Proceedings of the International Congress of Mathematicians
August 16–24, 1983, Warszawa

MICHÈLE VERGNE

Formule de Kirillov et indice de l'opérateur de Dirac

Dans cet article nous annonçons une formule pour l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac et montrons son analogie avec la formule universelle proposée par Kirillov pour le caractère des représentations d'un groupe de Lie. Cette analogie suggère une généralisation de la formule de Kirillov au cas des orbites non génériques de la représentation coadjointe.

Ceci est un travail commun avec Nicole Berline.

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère la fonction analytique, G-invariante, définie sur $\mathfrak{g}$ par $j(X) = \det\left(\dfrac{e^{\operatorname{ad}X/2}-e^{-\operatorname{ad}X/2}}{\operatorname{ad}X}\right)$. Elle admet, au moins dans un voisinage de 0, une racine carrée analytique $j^{1/2}$, telle que $j^{1/2}(0) = 1$.

Supposons G unimodulaire et de type I. Soit $\hat{G}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G. Kirillov a conjecturé la formule suivante [16]: pour presque tout $T \in \hat{G}$ (au sens de la mesure de Plancherel) il existe une orbite $\mathcal{O}$ de G dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ telle que, dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$, on ait l'égalité de fonctions généralisées

$$\operatorname{tr} T(\exp X) j^{1/2}(X) = \int_{\mathcal{O}} e^{i\langle f, X\rangle} d\beta_{\mathcal{O}}(f), \tag{1}$$

en notant $\beta_{\mathcal{O}}$ une mesure invariante sur l'orbite $\mathcal{O}$, que nous préciserons dans la suite. La validité de cette conjecture a été établie dans de nombreux cas [10, 16, 14, 15].

Cette conjecture est un des aspects de la méthode des orbites qui consiste à mettre en correspondance, génériquement tout au moins, représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie et orbites de la représentation coadjointe. Dans cette correspondance, à une représentation de la série discrète est associée une orbite $\mathcal{O} = G\cdot f$ admissible dont le stabilisateur est compact [11]. Réciproquement, supposons que $\mathcal{O}$ admette une structure riemannienne G-invariante, et soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\tau$ un module de Clifford admissible sur $\mathcal{O}$ (voir 2.12). Considérons la représentation virtuelle $T_{\mathcal{V}}$ dans la différence des noyaux L^2 des opérateurs de Dirac $D^\pm$. Dans de nombreux cas, cette représentation est la représentation $T_{f,\tau}$ de Duflo. La formule universelle de Kirillov dicte une formule pour la trace (au sens fonctions généralisées) de la représentation $T_{\mathcal{V}}$, c'est-à-dire une formule pour l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac D.

Il parait donc naturel de rechercher une formule similaire à celle de Kirillov pour l'indice équivariant d'un complexe elliptique G-équivariant sur une variété M. Nous avons montré dans [3], [6], comment la notion de formes G-équivariantes permet de proposer une telle formule universelle pour certains complexes classiques.

Nous montrons ici comment écrire la formule de Kirillov en termes de formes équivariantes. Si l'orbite $\mathcal{O}$ satisfait certaines conditions, on peut en effet écrire la formule de Kirillov sous la forme:

$$\operatorname{tr} T(\exp X) = \int_{\mathcal{O}} \mathrm{Ch}(X,\tau)\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O}), \tag{2}$$

où $\mathrm{Ch}(X,\tau)$ et $\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O})$ sont des classes de cohomologie équivariante par rapport à $X \in \mathfrak{g}$ définies dans la section 1. Dans le cas où l'orbite $\mathcal{O}$ est de dimension maximale, le terme $\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O})$ se réduit à la constante $j^{-1/2}(X)$ et $\int_{\mathcal{O}}\mathrm{Ch}(X,\tau)$ coïncide avec $\int_{\mathcal{O}} e^{i\langle f,X\rangle}\, d\beta_{\mathcal{O}}(f)$. Un exemple de Khalgui [14] montre que pour une orbite non générique la formule (1) est fausse, même si on remplace $j^{1/2}$ par une autre fonction analytique G-invariante.

L'écriture ci-dessus suggère que, pour une orbite non générique, la formule de Kirillov doit être modifiée pour tenir compte du terme $\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O})$.

Malheureusement, nous devons souligner les défauts de notre interprétation dans son état actuel:

(1) Nous ne définissons le terme $\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O})$ que sous des conditions probablement trop restrictives sur l'orbite $\mathcal{O}$.

(2) Dans le cas où $\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O})$ est défini, nous ne pouvons assurer que le membre de droite de (2) définisse une fonction généralisée.

1. Cohomologie et classes caractéristiques équivariantes

1.1. Soit M une variété différentielle. On note $\mathscr{A}(M) = \oplus \mathscr{A}^r(M)$ l'algèbre sur C des formes différentielles; on note $\mathscr{A}^+(M)$ la sous-algèbre, commutative, des formes paires; on note d la dérivation extérieure. Si ξ est un champ de vecteurs, on note $c(\xi)\colon \mathscr{A}(M) \to \mathscr{A}(M)$ la contraction, $\mathscr{L}(\xi)$ la dérivation de Lie. On a $\mathscr{L}(\xi) = d \cdot c(\xi) + c(\xi) \cdot d$.

