

PIERRE HUMBERT

SERGE COLOMBO

**Le calcul symbolique et ses applications à la  
physique mathématique**

*Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule 158 (1965)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1965\\_\\_158\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1965__158__1_0)

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BSM 2463

Pierre HUMBERT † et Serge COLOMBO

---

LE CALCUL SYMBOLIQUE  
ET SES APPLICATIONS  
A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

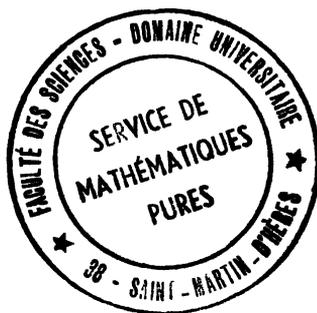
---

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLVIII

2<sup>e</sup> Édition revue et augmentée



PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C<sup>o</sup>, ÉDITEUR-IMPRIMEUR

55, Quai des Grands-Augustins

1965

© Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, 1965.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés  
y compris la photographie et le microfilm réservés pour tous pays.

---

## AVANT-PROPOS

---

Lorsque Pierre Humbert et moi entreprîmes la rédaction d'un fascicule sur le Calcul symbolique, nous nous fixions un but modeste : justifier vis-à-vis des lecteurs mathématiciens l'intérêt suscité récemment chez les électriciens par une méthode de calcul ancienne et basée sur la transformation fonctionnelle de Laplace.

La Maison Gauthier-Villars me faisant l'honneur de me proposer une seconde édition de ce fascicule, aujourd'hui épuisé, j'ai cru nécessaire d'insister davantage, dans cette nouvelle rédaction, sur l'application du Calcul symbolique à l'étude des fonctions spéciales. J'ai pensé rester ainsi fidèle à la mémoire de mon Maître et Ami, hélas ! trop tôt disparu ; car c'était là son sujet de prédilection, et il y avait apporté d'importantes contributions.

Dans les limites ici fixées j'ai dû me limiter à des exemples assez simples ; je veux espérer qu'ils suffiront à persuader le lecteur de l'efficacité de la méthode. De plus, j'aurais aimé donner à mon exposé une tournure plus conforme aux notations et aux langages modernes, traiter entre autres, de la notion de distribution. Mais cela exigeait un remaniement total, impossible à cause du temps limité dont je disposais. D'ailleurs, des exposés destinés aux analystes et se situant à un niveau élevé sont aujourd'hui suffisamment nombreux et je ne vise qu'à m'adresser utilement à un public qui, tout en ayant surtout en vue les applications, ne se résigne pas au genre d'Ouvrages par trop élémentaires et utilitaires qui ont proliféré ces dernières années dans ce domaine.

Je remercie vivement M. le Professeur Villat de ses bienveillants encouragements et la Maison Gauthier-Villars pour le soin apporté à cette nouvelle édition.

S. C.

Faculté des Sciences de Saïgon,  
Mai 1963.



---

# LE CALCUL SYMBOLIQUE

ET SES

## APPLICATIONS A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Par MM. Pierre HUMBERT et Serge COLOMBO.

---

### INTRODUCTION.

**Aperçu historique.** — *La méthode opérationnelle* de résolution d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles consiste à assimiler les symboles de dérivation  $\frac{d}{dt}$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  par rapport à une variable  $t$  à des quantités algébriques; on écrit  $py$  au lieu de  $\frac{dy}{dt}$ ,  $p^n y$  au lieu de  $\frac{d^n y}{dt^n}$ , et l'on se trouve ainsi amené à exprimer l'inconnue  $y(t)$  sous la forme

$$y(t) = \varphi(p) f(t).$$

La détermination de  $y(t)$  s'effectue ensuite en développant l'opérateur  $\varphi(p)$  suivant les puissances négatives (en général entières) de  $p$ , et en convenant que

$$p^{-1} f(t) = \int_a^t f(u) du,$$
$$p^{-m} f(t) = \int_a^t du_m \dots \int_a^{u_2} du_2 \int_a^{u_1} f(u_1) du_1.$$

Ces expressions dépendent évidemment de la valeur choisie pour la limite inférieure d'intégration  $a$ ; enfin, on convient le plus souvent du choix  $a = 0$  et l'on a

$$p^{-m} f(t) = \int_0^t du_m \dots \int_0^{u_m} du_2 \int_0^{u_2} f(u_1) du_1 = \int_0^t \frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} f(u) du.$$

Les puissances entières, positives ou négatives de l'opérateur  $p$  obéissent évidemment aux lois algébriques ordinaires relatives aux exposants

$$p^m p^n = p^{m+n}, \quad (p^n)^m = p^{nm},$$

avec toutefois la restriction

$$p \cdot p^{-1} f(t) = f(t), \quad p^{-1} \cdot p f(t) = f(t) - f(0).$$

De tels procédés de calcul furent utilisés systématiquement par Euler, auquel on doit les formules opérationnelles

$$e^{ap} f(t) = f(t + a), \\ \varphi(p) e^{at} f(t) = e^{at} \varphi(p + a) f(t).$$

On retrouve ces procédés chez Lagrange, Boole, Liouville et plusieurs analystes de la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. L'ingénieur télégraphiste Oliver Heaviside (1850-1925) les utilisa de façon intensive pour résoudre les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles auxquelles le conduisaient ses études sur les régimes transitoires [1]. A la suite de considérations basées sur des calculs purement formels, Heaviside adopta une définition de  $p^m f(t)$  pour  $m$  non entier, définition qu'il aurait dû rattacher aux travaux antérieurs de Liouville et de Riemann sur les dérivées d'ordre fractionnaire [2], mais qu'il semble avoir ignorés.

