversary of his birthday, in *Geometry and topology of manifolds* (Ed. Kubarski, Jan et al.), Proceedings of the conference Bedlewo 2005, Banach Center Publications 76 (2007), 35-50.
12. C. Ehresmann and Differential Geometry, *Cahiers Top. et Géom. Diff. Catég.* XLVI-3, 204.
13. P. Libermann et C.M. Marle, *Symplectic geometry and analytical Mechanics* (Trad.. B.E. Schwarzbach), Reidel 1987.
E1. C. Ehresmann, Sur les pseudogroupes de Lie de type fini, *C.R.A.S. Paris* 246 (1958), 360-362.
E2. C. Ehresmann, Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie, *Rev. Un. Mat. Argentin.* 19 (1960), 48.

Faculté de Mathématique et Informatiuque
33 rue Saint-Leu, 80039 Amiens
ehres@u-picardie.fr