Soit G un groupe de Lie agissant sur M à gauche. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Pour $X \in \mathfrak{g}$ on note $X^* = X^*_M$ le champ de vecteurs sur M défini par $(X^* f)(m) = (d/dt) f(\exp tX \cdot m)|_{t=0}$. Soit $\mathscr{A}_X$ la sous-algèbre des formes $\mu \in \mathscr{A}(M)$ telles que $\mathscr{L}(X^*)\mu = 0$.

On rappelle les définitions de [3]. L'opérateur (non homogène) $d_X = d - 2i\pi c(X^*)$ sur $\mathscr{A}(M)$ est une antidérivation qui inverse la parité des formes et vérifie $\big(d - 2i\pi c(X^*)\big)^2 = -2i\pi \mathscr{L}(X^*)$. Il est donc de carré nul sur $\mathscr{A}_X$. On pose

$$\begin{aligned} Z(M, d_X) &= \ker\big(d - 2i\pi c(X^*)\big), \\ B(M, d_X) &= \big(d - 2i\pi c(X^*)\big)\mathscr{A}_X. \end{aligned}$$

On a donc $B(M, d_X) \subset Z(M, d_X) \subset \mathscr{A}_X$. On pose

$$H^*(M, d_X) = Z(M, d_X)/B(M, d_X).$$

Il est clair que si $X^*_M = 0$, l'anneau $H^*(M, d_X)$ est l'anneau de cohomologie ordinaire de M.

1.2. La cohomologie de d_X est particulièrement simple à décrire lorsque M est compacte et que le groupe à un paramètre $\exp tX$ est relativement compact [6]. Dans ce cas les zéros de X^*_M forment une sous-variété M_0 de M et on a la proposition suivante:

1.3. Proposition. *L'application $i^*\colon H^*(M, d_X) \to H^*(M_0)$ est un isomorphisme.*

La formule de localisation [3], [6] généralise un résultat de R. Bott [7], [8]. Nous l'énonçons ici dans un cas particulier.

Si $\mu = \sum \mu^{[r]} \in \mathscr{A}(M)$ et si N est une sous-variété compacte orientée de M, on écrit $\int_N \mu$ pour $\int_N \mu^{[\dim N]}$. Si m est un point de M, on pose $\mu(m) = \mu^{[0]}(m)$. Si N est une sous-variété compacte orientée invariante par le groupe à un paramètre $\exp tX$, l'application $\mu \to \int_N \mu$ est bien définie sur $H^*(M, d_X)$.

Si $m \in M$ est un zéro du champ de vecteurs X^*, la dérivation de Lie $\mathscr{L}(X^*)$ induit un endomorphisme $L_m(X)$ de l'espace tangent T_mM.

Supposons que le groupe G soit compact. Si $X \in \mathfrak{g}$ et si m est un zéro de X^* tel que $L_m(X)$ soit inversible, il existe une base $e_1, e_2, \ldots, e_{2n-1}, e_{2n}$ de T_mM telle que:

$$L_m(X)e_{2j-1} = \lambda_j e_{2j},$$

$$L_m(X)e_{2j} = -\lambda_j e_{2j-1}.$$

On suppose cette base d'orientation positive. Alors, le produit $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ ne dépend pas du choix d'une telle base. On pose:

$$\chi\big(L_m(X)\big) = i^{-n}\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

On dit que X^* est *non dégénéré* lorsque $L_m(X)$ est inversible pour tout zéro m de X^*. Rappelons alors la

1.4. Proposition. *Soit G un groupe de Lie compact agissant sur une variété compacte orientée de dimension $2n$. Soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que le champ de vecteurs X_M^* soit non dégénéré. Soit $\mu \in H^*(M, d_X)$. Alors*

$$\int_M \mu = \sum_{\text{zéros de } X^*} \frac{\mu(m)}{\chi\big(L_m(X)\big)}.$$

1.5. *Remarque.* La proposition 1.4 est aussi obtenue dans [1] par les méthodes de la cohomologie T-équivariante ([19], voir aussi [23]).

1.6. Revenons au cas où G est un groupe de Lie quelconque. Une application $X \mapsto \mu_X$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{A}(M)$ sera appelée une *forme équivariante* si

$$\mu_X \in Z(M, d_X),$$

$$\mu_{g \cdot X} = g \cdot \mu_X \quad \text{pour } g \in G, X \in \mathfrak{g}.$$

Donnons dès maintenant un exemple:

1.7. Soit (M, σ) une variété symplectique, munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G. Notons f_X le moment de $X \in \mathfrak{g}$. Par définition on a $c(X^*)\sigma + df_X = 0$ et comme $d\sigma = 0$, il en résulte que $f_X - (\sigma/2i\pi)$ est un élément de $Z(M, d_X)$.

