

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1955-04-01.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur les points limites d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques imaginaires.* Note de M^{lle} **MONIQUE DOUBRÈRE**, présentée par M. Paul Montel.

Désignons par S , l'ensemble des entiers algébriques θ dont tous les conjugués dans le plan complexe, à l'exception de θ seul, sont intérieurs au cercle-unité; par S'' l'ensemble des entiers algébriques *imaginaires* θ , dont le conjugué $\bar{\theta}$ se trouve, ainsi que θ , hors du cercle-unité, alors que tous les autres conjugués sont intérieurs.

John B. Kelly ⁽¹⁾ a montré que les points limites de S'' appartiennent à S'' s'ils sont imaginaires, à S_1 s'ils sont réels.

Soit $Q(z)$ le polynôme irréductible à coefficients entiers ayant pour zéro $1/\theta$ et tel que $Q(0)=1$. Nous allons établir la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour qu'un nombre θ de S'' ou de S_1 soit point limite de l'ensemble S'' , il faut et il suffit qu'il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers tel que sur $|z|=1$, on ait l'inégalité :*

$$\begin{aligned} |A(z)| &\leq |Q(z)| && \text{si } \theta \text{ appartient à } S'', \\ |A(z)| &\leq |Q^2(z)| && \text{si } \theta \text{ appartient à } S_1, \end{aligned}$$

l'égalité n'étant vérifiée qu'en un nombre fini de points.

Avant de donner la démonstration de ce théorème, rappelons que tout point limite de l'ensemble S_1 est un point de S_1 caractérisé par l'existence d'un polynôme $A_1(z)$ à coefficients entiers tel que sur $|z|=1$, on ait l'inégalité $|A_1(z)| \leq |Q(z)|$, l'égalité n'étant vérifiée qu'en un nombre fini de points. En prenant $A(z) \equiv A_1^2(z)$, le théorème montre que *tout point limite de S_1 est point limite de S'' .*

La démonstration du théorème est inspirée de l'étude des points limites de S_1 faite par J. Dufresnoy et Ch. Pisot ⁽²⁾.

A tout nombre θ de S'' on peut associer au moins une fraction rationnelle $A(z)/Q(z)$, où $Q(z)$ est le polynôme déjà défini, et $A(z)$ un polynôme à coefficients entiers rationnels, non divisible par $Q(z)$, vérifiant $A(0) \geq 1$ et tel que $|A(z)| \leq |Q(z)|$ sur $|z|=1$; le polynôme aux zéros inverses de ceux de $Q(z)$ satisfait aux conditions imposées à $A(z)$, sauf pour certains nombres du quatrième degré.

Dans $|z| \leq 1$, la fraction rationnelle $A(z)/Q(z)$ a deux pôles imaginaires conjugués $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$. Dans $|z| < 1/|\theta|$, elle peut donc être développée en série

⁽¹⁾ *Amer. J. Math.*, 72, 1950, p. 565-572.

⁽²⁾ *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. (3)*, 70, 1953, p. 107-114; *Bull. Sc. Math.*, 77, 1953, p. 129-136.

de puissances

$$(1) \quad \frac{A(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n,$$

où les u_n sont des entiers; dans $|z| \leq 1$, elle peut être développée sous la forme

$$(2) \quad \frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{\lambda}{1-\theta z} + \frac{\bar{\lambda}}{1-\bar{\theta} z} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n = \frac{a-bz}{1-(\theta+\bar{\theta})z+\theta\bar{\theta}z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n.$$

Des relations (1) et (2), on déduit

$$(3) \quad u_n = \lambda \theta^n + \bar{\lambda} \bar{\theta}^n + \varepsilon_n.$$

D'après (1), la valeur moyenne de $|(1-\theta z)(1-\bar{\theta} z)A(z)/Q(z)|^2$ sur $|z|=1$ est

$$(4) \quad u_0^2 + [u_1 - (\theta + \bar{\theta})u_0]^2 + \sum_{n=2}^{\infty} [u_n - (\theta + \bar{\theta})u_{n-1} + \theta\bar{\theta}u_{n-2}]^2 \leq 1 + (\theta + \bar{\theta})^2 + \theta^2\bar{\theta}^2;$$

d'après (2), la valeur moyenne de $|A(z)/Q(z)|^2$ sur $|z|=1$ est

$$(5) \quad \frac{\lambda^2}{\theta^2-1} + \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\theta}^2-1} + \frac{2\lambda\bar{\lambda}}{\theta\bar{\theta}-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 \leq 1.$$