Les méthodes opérationnelles, souvent dépourvues de justifications rigoureuses, ne furent généralement pas prises au sérieux par les mathématiciens. Cependant, les physiciens s'attachèrent de plus en plus par la suite à la notion d'opérateur et les résultats analytiquement remarquables atteints par eux en suivant des voies empiriques incitèrent plusieurs théoriciens (parmi lesquels il faut citer plus particulièrement Bromwich [3], Giorgi [4], Bateman [5], Paul Lévy [6], Wagner [7]) à justifier et développer ces méthodes. Leurs recherches donnèrent naissance au *Calcul opérationnel* ou *symbolique* dont E. T. Whittaker a pu dire qu'il constituait un des plus importants progrès mathématiques du dernier quart du XIX<sup>e</sup> siècle [8].

Bromwich, en Physique mathématique, Wagner, en Électro-technique, assimilèrent les méthodes opérationnelles à des procédés de calcul parfaitement valables en les rattachant à des intégrations effectuées dans le plan de Cauchy. A la relation opérationnelle

$$\varphi(p) U(t) = y(t)$$

dans laquelle  $U(t)$  désigne l'échelon-unité [ $U(t) = 0$  pour  $t < 0$ ,  $U(t) = 1$  pour  $t > 0$ ], il est en effet possible de faire correspondre la relation intégrale

$$(1) \quad y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{t p} p^{-1} \varphi(p) dp,$$

l'intégration étant effectuée le long d'un contour convenable appelé *contour de Bromwich-Wagner*. D'autre part, J. R. Carson [9] a pu confirmer les résultats obtenus par Heaviside et relatifs aux phénomènes transitoires sur les lignes de transmission en remarquant que les fonctions  $\varphi(p)$  et  $y(t)$  sont reliées par la relation

$$(1') \quad \varphi(p) = \int_0^{\infty} p e^{-p t} y(t) dt.$$

En fait, (1) et (1') expriment un théorème d'inversion connu sous le nom de *théorème de Mellin*, théorème dû en réalité à Riemann [10].

Les méthodes opérationnelles se trouvaient dès lors identifiées avec un procédé de calcul familier aux mathématiciens, celui de la résolution d'une équation différentielle linéaire et homogène

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = 0,$$

dont on suppose que la solution est susceptible d'être mise sous la forme

$$(3) \quad y(x) = \int e^{-xz} Y(z) dz,$$

l'intégrale étant prise suivant un contour convenable du plan de la variable  $z$ . Cette méthode, déjà développée par Poincaré [11], est particulièrement adaptée au cas où les coefficients  $a_k(x)$  sont des polynômes; car alors, si  $m$  désigne le degré le plus élevé de tous ces polynômes,  $Y(z)$  satisfait à une équation d'ordre  $m$

$$\sum_{k=0}^m A_k(z) Y^{(k)}(z),$$

où les coefficients  $A_k(z)$  sont des polynomes de degré  $n$ . Et le cas  $m = 1$  correspond aux définitions de bon nombre de transcendentes intervenant en mathématiques appliquées; l'étude de ces transcendentes est ainsi simplifiée.

Plus généralement, on suppose la solution de (2) susceptible d'être mise sous la forme

$$y(x) = \int K(x, z) Y(z) dz$$

et l'on cherche ensuite à adapter le *noyau*  $K(x, z)$  au type d'équation différentielle à résoudre; en d'autres termes, on choisit  $K(x, z)$  de façon que  $Y(z)$  satisfasse à quelque équation différentielle plus facile à résoudre que (2). Le contour d'intégration dépend des conditions initiales adoptées [11].

**Les transformations fonctionnelles intégrales.** — Les considérations précédentes rattachent en définitive les procédés opérationnels aux théorèmes généraux relatifs aux transformations fonctionnelles intégrales linéaires du type

$$(4) \quad \mathfrak{T}\{F(z)\} = \int_C K(x, z) F(z) dz = f(x)$$

et, plus particulièrement, à la *transformation de Laplace*

$$(5) \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_C e^{-pt} f(t) dt.$$

Diverses recherches ont confirmé l'aide précieuse apportée par l'utilisation des transformations fonctionnelles intégrales lors de l'intégration des équations aux dérivées partielles avec certains types de conditions aux frontières [12].

Un cas particulier important de la transformation de Laplace est celui où le contour  $C$  est le demi-axe réel positif

$$(6) \quad \Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Pour des motifs historiques, il nous paraîtrait indiqué de désigner cette dernière transformée sous le nom de *transformée de Laplace-Abel*, dissipant ainsi toute confusion avec la définition générale (5). On dit aussi parfois que  $\Phi(p)$  est la *transformée de Laplace unilatérale*, tandis que

$$(7) \quad F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

est appelée transformée de Laplace *bilatérale*. Des notations fréquemment utilisées sont

$$\Phi(p) = \mathcal{L}_I \{ f(t) \}, \quad F(p) = \mathcal{L}_{II} \{ f(t) \}.$$

En fait, dans le présent exposé, nous utiliserons la *transformée de Laplace-Carson*, définie par la relation

$$(8) \quad \varphi(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt;$$

elle ne diffère de celle de Laplace-Abel que par la présence du facteur  $p$  devant l'intégrale.

Les raisons qui motivent l'adoption de ce facteur méritent peut-être d'être rappelées, car elles semblent avoir été mal comprises par plusieurs auteurs. Contrairement à ce qui a été trop souvent avancé, l'adoption de ce facteur n'est nullement suscitée par le souci péril d'harmoniser les formules obtenues à partir de la transformation intégrale avec les formules opérationnelles figurant dans les calculs d'Heaviside. Ainsi, par exemple, on a, d'une part

$$p^{-n} U(t) = \frac{t^n}{n!}$$

et, d'autre part,

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{t^n}{n!} dt = p^{-n}.$$

Or, si ce souci de symétrisation a pu exister chez ceux qui, comme Bromwich, Wagner, Carson, apportèrent les premières justifications mathématiques sérieuses, il ne constitue pas, tant s'en faut, la principale raison de la préférence donnée par plusieurs mathématiciens à l'intégrale de Carson. En effet, sur un plan théorique, il y a toujours intérêt à n'imposer à la fonction  $f(t)$  qu'un minimum de conditions restrictives. Et c'est pourquoi il apparaît préférable de définir sa transformée par la relation

$$\varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} df(t),$$

c'est-à-dire par une intégrale de Stieltjés [13]. Lorsque  $f(t)$  est dérivable pour  $t \geq 0$  et si  $f(0) = 0$  (ce qui est le cas dans beaucoup de problèmes), la transformée ainsi définie coïncide avec celle de Carson. Comme l'a fait remarquer Jeffreys [14], personne n'a pu jusqu'ici expliquer pourquoi la définition basée sur l'intégrale de

Carson serait moins simple que l'autre basée sur l'intégrale de Laplace-Abel (').