En particulier, soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite de la représentation coadjointe de G. Pour la structure symplectique canonique de $\mathcal{O}$, le moment de $X \in \mathfrak{g}$ est donné par $f_X(l) = -\langle l, X\rangle$ pour $l \in \mathcal{O}$. L'élément $\exp\left[-i\left(f_X-(\sigma/2i\pi)\right)\right] \in Z(M, d_X)$ jouera un rôle important dans la suite.

1.8. Rappelons comment l'analogue équivariant de la construction de Chern–Weil fournit des éléments de $H^*(M, d_X)$ ([5]).

Soit H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Soit $P \to M$ un fibré principal de fibre H sur lequel H opère à droite. On suppose P muni d'une action à gauche du groupe G. On fait l'hypothèse que P admet une 1-forme de connexion α invariante par G. (Cette hypothèse est toujours satisfaite si G est compact, mais il serait préférable de l'éviter dans la situation générale). Pour $X \in \mathfrak{g}$ on définit le moment de X par $J_X = c(X_P^*)\alpha$. On note Ω la courbure de α. Soit Φ une fonction polynômiale H-invariante sur $\mathfrak{h}$. On définit par multilinéarité la forme $\Phi\left(J_X-(\Omega/2i\pi)\right)$ sur P. Cette forme se projette en une forme sur M notée $\Phi(X, \alpha)$, qui appartient à $Z(M, d_X)$ et dont la classe dans $H^*(M, d_X)$ ne dépend pas de la connexion G-invariante α choisie. On note cette classe $\Phi(X, P)$. On peut encore definir $\Phi(X, P)$ lorsque Φ est un germe de fonction analytique en 0 sur $\mathfrak{h}$: si Φ est entière, $\Phi(X, P)$ est une forme sur M, dont les coefficients dépendent analytiquement de X; si le rayon de convergence de Φ est fini, on peut définir $\Phi(X, P)$ sur tout ouvert relativement compact de M, pour X assez petit. Si on note $\hat{I}(\mathfrak{h})$ l'algèbre des fonctions entières H-invariantes sur $\mathfrak{h}$, l'application $\Phi \mapsto \Phi(X, P)$ est un homomorphisme d'algèbres de $\hat{I}(\mathfrak{h})$ dans $H^*(M, d_X)$.

1.9. Fibré trivial. Supposons que P soit le fibré trivial $M \times H$, l'action de G étant donnée par $g(m, h) = \left(gm, \gamma(g)h\right)$, pour un homomorphisme γ de G dans H. Notons aussi γ l'homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ qui s'en déduit. Soit α la connexion (plate) sur P image réciproque de la forme de Maurer–Cartan sur H. Alors α est G-invariante et on vérifie immédiatement que $\Phi(X, \alpha)$ est la fonction constante sur M égale à $\Phi\left(\gamma(X)\right)$.

1.10. Homomorphisme de fibrés. Un homomorphisme $H \to H'$ de groupes de Lie définit de manière naturelle un homomorphisme du fibré P dans le fibré principal $P' = P \times_H H'$ de fibre H'. L'action de G sur P se transporte naturellement à P'. Si P' admet une connexion G-invariante, on identifie, par abus de notation, les formes associées (1-forme de connexion, courbure, moment, etc.) et les formes sur P qui sont leurs images réciproques par l'homomorphisme $P \to P'$.

1.11. Fibrés vectoriels. Soient V un espace vectoriel, réel ou complexe, et $\mathscr{V} \to M$ un fibré vectoriel de fibre-type V. Le fibré principal associé a pour fibre $H = \mathrm{GL}(V)$. Si G agit sur $\mathscr{V}$ en préservant une connexion linéaire, à toute fonction Φ H-invariante sur $\mathfrak{h} = gl(V)$ est associée par 1.8 une classe $\Phi(X, \mathscr{V}) \in H^*(M, d_X)$. En particulier, on notera $\mathrm{Ch}(X, \mathscr{V})$ (*caractère de Chern*) la classe associée à la fonction $A \mapsto \mathrm{tr}\, e^A$.

Soit $Q(z) = \sum a_n z^n$ une fonction analytique d'une variable z. Pour tout espace vectoriel V, la fonction $A \mapsto \det Q(A)$ sur $gl(V)$ est invariante. Soient $\mathscr{V}_i \to M$ $(i = 1, 2)$ deux fibrés G-équivariants et admettant des connexions G-invariantes. Soit $\mathscr{V}_1 \oplus \mathscr{V}_2$ leur somme de Whitney. Il est clair qu'on a:

1.12. Lemme.

$$\det Q(X, \mathscr{V}_1 \oplus \mathscr{V}_2) = \det Q(X, \mathscr{V}_1) \det Q(X, \mathscr{V}_2).$$

