Möbius au sujet de sa forme à une seule face (unilatère), appelée ruban de Möbius

§ 11. On peut se faire une idée très claire des différentes formes des deux types de surfaces qu'on peut obtenir à partir d'une bande de papier rectangulaire. Si A, B, B', A' (cf. Fig. 1) sont ses quatre coins successifs, et que l'on plie ensuite la bande de sorte que le bord A'B' reste parallèle jusqu'à ce qu'il coïncide finalement avec AB, la bande prend la forme d'une surface cylindrique, c'est-à-dire d'une variété à deux faces, dont les deux bords circulaires AA' et BB' du rectangle initial constituent les deux lignes de contour. Cependant, si une paire de bords parallèles AA' et BB' est suffisamment grande par rapport à l'autre paire AB et A'B', on peut également faire coïncider A' avec B, et B' avec A, en maintenant d'abord une extrémité AB de la bande en place et en pliant l'autre extrémité A'B' autour de l'axe longitudinal de la bande.

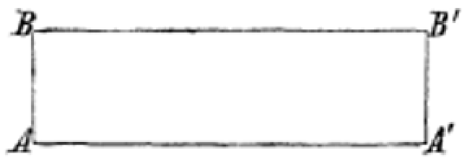

Fig. 1.

La bande est tournée à mi-chemin, de sorte que A'B' et BA prennent la même direction. La surface ainsi créée ne possède qu'une seule ligne de démarcation, celle formée par les lignes courbes AA' et BB', qui se rejoignent en A et B', et en B et A'. Cette surface ne possède également qu'une seule face ; en effet, si l'on commence à la peindre d'une couleur à partir d'un point quelconque et que l'on continue sans franchir la ligne de démarcation, les deux faces opposées de la surface seront finalement colorées en chaque point.

§ 12. De même qu'on peut distinguer entre variétés unilatérales et bilatérales, on peut également distinguer entre polyèdres à une seule face et polyèdres à deux faces, selon que, en se déplaçant continuellement le long de la surface, on puisse soit atteindre chacun des deux côtés de chaque surface individuelle, soit toujours revenir au même côté de la surface d'où l'on est parti.

Si toutes les faces d'un polyèdre trigonal sont bilatérales, comme c'est le cas, par exemple, pour toutes les faces d'un polyèdre trigonal ordinaire, alors ce dernier est lui-même bilatéral, et réciproquement. Si toutes les faces sont unilatérales, comme pour le décaèdre du § 8, alors le polyèdre trigonal l'est également, mais la réciproque n'est pas vraie : pour qu'un polyèdre trigonal soit unilatéral, il suffit qu'une partie de ses faces le soit.

Référence : *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyëders*, August Ferdinand Möbius, 1865, Gesammelte Werke Vol. 2, § 11 et 12, p. 484-485.

Transcription, traduction en LaTeX : Denise Vella-Chemla.