Parmi les autres transformations fonctionnelles intégrales les plus fréquemment rencontrées en analyse mathématique appliquée, nous citerons :

a. La transformation de Mellin [11 c]

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx = \mathfrak{M} \{ f(x) \},$$

directement reliée à la transformation de Laplace bilatérale; en effet, on vérifie immédiatement qu'on doit avoir

$$\mathfrak{M} \{ f(x) \} = \mathcal{L}_{11} \{ f(e^{-t}) \}.$$

Elle est utile pour la détermination des noyaux de Fourier  $K(xs)$  tels que

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} K(xs) f(x) dx$$

entraîne

$$f(x) = \int_0^{+\infty} K(xs) \varphi(s) ds.$$

b. La transformation de Weierstrass

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-x)^2}{4}} f(x) dx = W \{ f(x) \}$$

introduite par cet auteur pour démontrer que toute fonction continue peut être approximée uniformément par un polynôme. Elle a été étudiée par Hille [15] et par Gonzales-Dominguez [16] (qui la désigne d'ailleurs sous le nom de transformation de Hille).

c. La transformation de Hankel est d'une application fréquente dans les problèmes de Physique mathématique comportant une

(') En fait, depuis la parution de la première édition de ce fascicule, une tendance très nette s'est manifestée en faveur de l'adoption de la transformée de Laplace-Abel. Si nous continuons à nous en écarter dans la présente édition, c'est principalement pour nous conformer aux conventions et notations adoptées dans les deux formulaires publiés dans cette même collection et dans le fascicule traitant du calcul symbolique à deux variables.

symétrie cylindrique [11 c]. On définit la transformée de Hankel d'ordre  $n$  par

$$(9) \quad \mathcal{H}_n \{ f(x) \} = \varphi(s) = \int_0^{+\infty} J_n(2\sqrt{sx}) f(x) dx.$$

$J_n(z)$  désigne ici la fonction de Bessel de première espèce. Le noyau  $J_n(2\sqrt{sx})$  est un noyau de Fourier et l'on a la formule réciproque

$$f(x) = \int_0^{+\infty} J_n(2\sqrt{xs}) \varphi(s) ds.$$

d. La transformation de Stieltjés

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x+s} dx$$

a été envisagée par cet auteur lors de ses importantes recherches sur les fractions continues [17]. Elle est liée à la transformation de Laplace-Abel puisque, étant donné

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt, \quad g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x) dx,$$

on a formellement

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) dx \int_0^{+\infty} e^{-(s+x)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(x) dx}{s+x}. \end{aligned}$$

e. Signalons aussi les transformées de Kontorovich-Lébedev

$$\mathbf{T}_J \{ f(x) \} = \int_0^{+\infty} x^{-1} J_\mu(kx) f(x) dx = \mathbf{F}(\mu),$$

$$\mathbf{T}_Y \{ g(x) \} = \int_0^{+\infty} x^{-1} Y_\mu(kx) g(x) dx = \mathbf{G}(\mu),$$

$J_\mu$ ,  $Y_\mu$ , désignent respectivement les fonctions de Bessel de première et seconde espèces. L'utilisation de ces transformées s'est révélée

avantageuse lors de l'étude théorique de certains problèmes de diffraction [18], [19].

*f.* Nous rencontrerons aussi au cours du présent exposé la *transformée de Fraser* [20]

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\Gamma(s+x+1)} dx,$$

$\Gamma$  désignant la fonction eulérienne de seconde espèce.

La liste donnée ci-dessus est incomplète; elle est limitée aux transformations fonctionnelles intégrales les plus usuelles et à celles qui se rattachent directement aux problèmes envisagés ici.

**Le calcul symbolique.** — A toute fonction  $f(t)$  de la variable réelle  $t$  pour laquelle l'intégrale de Carson (8) est convergente, nous ferons correspondre son *image*  $\varphi(p)$ . Nous dirons que  $f(t)$  est l'*original* de  $\varphi(p)$ . Nous écrirons

$$\varphi(p) \subset f(t), \quad f(t) \supset \varphi(p).$$

Cette notation, introduite par Mc Lachlan, a l'avantage de préciser la correspondance symbolique sans confusion possible entre l'image et l'original, l'image étant toujours la fonction figurant du côté convexe du signe  $\subset$  ou  $\supset$  [21].

A certaines opérations (dérivations, intégrations, changements de variables, etc.) effectuées sur l'original, correspondent d'autres opérations plus simples, ou au moins plus accessibles, effectuées sur son image et l'on conçoit donc qu'on puisse dans de nombreux cas, à partir des propriétés de la fonction image, retrouver celles de la fonction originale. Enfin, il y a lieu de noter que l'image  $\varphi(p)$  est analytique même si l'original ne l'est pas.