1.13. La fonction $j(z) = (e^{z/2} - e^{-z/2})/z$ et sa racine carrée $j^{1/2}$ définie (au voisinage de $z = 0$) par $j^{1/2}(0) = 1$ apparaissent dans la formule du caractère et de l'indice de l'opérateur de Dirac. On pose

$$\mathscr{J}^{1/2}(X, \mathscr{V}) = \det j^{1/2}(X, \mathscr{V}),$$
$$\mathscr{J}^{-1/2}(X, \mathscr{V}) = \det j^{-1/2}(X, \mathscr{V}).$$

Sur les algèbres de Lie $so(n) \subset gl(n)$ et $sp(n) \subset gl(n)$ la fonction $A \mapsto \det j(A)$ admet une racine carrée analytique entière. Si donc $\mathscr{V}$ est associé à un fibré principal G-équivariant de fibre $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{Sp}(n)$ et admettant une connexion G-invariante, la forme $\mathscr{J}^{1/2}(X, \mathscr{V})$ est définie sur M toute entière et dépend analytiquement de X.

1.14. Notons $\mathrm{DL}(n, C)$ le groupe $\mathrm{GL}(n, C)/\pm 1$. Un fibré principal $\mathscr{W}$ de groupe $\mathrm{DL}(n, C)$ sera appelé *pseudo-fibré vectoriel*. Si $\mathscr{W}$ est G-équivariant et admet une connexion G-invariante, on peut encore définir le caractère de Chern $\mathrm{Ch}(X, \mathscr{W})$.

Nous pouvons maintenant énoncer la formule pour l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac obtenue dans [6].

Soient M une variété riemanienne compacte orientée de dimension $2l$ et G un groupe connexe d'isométries de M préservant l'orientation. Soit $\mathscr{V} = \mathscr{V}^0 \oplus \mathscr{V}^1$ un fibré gradué de Clifford [2], G-équivariant, sur M. Pour chaque $m \in M$, la fibre $\mathscr{V}_m$ est donc un module gradué pour l'algèbre de Clifford $C(T_m M)$. Notons S_m^+ (resp. S_m^-) l'espace des spineurs pairs (resp.

impairs). Pour chaque $m \in M$, on a des décompositions

$$V_m^0 = S_m^+ \otimes W_m \quad \text{et} \quad V_m^1 = S_m^- \otimes W_m.$$

Les espaces $W_m/\pm 1$ définissent un pseudo-fibré vectoriel G-équivariant $\mathscr{W}$ [6].

Soit $D_{\mathscr{V}}^0 : \Gamma(\mathscr{V}^0) \to \Gamma(\mathscr{V}^1)$ l'opérateur de Dirac associé au module de Clifford $\mathscr{V}$, défini à l'aide d'une connexion G-invariante. Alors $\operatorname{Ker} D_{\mathscr{V}}^0$ et Coker $D_{\mathscr{V}}^0$ sont des G-modules de dimension finie et on a:

1.15. Théorème. *Si $X \in \mathfrak{g}$ est suffisamment petit,*

$$\operatorname{tr}_{\operatorname{Ker} D_{\mathscr{V}}^0}(\exp X) - \operatorname{tr}_{\operatorname{Coker} D_{\mathscr{V}}^0}(\exp X) = \int_M \operatorname{Ch}(X, \mathscr{W}) \mathscr{J}^{-1/2}(X, TM).$$

1.16. Fibrés homogènes. On suppose désormais que M est un espace homogène G/H. Une connexion G-invariante sur le fibré principal $G \to G/H$ est définie par une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est un supplémentaire H-invariant de $\mathfrak{h}$.

1.17. Soit τ une représentation de H dans un espace vectoriel de dimension finie V_τ. Une connexion linéaire G-invariante sur le fibré vectoriel $G \times_H V_\tau$ est une connexion sur le fibré principal $G \times_H \operatorname{GL}(V_\tau)$, image du fibré principal $G \to M$ par l'homomorphisme $H \to \operatorname{GL}(V_\tau)$. La 1-forme sur G à valeurs dans $gl(V_\tau)$ qui correspond à cette connexion (conventions de 1.10) est définie par une application linéaire $\tilde{\tau} : T_e G = \mathfrak{g} \to gl(V_\tau)$ qui vérifie:

1.18.
$$\begin{aligned} \tilde{\tau}|_{\mathfrak{h}} &= \tau, \\ \tilde{\tau}(\operatorname{ad} h \cdot X) &= \tau(h) \tilde{\tau}(X) \tau(h)^{-1} \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g},\ h \in H. \end{aligned}$$

Si le fibré principal $G \to G/H$ admet une connexion G-invariante, on obtient une telle application $\tilde{\tau}$ en posant $\tilde{\tau}|_{\mathfrak{m}} = 0$.