D'autre part, on a

$$(6) \quad \frac{\lambda^2}{\theta^2-1} + \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\theta}^2-1} + \frac{2\lambda\bar{\lambda}}{\theta\bar{\theta}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\theta^n} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\theta}^n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\theta\bar{\theta}(\theta^{n-1}-\bar{\theta}^{n-1})-b(\theta^n-\bar{\theta}^n)^2}{(\theta-\bar{\theta})^2(\theta\bar{\theta})^{2n}}.$$

De (5) et (6), on déduit

$$(7) \quad |b| \leq \theta\bar{\theta} \quad \text{et} \quad |a| \leq |\theta + \bar{\theta}| + \theta\bar{\theta}.$$

Soit une suite de nombres θ_μ de S_2'' tendant vers un nombre θ . D'après (7), l'ensemble des nombres a_μ et b_μ qui leur sont associés, est borné; on peut donc toujours supposer, quitte à en extraire une suite partielle, que les a_μ et b_μ tendent respectivement vers a et b , non simultanément nuls d'après (3), (4) et (5). De la suite $A_\mu(z)/Q_\mu(z)$, on peut extraire une suite partielle qui tend vers une fonction limite $R(z)$; on démontre que $|R(z)| \leq 1$ sur $|z|=1$, que $R(z)$ est une fraction rationnelle, et que

$$R(z) = \frac{a-bz}{1-(\theta+\bar{\theta})z+\theta\bar{\theta}z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n \quad \text{dans} \quad |z| < 1.$$

$R(z)$ présente les pôles simples $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ si θ appartient à S_2'' ; le pôle simple ou double $1/\theta$ si θ appartient à S_1 . Lorsque $1/\theta$ est pôle simple, on a $R(z) \equiv A(z)/Q(z)$; sinon $R(z) \equiv A(z)/Q^2(z)$.

En comparant les valeurs moyennes τ et τ_μ , sur $|z|=1$, de $|R(z)|^2$ et

de $|A_\mu(z)Q_\mu(z)|^2$, on trouve

$$\tau \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \tau_\mu = \frac{1}{\theta^2} \leq 1 - \frac{1}{\theta^2},$$

ce qui entraîne la partie directe du théorème.

Réciproquement, une suite de nombres θ_μ de S_2'' tendant vers θ de S_2'' s'obtiendra par les zéros intérieurs au cercle unité de $Q(z) \pm z^\mu A(z)$. Si θ appartient à S_1 , on considérera les zéros de $Q^2(z) \pm z^\mu A(z)$ avec un choix convenable du signe $+$ ou $-$; en prenant le signe contraire, on obtiendrait un couple de nombres réels tendant vers θ .

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Représentation de certaines intégrales d'équations différentielles.* Note (*) de M. **GEORGES BRILLOUET**, présentée par M. Henri Villat.

Représentation par des intégrales analogues à celles de Laplace d'intégrales particulières d'équations différentielles linéaires à coefficients constants dont le second membre est de la forme $1/z^\lambda$. Raccord avec la méthode de variation des constantes lorsque λ est un entier positif. Application au problème des ondes liquides de gravité abordant une plage de pente uniforme.

1. Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogènes

$$(1) \quad \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) f(z) = E(z),$$

où les ρ_j sont les constantes quelconques. Posons $P(\zeta) \equiv \prod_{j=1}^q (\zeta - \rho_j)$.

2. Si $E(z) \equiv 1/z^n$ (n entier positif), une intégrale particulière de (1) peut être représentée par

$$(2) \quad f(z) = \frac{(1-z)^{n-1}}{(n-1)!} \int_P e^{z\zeta} \frac{\zeta^{n-1}}{P(\zeta)} d\zeta,$$

formule dans laquelle P désigne un chemin du plan complexe ζ , partant de l'infini dans le demi-plan $\Re(z\zeta) < 0$ et aboutissant à l'origine sans passer par aucun des points ρ_j .

3. Si $E(z) \equiv 1/z^\lambda$ ($\lambda \neq$ entier positif), la formule de Hankel montre qu'une intégrale particulière de (1) est

$$(3) \quad f(z) = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} e^{z\zeta} \frac{\zeta^{\lambda-1}}{P(\zeta)} d\zeta.$$

Ici, le plan complexe ζ est entaillé suivant la demi-droite d'argument :

(*) Séance du 23 mai 1955.