Le calcul symbolique consiste en une utilisation convenable des règles opératoires dont il vient d'être question pour la résolution de divers problèmes d'analyse. Une première application, immédiate mais limitée, concerne l'intégration des systèmes d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants, c'est-à-dire l'étude des systèmes oscillants, amortis ou non, et à plusieurs degrés de liberté. Une autre application, beaucoup plus générale, et à laquelle nous avons déjà fait allusion, concerne l'intégration des équations aux dérivées partielles pour des conditions aux frontières de types très divers; et ici ce mode de calcul se prête aisément à l'introduction des fonctions généralisées (ou *distributions*). Il n'en faut pas plus pour justifier le rôle important joué par le calcul symbolique dans le domaine des méthodes mathématiques de la physique.

Mais il est un autre domaine où le calcul symbolique est susceptible de donner lieu à de vastes applications : c'est celui de l'étude des propriétés générales et particulières de nombreuses fonctions spéciales rencontrées en physique mathématique et en théorie analytique des nombres. Citons, entre autres, les fonctions de Bessel, les fonctions de Laguerre, certaines fonctions elliptiques, etc. S'il a été parfois suggéré que le calcul symbolique ne saurait constituer « une fin en soi » [22], il semble par contre difficile de nier la facilité et l'élégance avec laquelle il permet d'établir, sinon même de découvrir de nombreuses propriétés de ces fonctions spéciales, et ceci simplement à partir de quelques propriétés évidentes de leurs transformées; en particulier, les diverses relations intégral-différentielles qui caractérisent ces fonctions spéciales ou qui les relient entre elles deviennent ainsi immédiates; signalons enfin l'aisance avec laquelle le calcul symbolique conduit à divers développements asymptotiques. Certes, les possibilités offertes par les transformées de Laplace sont depuis longtemps connues et utilisées à ces fins; toutefois, récemment, elles firent l'objet de recherches systématiques. Ce sont vraisemblablement les publications de Van der Pol [23] qui ont attiré l'attention sur ces possibilités. Bien entendu, le procédé n'est pas uniquement limité à la transformation de Laplace; il est possible de le reprendre avec les autres transformées citées au paragraphe précédent.

Envisagé sous l'angle de la transformation fonctionnelle intégrale de Laplace-Carson, le calcul symbolique ne garde plus que des liens plutôt vagues avec les méthodes opérationnelles utilisées par Boole et par Heaviside; d'ailleurs, on a pu souligner le fait que Carson n'a finalement pas justifié ces méthodes, mais qu'il a plutôt mis en évidence un outil permettant de s'en passer....

En réalité, les méthodes opérationnelles de Boole-Heaviside, de même que les transformations fonctionnelles intégrales, ne sont que des aspects particuliers d'une théorie plus générale : celle des *opérateurs linéaires*, qui a trouvé un vaste champ d'application en mécanique quantique et qui est devenue bien familière aux physiciens théoriciens. C'est en définitive, un aspect très particulier d'une théorie très générale qui sera exposé dans les pages qui suivent. Cet aspect particulier n'en constitue pas moins actuellement un chapitre très important des mathématiques appliquées.

## PREMIÈRE PARTIE.

## LES RÈGLES DU CALCUL SYMBOLIQUE.

1. **L'intégrale de Carson.** — Faisons correspondre à toute fonction réelle ou complexe  $f(t)$  de la variable réelle  $t$  une fonction  $\varphi(p)$  définie par l'intégrale de Carson déjà citée

$$(1) \quad \varphi(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

et supposée, bien entendu, convergente.

Par définition,  $\varphi(p)$  est l'*image* de  $f(t)$ ; et  $f(t)$  est l'*original* de  $\varphi(p)$ . La relation (1) se traduit par les notations mentionnées plus haut

$$\varphi(p) \subset f(t), \quad f(t) \supset \varphi(p).$$

On constatera par la suite qu'il convient de choisir  $f(t)$  dans un certain sous-ensemble de l'ensemble (L) des fonctions susceptibles de rendre convergente l'intégrale de Carson (ou ensemble des *fonctions L-transformables*). Car il s'avère utile et parfois indispensable d'imposer à l'original quelque condition plus stricte que cette seule L-transformabilité; on est donc conduit à réduire le champ d'existence de l'opérateur fonctionnel fournissant l'image  $\varphi(p)$  à partir de l'original  $f(t)$ .

Montrons d'abord que si l'image existe pour  $p = p_0 = \zeta_0 + i\eta_0$ , elle existe aussi pour toute valeur de  $p = \zeta + i\eta$  telle que  $\zeta > \zeta_0$ . En effet, en posant

$$\int_0^x e^{-p_0 u} f(u) du = g(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-pt} f(t) dt &= \int_0^x e^{-(p-p_0)t} e^{-p_0 t} f(t) dt \\ &= e^{-(p-p_0)x} g(x) + (p-p_0) \int_0^x e^{-(p-p_0)t} g(t) dt. \end{aligned}$$

Or, dire que l'intégrale de Carson converge pour  $p = p_0$ , c'est dire que  $g(x)$  tend vers une limite quand  $x \rightarrow +\infty$ , et alors  $g(x)$  reste bornée; si donc  $\zeta > \zeta_0$ , l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-(p-p_0)t} g(t) dt$$

est convergente (et même absolument convergente). Il en résulte le théorème énoncé. En répartissant les nombres réels  $\zeta$  en deux classes suivant que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\zeta t} g(t) dt$$

est ou n'est pas convergente, on peut effectuer une coupure  $\alpha$ . Alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

convergera pour  $\Re(p) > \alpha$ , divergera pour  $\Re(p) < \alpha$ .

On définit ainsi dans le plan de la variable complexe  $p = \zeta + i\eta$  un *demi-plan de convergence simple*. Sa frontière  $\Re(p) = \alpha$  peut appartenir totalement, ou partiellement, ou ne pas appartenir du tout au domaine de convergence ainsi défini.