Toujours avec les conventions de 1.10, le moment de $X \in \mathfrak{g}$ et la courbure de la connexion $\tilde{\tau}$ sont les formes différentielles sur G données par:

1.19.
$$J_X(g) = \tilde{\tau}(\operatorname{ad} g^{-1} \cdot X) \quad \text{pour } g \in G.$$

1.20. Ω est G-invariante par les translations à gauche et

$$\Omega(Y, Z) = [\tilde{\tau}(Y), \tilde{\tau}(Z)] - \tilde{\tau}[Y, Z] \quad \text{pour } Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

1.21. L'étude des orbites admissibles de la représentation coadjointe demande de considérer le cas où τ est une représentation non pas du groupe H lui-même, mais d'un revêtement à deux feuillets $\tilde{H}$, telle que $\tau(\tilde{e})$ soit égal à ± 1 pour tout élément $\tilde{e} \in \tilde{H}$ qui se projette sur l'élément neutre de H. Alors τ définit un homomorphisme de H dans le quotient $\mathrm{GL}(V_\tau)/(\pm 1)$ de $\mathrm{GL}(V_\tau)$. Une application $\tilde{\tau}\colon \mathfrak{g} \to gl(V_\tau)$ qui vérifie les conditions 1.18, avec $\tilde{H}$ à la place de H, définit une connexion G-invariante sur le fibré principal $G \times_H \big(\mathrm{GL}(V_\tau)/(\pm 1)\big)$. À toute fonction $\Phi \in \hat{I}\big(gl(V_\tau)\big)$ est donc associée, pour $X \in \mathfrak{g}$, une classe dans $H^*(M, d_X)$ notée $\Phi(X, \tau)$. Cette classe provient de la forme $\Phi\big(J_X - (\Omega/2i\pi)\big)$ sur G, où J_X et Ω sont données par 1.19 et 1.20.

2. Classes caractéristiques pour les orbites de la représentation coadjointe et formule du caractère

2.1. Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite de la représentation coadjointe de G. On munit $\mathcal{O}$ de sa structure symplectique canonique σ. Soit $f \in \mathcal{O}$. Grâce à l'homomorphisme $G(f) \to \mathrm{Sp}\big(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)\big) \hookrightarrow \mathrm{SL}\big(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)\big)$, le revêtement à 2 feuillets $\widetilde{\mathrm{SL}}\big(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)\big) \to \mathrm{SL}\big(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)\big)$ induit un revêtement à 2 feuillets $\tilde{G}(f) \to G(f)$, qui coïncide avec le revêtement défini par M. Duflo [11]. On définit, en suivant [11], l'ensemble $\mathscr{X}(f)$ des [classes de] représentations unitaires irréductibles τ de $\tilde{G}(f)$ telles que $\tau(\exp X) = e^{i\langle f, X\rangle}\,\mathrm{Id}_{V_\tau}$ pour $X \in \mathfrak{g}(f)$ et $\tau(\varepsilon) = -\mathrm{Id}_{V_\tau}$, en notant ε l'élément non neutre de $\tilde{G}(f)$ au-dessus de l'élément neutre de $G(f)$. L'orbite est dite *admissible* lorsque l'ensemble $\mathscr{X}(f)$ n'est pas vide. Si G est algébrique, $\mathscr{X}(f)$ consiste en un nombre fini de représentations de dimension finie. Plaçons-nous dans ce cas. Notons $P_\tau = G \times_{G(f)} \big(\mathrm{GL}(V_\tau)/(\pm 1)\big)$ le fibré principal défini par $\tau \in \mathscr{X}(f)$.

2.2. Rappelons que P_τ admet une connexion G-invariante canonique, introduite par B. Kostant [17], obtenue en posant $\tilde{\tau}(X) = i\langle f, X\rangle\,\mathrm{Id}_{V_\tau}$ pour $X \in \mathfrak{g}$ (notations de 1.18). Comme ad $g \cdot f = f$ si $g \in G(f)$, la courbure Ω et le moment J_X de cette connexion sont en fait déjà des formes sur $\mathcal{O} = G/G(f)$, données par

$$J_X(l) = i\langle l, X\rangle\,\mathrm{Id}_{V_\tau} \quad \text{pour } l \in \mathcal{O}, \text{[1]}$$

$$\Omega = -i\sigma\,\mathrm{Id}_{V_\tau}.$$

[1] Le moment de X relativement à cette connexion diffère donc par un facteur $-i$ du moment défini en 1.7 relativement à l'action hamiltonienne de G sur $\mathcal{O}$.

Le caractère de Chern du fibré P_τ est donc la forme sur $\mathcal{O}$ donnée par

2.3. $$\mathrm{Ch}(X, \tau) = \mathrm{tr}(e^{J_X - \Omega/2i\pi}) = \dim V_\tau e^{i\langle l, X\rangle} e^{\sigma/2\pi}.$$

On voit donc apparaître le premier terme de la formule (2) de l'introduction. Pour donner un sens au terme $\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O})$, nous allons faire momentanément l'hypothèse suivante.

2.4. Le fibré $G \to \mathcal{O} = G/G(f)$ admet une connexion G-invariante, donnée par une décomposition $G(f)$-invariante $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(f) \oplus \mathfrak{m}$.