D'autre part, si pour  $p = p_0$  l'intégrale de Carson est *absolument convergente*, elle le sera encore pour  $\Re(p) \geq \Re(p_0)$  puisque cette dernière condition entraîne

$$|e^{-pt} f(t)| = e^{-t \Re(p-p_0)} |e^{-p_0 t} f(t)| \leq |e^{-p_0 t} f(t)|.$$

En répartissant les nombres réels  $\zeta$  en deux classes suivant que l'intégrale de Carson est absolument convergente ou ne l'est pas pour  $p = \zeta$ , on peut effectuer une coupure  $\beta$  définissant un *demi-plan de convergence absolue*. Sa frontière, la droite  $\Re(p) = \beta$  appartient tout entière au domaine de convergence absolue lorsque la coupure appartient à la classe supérieure; lorsque  $\beta$  appartient à la classe inférieure, aucun des points de la frontière ne correspond à la convergence absolue de l'intégrale. Ces deux éventualités sont seules possibles dans ce cas, contrairement au cas précédent relatif à la convergence simple. Évidemment,  $\beta \geq \alpha$ .

Revenons aux conditions plus strictes que la L-transformabilité et susceptibles d'être imposées à l'original  $f(t)$ . Les trois conditions simultanées suivantes sont celles le plus fréquemment adoptées.

1°  $f(t)$  appartient à la classe C des fonctions généralement continues pour  $t > 0$  (').

(') Nous désignons par C l'espace vectoriel des fonctions  $f(t)$  généralement continues sur tout segment  $[0, a]$ ,  $a < \infty$ ; par  $C_1$  le sous-espace des fonctions continues et qui admettent en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche; par  $C_n$  le sous-espace des fonctions  $f(t)$  telles que  $f^{(n-1)}(t)$  appartienne à  $C_1$ , [alors  $f^{(n)}(t)$  appartient nécessairement à C; il faut noter à ce propos que

2° Au voisinage de  $t = 0$ ,  $f(t)$  est absolument intégrable; autrement dit,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\varepsilon} |f(t)| dt \quad (t_0 > 0)$$

existe.

3° Il existe un nombre réel  $a$  tel que

$$f(t) = O(e^{at}) \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty.$$

(On dit aussi que  $f(t)$  est d'ordre exponentiel unité.)

Dans tout ce qui suivra nous supposerons ces conditions remplies. Lorsque certaines règles opérationnelles conduiront à restreindre encore davantage la classe des fonctions originales, nous en ferons explicitement mention.

**2. Règles opérationnelles.** — On constitue un dictionnaire opératoire (certains auteurs disent plus volontiers « une grammaire opératoire ») en établissant des égalités symboliques montrant les correspondances entre opérations effectuées sur  $f(t)$  et  $\varphi(p)$ . Les plus immédiates sont réunies dans le tableau I.

Nous envisagerons d'abord deux règles qui jouent un rôle particulièrement important dans les applications. Les diverses remarques que nous ferons à leur sujet sont essentielles.

**3. Règle opérationnelle relative à la dérivation de l'original.** — a. Cette règle suppose que l'original  $f(t)$  satisfait à des conditions plus strictes que celles énoncées au paragraphe précédent. *Il doit appartenir à la classe  $C_1$  pour  $t > 0$  et être d'ordre exponentiel unité lorsque  $t \rightarrow +\infty$  [ $f(t) = O(e^{at})$ ].*

Soient  $t_1, t_2, \dots$ , les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $f'(t)$  est discontinue; on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda e^{-pt} f'(t) dt &= \int_0^{t_1} e^{-pt} f'(t) dt + \int_0^{t_2} e^{-pt} f'(t) dt + \dots \\ &+ \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-pt} f'(t) dt + \int_{t_n}^\lambda e^{-pt} f'(t) dt. \end{aligned}$$

---

si réciproquement,  $f^{(n)}(t)$  appartient à  $C$ , on ne peut pas conclure que  $f^{(n-1)}(t)$  appartient au sous-espace  $C_1$  puisque  $f^{(n)}(t)$  et  $f^{(n-1)}(t)$  sont alors susceptibles de posséder des discontinuités de première espèce aux mêmes points].

Dans certains cas on substituera à  $[0, a]$  un segment  $[\alpha, a]$ ,  $\alpha > 0$  quelconque, afin d'inclure les cas où  $f(t)$  posséderait une discontinuité de seconde espèce en  $t = 0$ .

En intégrant par parties,

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt_k} f(t_k) - e^{-pt_{k-1}} f(t_{k-1}) + p \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-pt} f(t) dt,$$

Toutes réductions faites, on obtient

$$\int_0^\lambda e^{-pt} f'(t) dt = -f(+0) + e^{-p\lambda} f(\lambda) + p \int_0^\lambda e^{-pt} f(t) dt,$$

d'où

$$f'(t) \supset \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p \left[ -f(+0) + e^{-p\lambda} f(\lambda) + p \int_0^\lambda e^{-pt} f(t) dt \right],$$

soit

$$(2) \quad f'(t) \supset p[\varphi(p) - f(+0)], \quad (\mathcal{R}(p) > \alpha).$$

On notera que les hypothèses adoptées pour  $f(t)$  entraînent la L-transformabilité de la dérivée  $f'(t)$ . C'est là un point qui mérite d'être souligné; en effet, il peut se faire que  $f'(t)$  soit d'un ordre exponentiel supérieur à l'unité; or, il peut parfois être malaisé de déterminer directement si une fonction dont l'ordre exponentiel est supérieur à l'unité possède ou non une image; la propriété en question devient alors précieuse. Ainsi, par exemple,

$$t^{n-1} e^{tn} \cos e^{tn} \quad (n > 1)$$

est L-transformable puisque c'est, à un facteur constant près, la dérivée de  $\sin e^n$ , fonction satisfaisant bien à toutes les conditions imposées à  $f(t)$ .

b. On peut aussi énoncer la règle opérationnelle en question en supposant  $f(t)$  et  $f'(t)$  continues pour  $t > 0$  et toutes deux L-transformables. Ce second énoncé généralise la règle opérationnelle à certains cas où la limite  $f'(+0)$  n'existe pas. Ainsi, on vérifierait aisément, par exemple, qu'avec  $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$  on a effectivement

$$t^{\frac{1}{2}} \supset \frac{\sqrt{\pi}}{2} p^{-\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} p^{\frac{1}{2}} \subset \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}}.$$

La comparaison de la démonstration relative à ce second énoncé avec celle donnée ci-dessus est instructive.

Dans le second cas, on sait que pour une certaine valeur  $p = p_0$ , les deux limites

$$\lim_{\substack{a \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b e^{-p_0 t} f(t) dt, \quad \lim_{\substack{a \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b e^{-p_0 t} f'(t) dt$$

existent [et, par conséquent, existent aussi pour tout  $p$  tel que  $\mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(p_0)$ ]. En intégrant par parties on a

$$\int_a^b e^{-p_0 t} f'(t) dt = e^{-p_0 b} f(b) - e^{-p_0 a} f(a) + p_0 \int_a^b e^{-p_0 t} f(t) dt.$$

Par hypothèse, le premier membre et le dernier terme du second membre tendent vers des limites finies quand  $a \rightarrow +\infty$ ,  $b \rightarrow +\infty$ . Donc les deux quantités

$$e^{-p_0 a} f(a), \quad e^{-p_0 b} f(b)$$

tendent nécessairement vers des limites finies. Il en résulte, d'une part l'existence de  $f(+\infty)$  et, d'autre part, que la fonction  $e^{-p_0 t} f(t)$ , continue pour  $t > 0$ , reste bornée pour  $t \geq 0$  :

$$|e^{-p_0 t} f(t)| < A \quad (t \geq 0).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |e^{-pb} f(b)| &= |e^{-(p-p_0)b} e^{-p_0 b} f(b)| \\ &= e^{-[\mathcal{R}(p) - \mathcal{R}(p_0)]b} |e^{-p_0 b} f(b)| < A e^{-[\mathcal{R}(p) - \mathcal{R}(p_0)]b}, \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-pb} f(b) = 0 \quad [\mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(p_0)],$$

ce qui revient à écrire  $f(t) = O[e^{\alpha t}]$  ( $\alpha > 0$ ).

En définitive, si  $\mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(p_0)$ ,

$$\begin{aligned} p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt &= p \left[ \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-pb} f(b) \right. \\ &\quad \left. - \lim_{a \rightarrow +0} e^{-pa} f(a) + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right] \\ &= p^2 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt - p f(+\infty), \end{aligned}$$

ce qui constitue la règle opérationnelle envisagée.

On notera qu'ici le point essentiel était l'hypothèse de la L-transformabilité de  $f'(t)$ ; l'existence de la limite  $f(+\infty)$  ainsi que la propriété  $f(t) = O[e^{\alpha t}]$  en résultent [tandis qu'avec le premier énoncé, c'était la L-transformabilité de  $f'(t)$  qui résultait des hypothèses adoptées].

Quant à l'hypothèse de continuité relative à  $f'(t)$  pour  $t > 0$ , elle n'a été introduite que pour alléger la démonstration et n'a rien d'essentiel. [On s'assure aisément que la règle opérationnelle reste valable si  $f'(t)$  appartient à la classe C pour  $t > 0$ .]

On peut aussi énoncer une condition de validité encore moins stricte laissant à  $f(t)$  la possibilité de ne pas rester bornée dans quelque intervalle fini correspondant à  $t > 0$ . Toutefois, une connaissance des deux énoncés précédents est, semble-t-il, tout ce qui est nécessaire pour les applications qui suivront.

c. Indiquons deux généralisations importantes de la règle opérationnelle relative à  $f'(t)$ .

La première, immédiate, s'obtient par itération. Si  $f(t)$  appartient à la classe  $C_2$  pour  $t \geq 0$ , si  $f(t)$  et  $f'(t)$  sont d'ordre exponentiel unité, on a

$$f''(t) \supset p[\varphi(p) - pf(+0)] - pf'(+0) = p^2\varphi(p) - [p^2f(+0) + pf'(+0)];$$

plus généralement, si  $f(t)$  appartient à la classe  $C_n$ , et si  $f(t)$ ,  $f'(t)$ , ...,  $f^{(n-1)}(t)$  sont d'ordre exponentiel unité, on a

$$(3) \quad f^{(n)}(t) \supset p^n\varphi(p) - [p^n f(+0) + p^{n-1}f'(+0) + \dots + pf^{(n-1)}(+0)].$$

La seconde généralisation est relative au cas où la fonction  $f(t)$  appartient à la classe  $C$  (et non plus à la classe  $C_1$ ) pour  $t \geq 0$ ;  $\tau_1, \tau_2, \dots$  désignant les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $f(t)$  est discontinue, on a

$$(4) \quad f'(t) \supset p\varphi(p) - pf(+0) + p \sum_k [f(\tau_k + 0) - f(\tau_k - 0)] e^{-p\tau_k}.$$

[Cette formule fournit une illustration de la notion de *distribution de Dirac*  $\delta(t) \supset p$  intervenant comme dérivée de  $U(t) \supset 1$ .]

4. Règle opérationnelle relative au produit de composition. — On appelle *produit de composition* des deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  la fonction

$$h(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du;$$

on écrit

$$h(t) = f(t) \star g(t).$$

Ce produit est associatif, distributif, commutatif. Enfin, si  $f(t) = O[t^{\alpha-1}]$ ,  $g(t) = O[t^{\beta-1}]$  pour  $t \rightarrow +0$ , avec  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , on a

$$\begin{aligned} h(+0) &= 0 & \text{si } \alpha + \beta > 1; \\ h(+0) &\text{ fini} & \text{si } \alpha + \beta = 1; \\ h(+0) &= \infty & \text{si } \alpha + \beta < 1, \end{aligned}$$

$h(t)$  restant intégrable au voisinage de l'origine dans le troisième cas.