Considérons la suite exacte de $G(f)$-modules:

$$0 \to (\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}) \cdot f \to \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}(f)^* \to 0.$$

La suite exacte de fibrés vectoriels associée définit le fibré normal $N\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}^*$:

$$0 \to T\mathcal{O} \to \mathcal{O} \times \mathfrak{g}^* \to N\mathcal{O} \to 0.$$

L'action de G sur $\mathcal{O} \times \mathfrak{g}^*$ est donnée par $g(l, l') = (\mathrm{ad}^* g \cdot l, \mathrm{ad}^* g \cdot l')$. La forme $\mathcal{J}^{-1/2}(X, \mathcal{O} \times \mathfrak{g}^*)$ est donc la fonction constante sur $\mathcal{O}$ donnée par:

$$\det_{\mathfrak{g}^*}\left(\frac{e^{\mathrm{ad}^* X/2} - e^{-\mathrm{ad}^* X/2}}{\mathrm{ad}^* X}\right)^{-1/2} = j^{-1/2}(X).$$

Grâce à l'hypothèse 2.4 on a, en utilisant 1.12:

2.5. $$j^{1/2}(X) = \mathcal{J}^{1/2}(X, T\mathcal{O}) \mathcal{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O}).$$

Si $f \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathfrak{g}(f)$, i.e. si f est un zéro de X^*, on a

$$\mathcal{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O})^{[0]}(f) = \det_{\mathfrak{g}(f)}\left(\frac{e^{\mathrm{ad} X/2} - e^{-\mathrm{ad} X/2}}{\mathrm{ad} X}\right)^{1/2}.$$

2.6. Considérons le cas d'une orbite de dimension maximale $2d$. Alors $\mathfrak{g}(f)$ est commutative [12]. Il en résulte, d'après 1.17, que le fibré normal $N\mathcal{O} = G \times_{G(f)} \mathfrak{g}(f)^*$ admet une connexion G-invariante plate, et on a $\mathcal{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O}) = 1$.

Dans ce cas, sous l'hypothèse 2.4, la forme $\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O})$ se réduit donc à la fonction constante $j^{-1/2}(X)$.

La formule de Kirillov:

$$\mathrm{tr}\, T(\exp X) j(X)^{1/2} = \dim \tau \int_{\mathcal{O}} e^{i\langle \cdot, X\rangle} \beta_{\mathcal{O}},$$

où

$$\beta_{\mathcal{O}} = \frac{\sigma^d}{(2\pi)^d d!},$$

s'écrit donc aussi en termes de formes G-équivariantes:

$$\operatorname{tr} T(\exp X) = \int_{\mathcal{O}} \operatorname{Ch}(X, \tau)\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O}).$$

Ce qui précède nous conduit à proposer une généralisation de la conjecture de Kirillov (sous l'hypothèse 2.4). Nous la proposons sous deux formes:

2.7. Conjecture. *Soit $\mathcal{O}$ une orbite admissible, fermée, de G dans $\mathfrak{g}^*$, $\tau \in \mathscr{X}(f)$. Il existe une représentation unitaire irréductible $T_{f,\tau}$ de G telle que:*

$$\operatorname{tr} T_{f,\tau}(\exp X) = \int_{\mathcal{O}} \operatorname{Ch}(X, \tau)\mathcal{J}^{-1/2}(X, T\mathcal{O}) \tag{C.1}$$

ou plutôt

$$\operatorname{tr} T_{f,\tau}(\exp X) j^{1/2}(X) = \int_{\mathcal{O}} \operatorname{Ch}(X, \tau)\mathcal{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O}). \tag{C.2}$$

Indiquons maintenant des situations où cette formule est justifiée.

2.8. Tout d'abord si $\mathcal{O}$ est fermée de dimension maximale, (C.2) est la formule de Kirillov, et sa validité a été établie dans [15] par Khalgui pour les représentations $T_{f,\tau}$ de Duflo.

2.9. Si $\mathcal{O} = \{0\}$, on a $\mathcal{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O}) = j(X)^{1/2}$ et la formule (C.2) est donc vérifiée si on associe à l'orbite $\{0\}$ la représentation triviale.

2.10. Si $\mathfrak{g}(f)$ est réductive, l'hypothèse 2.4 est satisfaite et la forme $\mathcal{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O})$ est définie sur $\mathcal{O}$ toute entière et dépend analytiquement de $X \in \mathfrak{g}$. Malheureusement, nous ne pouvons assurer que l'expression

$$\int_{\mathcal{O}} \operatorname{Ch}(X, \tau)\mathcal{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O})$$

définisse une fonction généralisée sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$.