La règle opérationnelle relative au produit de composition s'écrit

$$(5) \quad f(t) \star g(t) = \frac{1}{p} \varphi(p) \psi(p),$$

avec

$$f(t) \supset \varphi(p), \quad g(t) \supset \psi(p).$$

Une condition suffisante pour sa validité est l'existence d'abscisses de convergence absolues finies  $\beta_1, \beta_2$ , pour les images  $\varphi(p)$  et  $\psi(p)$ .

Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt$$

étant supposées absolument convergentes pour  $p = p_0$ , on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-p_0 x} f(x) dx \int_0^{+\infty} e^{-p_0 y} g(y) dy = \iint_Q e^{-p_0(x+y)} f(x) g(y) dx dy,$$

le domaine d'intégration  $Q$  correspondant au premier quadrant  $x \geq 0, y \geq 0$ ; or, en effectuant dans l'intégrale double le changement de variables  $x = u - v, y = v$ , on obtient

$$\iint_Q e^{-p_0(x+y)} f(x) g(y) dx dy = \iint_{Q'} e^{-p_0 u} f(u-v) g(v) du dv,$$

le nouveau domaine d'intégration  $Q'$  correspondant à  $u \geq v, v \geq 0$  [c'est-à-dire au domaine du plan  $(u, v)$  délimité par l'axe  $Ou$  et la bissectrice de l'angle des axes  $Ou, Ov$ ]. On peut donc écrire

$$\iint_{Q'} e^{-p_0 u} f(u-v) g(v) du dv = \int_0^{+\infty} e^{-p_0 u} \left( \int_0^u f(u-v) g(v) dv \right) du$$

et la convergence absolue subsiste évidemment pour  $p$  tel que  $\mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(p_0)$ . Il en résulte (5).

Bien que l'extension de la notion d'intégrale double à un champ non borné ne soit réalisable qu'avec l'hypothèse de convergence absolue, il reste possible de s'affranchir de celle-ci dans la règle opérationnelle (5). Ghizzetti [24] a démontré que cette règle subsiste, entre autres cas, dans les deux suivants :

a. Les intégrales de Carson relatives à  $f(t), g(t)$  et  $f(t) \star g(t)$  sont convergentes;

b. L'intégrale de Carson relative à  $f(t)$  est absolument convergente, celle relative à  $g(t)$  est convergente; la convergence (simple) de  $f(t) \star g(t)$  en résulte.

On notera l'analogie entre ces trois énoncés de conditions suffisantes et ceux relatifs à la multiplication des séries

$$\sum c_n = \left( \sum a_n \right) \left( \sum b_n \right), \quad c_n = \sum_{s=0}^n a_{n-s} b_s.$$

La règle de Cauchy suppose la convergence de  $\sum |a_n|$  et de  $\sum |b_n|$  et conclut à la convergence de  $\sum |c_n|$ . La règle d'Abel suppose la convergence de  $\sum a_n$ , de  $\sum b_n$ , de  $\sum c_n$ . La règle de Mertens suppose la convergence de  $\sum a_n$  et de  $\sum |b_n|$  et conclut à la convergence de  $\sum c_n$ .

5. **Remarques sur les règles opérationnelles.** — La plupart des autres règles opérationnelles figurant dans le tableau donné page 71 résultent immédiatement des propriétés élémentaires de l'intégrale de Laplace. Dans les hypothèses adoptées ici pour l'original  $f(t)$  elles sont facilement établies. Aussi ne les commenterons nous pas, et nous nous bornerons à souligner que la règle

$$(6) \quad p \frac{d^n}{dp^n} \left( \frac{\varphi(p)}{p} \right) \subset (-t)^n f(t)$$

traduit le fait que l'image  $\varphi(p)$  est une fonction holomorphe dans le demi-plan de convergence. Sa justification résulte principalement de ce que notre hypothèse  $f(t) = O[e^{\alpha t}]$  entraîne, quel que soit l'entier positif  $n$ ,

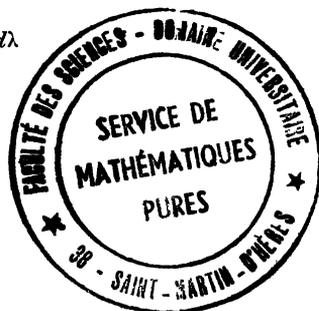
$$t^n f(t) = O[e^{\alpha' t}] \quad (\alpha' > \alpha).$$

Les trois dernières règles figurant sur notre tableau constituent, par contre, trois cas particuliers d'une règle très générale dont voici une démonstration formelle. Soit une correspondance de la forme

$$\omega(p) e^{-\lambda \psi(p)} \subset g(t, \lambda).$$

On en déduit

$$\omega(p) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \psi(p)} f(\lambda) d\lambda \subset \int_0^{+\infty} g(t, \lambda) f(\lambda) d\lambda$$



et, si  $\varphi(p) \subset f(t)$ ,

$$\frac{\omega(p)}{\psi(p)} \varphi[\psi(p)] \subset \int_0^{+\infty} g(t, \lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

Avec  $\omega(p) = 1$ ,  $\psi(p) = \log p$ , on obtient

$$(7) \quad \frac{\varphi(\log p)}{\log p} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)} f(\lambda) d\lambda.$$

La correspondance

$$(8) \quad p^{-n+1} e^{-\frac{\lambda}{p}} \subset J_{n-1}(2\sqrt{\lambda t}) \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

que nous établirons plus loin et dans laquelle  $J_m(x)$  désigne la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre  $m$  fournit

$$(9) \quad p^{1-n} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \subset \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{\lambda t}) f(\lambda) d\lambda.$$

La correspondance

$$(10) \quad \sqrt{p} e^{-\lambda\sqrt{p}} \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}.$$

fournit la règle

$$(11) \quad \varphi(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} f(\lambda) d\lambda.$$

Nous laisserons au lecteur le soin de préciser les conditions suffisantes de validité pour ces formules.