Cependant, supposons que le sous-groupe à un paramètre $\mathrm{ad}(\exp tX)$ soit relativement compact dans $\mathrm{ad}\,G$, et que le champ de vecteurs $X^*_{\mathcal{O}}$ n'ait qu'un nombre fini de zéros. Soient $f \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathfrak{g}(f)$. Soit W_f un sous-espace de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))_C$, stable par $\exp tX$, totalement isotrope positif pour la 2-forme canonique. La formule de localisation 1.4 s'écrit alors formellement:

$$\int_{\mathcal{O}} \mathrm{Ch}(X, \tau)\mathscr{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O})j(X)^{-1/2}$$

$$= \sum_{f \in \{\text{zéros de} X^*_{\mathcal{O}}\}} \dim V_\tau \frac{e^{i\langle f, X\rangle}}{\det_{W_f}(e^{\mathrm{ad}X/2} - e^{-\mathrm{ad}X/2})}\,.$$

Supposons que G soit semi-simple, et soit λ un élément elliptique (non nécessairement régulier) de $\mathfrak{g}^*$. Associons à l'orbite $G\cdot\lambda$ la représentation T_λ de Zuckerman. (Il n'est pas démontré que T_λ soit unitarisable). Alors la formule du caractère [22] pour T_λ coïncide sur l'ouvert des éléments elliptiques réguliers de $\mathfrak{g}$ avec l'expression précédente.

En particulier, lorsque G est compact connexe, notre conjecture est bien vérifiée: si $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan telle que $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, la représentation T_λ associée au fibré de Clifford canonique sur l'orbite $G\cdot\lambda$ a pour poids extrême $i\lambda - \varrho_\lambda$, où ϱ_λ est la demi-somme des racines de $\mathfrak{t}_C$ dans $\mathfrak{g}_C$ telles que $\langle i\lambda, \alpha\rangle > 0$, et la formule (0.2) coïncide avec la formule du théorème 2.8.

2.11. Si le fibré normal n'admet pas de connexion G-invariante, le terme $\mathscr{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O})$ n'est même pas défini. Il est vraisemblable qu'on peut améliorer la conjecture (0.2) en cherchant, en guise de $\mathscr{J}^{1/2}(X, N\mathcal{O})$, une fonction analytique G-invariante $X \to J^\#(X)$, à valeurs dans l'espace des formes différentielles sur $\mathcal{O}$, qui vérifie:

(a) $J^\#(X) \in Z(M, d_X)$,

(b) $[J^\#(X)]^{[0]}(f) = \left[\det_{\mathfrak{g}(f)} \frac{e^{\mathrm{ad}X/2} - e^{-\mathrm{ad}X/2}}{\mathrm{ad}X}\right]^{1/2}$ pour $f \in \mathcal{O}$, $X \in \mathfrak{g}(f)$.

Si G est compact, d'après la proposition 1.3, ces conditions déterminent la classe de $J^\#(X)$ dans $H^*(M, d_X)$ pour les éléments X dont les zéros sont isolés.

S'il existe une fonction G-invariante $j_{\mathcal{O}}$ sur $\mathfrak{g}$ telle que

$$j_{\mathcal{O}}(X) = \det_{\mathfrak{g}(f)}\left(\frac{e^{\mathrm{ad}X/2} - e^{-\mathrm{ad}X/2}}{\mathrm{ad}X}\right) \quad \text{pour } f \in \mathcal{O},\ X \in \mathfrak{g}(f),$$

un choix naturel pour $J^{\#}(X)$ sera la forme de degré 0, égale à la constante $j_{\mathcal{O}}(X)^{1/2}$. La formule des caractères obtenue est alors celle de Duflo [10]. Dans le cas contraire, $J^{\#}(X)$ devra nécessairement comporter des termes de degré supérieur.

2.12. Revenons enfin à notre motivation initiale. Soit $\mathcal{O}$ une orbite de dimension maximale de la représentation coadjointe. Supposons que $\mathcal{O}$ admette une structure riemannienne G-invariante. Il existe donc une forme euclidienne Q sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ invariante par $G(f)$. Le revêtement $\tilde{G}(f)$ de $G(f)$ (2.1) est aussi défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}(f) & \to & \mathrm{Spin}(Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(f) & \to & \mathrm{SO}(Q). \end{array}$$

Soit $\varrho = \varrho^{+} \oplus \varrho^{-}$ la représentation de $\mathrm{Spin}(Q)$ dans l'espace des spineurs. Soit $\tau \in \mathscr{X}(f)$; les représentations $\tau \otimes \varrho^{\pm}$ sont alors des représentations de $G(f)$. On peut définir le module de Clifford

$$\mathscr{V}_{\tau} = G \times_{G(f)} (\tau \otimes \varrho)$$

(un tel module de Clifford sera dit *admissible*).

Le fibré $\mathscr{V}_{\tau}$ est muni d'une connexion G-invariante déduite de la connexion de Kostant et de la connexion de Levi-Cività. On peut alors définir l'opérateur de Dirac

$$D_{\tau}^{\pm}\colon \Gamma(\mathscr{V}_{\tau}^{\pm}) \to \Gamma(\mathscr{V}_{\tau}^{\mp}).$$

Notons $\operatorname{Ker} D_{\tau}^{\pm}$ le noyau L^2 de $D_{\tau}^{\pm}$. La représentation de G dans $\operatorname{Ker} D_{\tau}^{\pm}$ est une somme finie de représentations de la série discrète ([21], [18], [9]). De plus, si G est nilpotent ou semi-simple, [9] montre que la représentation $\operatorname{Ker} D_{\tau}^{+} - \operatorname{Ker} D_{\tau}^{-}$ coïncide avec la représentation irréductible $T_{f,\tau}$ dont le caractère est donné par la formule de Kirillov ([20], voir aussi [4]).

Dans ce cas, la "formule universelle" donne donc une formule intégrale pour la fonction de Lefschetz

$$X \mapsto \operatorname{tr}_{\operatorname{Ker} D_{\tau}^{+}}(\exp X) - \operatorname{tr}_{\operatorname{Ker} D_{\tau}^{-}}(\exp X)$$

au sens fonctions généralisées.

Soit $\mathscr{V}_{\tau}$ un module de Clifford admissible sur un espace homogène $M = G/H$ tel que H soit compact. A. Connes et H. Moscovici ont obtenu pour l'indice L^2 de l'opérateur de Dirac D_τ une formule utilisant la classe $\mathrm{Ch}(\tau)\mathscr{J}^{-1/2}(TM)$ [9]. Nous pensons que le théorème 1.15 est encore valable dans ce cas pour exprimer la fonction de Lefschetz de l'opérateur D_τ.

Bibliographie

[1] Atiyah M. and Bott R., The Moment Map and Equivariant Cohomology, *Topology* **23** (1984), pp. 1–28.

[2] Atiyah M., Bott R., and Shapiro A., Clifford Modules, *Topology* **3**, Suppl. 1 (1964). pp. 3–38.

[3] Berline N. et Vergne M., Classes caractéristiques équivariantes, formule de localisation en cohomologie équivariante, *C. R. Acad. Sci. Paris* **295** (1982), pp. 539–541.

[4] Berline N. et Vergne M., Fourier Transforms of Orbits of the Coadjoint Representation. In: *Representation Theory of Reductive Groups, Proceedings of the University of Utah Conference 1982*, Progress in Mathematics, 40, Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 53–67.

[5] Berline N. et Vergne M., Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes, *Duke Math. J.* **50** (1983), pp. 539–549.

[6] Berline N. et Vergne M., The Equivariant Index and Kirillov's Character Formula, *Amer. J. Math.*, to appear.

[7] Bott R., Vector Fields and Characteristic Numbers, *Michigan Math. J.* **14** (1967), pp. 231–244.

[8] Bott R., A Residue Formula for Holomorphic Vector Fields, *J. Diff. Geometry* **4** (1967), pp. 311–332.

[9] Connes A. et Moscovici H., The L^2-Index Theorem for Homogeneous Spaces of Lie Groups, *Ann. of Math.* **115** (1982), pp. 291–330.

[10] Duflo M., Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1980), pp. 23–74.

[11] Duflo M., *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, C.I.M.E. II ciclo 1980, Liguori editore, Napoli, 1982.

[12] Duflo M. et Vergne M., Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris* **268** (1969), pp. 583–585.

[13] Duistermaat J. and Heckman G., On the Variation of the Cohomology of the Symplectic Form on the Reduced Phase Space, *Invent. Math.* **69** (1982), pp. 259–268; addendum **72** (1983), pp. 153–158.

[14] Khalgui M. S., Sur les caractères des groupes de Lie à radical cocompact, *Bull. Soc. Math. France* **109** (1981), pp. 331–372.

[15] Khalgui M. S., Caractères des groupes de Lie, *J. Funct. Anal.* **47** (1982), pp. 64–77.

[16] Kirillov A. A., Characters of Unitary Representations of Lie Groups, *Funct. Anal. Appl.* **2** (2) (1967), pp. 40–55.

[17] Kostant B., Quantization and Unitary Representations. In: *Modern Analysis and Applications*, Lecture Notes in Math., 170, Springer, 1970, pp. 87–207.

[18] Parthasarathy R., Dirac Operator and the Discrete Series, *Ann. of Math.* **96** (1972), pp. 1–30.

[19] Quillen D., Spectrum of a Cohomology Ring I, II, *Ann. of Math.* **94** (1971), pp. 549–602.

[20] Rossmann W., Kirillov's Character Formula for Reductive Groups, *Invent. Math.* **48** (1973), pp. 207–220.
[21] Schmid W., On a Conjecture of Langlands, *Ann. of Math.* **93** (1971), pp. 1–42.
[22] Vogan D. and Zuckerman G., *Unitary Representations with Non Zero Cohomology*, preprint, 1982.
[23] Witten E., *Supersymmetry and Morse Theory*, preprint, Princeton University, 1982.

UNIVERSITÉ DE RENNES I, U.E.R. MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE, BÂTIMENT DU 1er CYCLE, AVENUE DU GÉNÉRAL LECLERC, RENNES BEAULIEU, 35042 RENNES CÉDEX, FRANCE