**6. Dictionnaire d'images.** — Les procédés utilisés pour l'obtention de correspondances symboliques se ramènent aux trois suivants :

a. Une correspondance peut s'établir, plus ou moins directement à partir de quelque intégrale connue. Ainsi, (10) résulte d'un changement de variables dans la relation bien classique

$$(10') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2 - \frac{b}{u^2}} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Il y a souvent avantage à utiliser l'intégrale relative à la formule d'inversion discutée plus loin; la possibilité de déformer le contour d'intégration et l'application du théorème des résidus sont alors des procédés de calcul fructueux.

b. On peut aussi obtenir un développement en série de l'image  $\varphi(p)$  recherchée en prenant les transformées terme à terme dans un développement en série de l'original  $f(t)$ ; c'est à l'aide de ce procédé que nous établissons dans la seconde partie la correspondance (8). On est alors amené à utiliser l'un ou l'autre des théorèmes suivants :

1° Si  $\varphi_n(p) < f_n(p)$ , on a

$$(12) \quad \varphi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(p) < \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$$

à condition que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pt} f_n(t)$$

converge uniformément sur tout segment  $[0, t]$  ( $t > 0$ ) et que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} |e^{-pt} f_n(t)| dt$$

converge.

2° La relation (12) a également lieu si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pt} f_n(t)$  converge uniformément sur tout segment  $0, t$  ( $t = 0$ ) et si l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-pt} f_n(t)| \right) dt$$

converge [25].

Ainsi, par exemple,

$$(13) \quad \frac{1 - e^{-t}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{(n+1)!} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-p)^n}{n+1} = \log \left( 1 + \frac{t}{p} \right).$$

[Il semble à peine utile de rappeler que si la convergence dans l'un ou l'autre cas, a lieu pour  $p = p_0$ , elle a nécessairement lieu pour  $\mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(p_0)$ .]

c. Enfin, on peut dériver ou intégrer les deux membres d'une égalité symbolique par rapport à quelque paramètre  $y$  figurant. La légitimité de ce procédé repose évidemment sur la possibilité de différentier ou intégrer sous le signe somme; il implique donc quelque condition de convergence uniforme.

Ainsi, en écrivant

$$(14) \quad \frac{d^k}{dn^k} (t^n) \supset \frac{d^k}{dn^k} [p^{-n} \Gamma(n+1)],$$

on obtient

$$t^n (\log t)^k \supset p^{-n} \left[ \left( \log \frac{1}{p} \right)^k \Gamma(n+1) + C_k^1 \left( \log \frac{1}{p} \right)^{k-1} \Gamma'(n+1) + C_k^2 \left( \log \frac{1}{p} \right)^{k-2} \Gamma''(n+1) + \dots + \Gamma^{(k)}(n+1) \right],$$

d'où, en faisant  $n \neq 0$  et  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\log t \supset \log \frac{1}{p} + \Gamma'(1) = -\log p - C,$$

$$(\log t)^2 \supset \left( \log \frac{1}{p} \right)^2 + 2\Gamma'(1) \log \frac{1}{p} + \Gamma''(1) = (\log p)^2 + 2C \log p \left( C^2 + \frac{\pi^2}{6} \right),$$

.....  
 C désignant la constante d'Euler. On notera que l'image d'un polynome en  $\log t$  est un polynome de même degré en  $\log p$ .

Il suffit d'ailleurs de ne connaître qu'un petit nombre de correspondances symboliques, l'application des formules opératoires conduisant à étendre à l'infini les rubriques de ce nouveau dictionnaire [27], [28], [29].

**7. Séquences symboliques.** — Les formules que nous allons établir à présent ont trait à des *séquences* symboliques, c'est-à-dire à des relations entre fonctions liées par une suite d'égalités, symboliques ou ordinaires. En voici un premier exemple simple, mais important [27], auquel nous avons déjà fait allusion plus haut.

a. Supposons que  $f(t)$  soit l'original de  $\varphi(p)$ , mais que  $f(p)$  soit l'image d'une fonction  $g(t)$  : on a donc

$$\varphi(p) \subset f'(t) \quad f(p) \subset g(t).$$

Pour obtenir la relation liant  $\varphi(p)$  à  $g(t)$  il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= p \int_0^{+\infty} e^{-ps} ds \left[ s \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt \right] \\ &= p \int_0^{+\infty} g(t) dt \int_0^{+\infty} s e^{-(p+t)s} ds, \end{aligned}$$

d'où l'égalité véritable

$$(15) \quad \varphi(p) = p \int_0^{+\infty} \frac{g(t) dt}{(p+t)^2}$$

établie précédemment avec des notations différentes.

b. Voici un second exemple de séquence, plus compliqué : supposons qu'on ait, comme toujours,  $\varphi(p) \subset f(t)$  et supposons à présent que la fonction

$$\sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right)$$

soit l'image d'une fonction  $h(t)$ . En remplaçant la variable d'intégration par son inverse dans l'intégrale de Carson, on aura

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{x}} \sqrt{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{x}-xt} h(t) \frac{dx dt}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Récrivait (10') sous la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{x}+xt\right)} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{pt}},$$

on en déduit

$$\varphi(p) = (p\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-2\sqrt{pt}} h(t) dt.$$

Remplaçons  $p$  par  $p^2$  et  $t$  par  $\frac{t^2}{4}$ ; il vient

$$\varphi(p^2) = p \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-pt} h\left(\frac{t^2}{4}\right) \frac{t}{2} dt,$$

d'où la séquence cherchée

$$(16) \quad \varphi(p) \subset f(t), \quad \sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right) \subset h(t), \quad \varphi(p^2) \subset \frac{\sqrt{\pi}}{2} t h\left(\frac{t^2}{4}\right).$$

c. Sans insister davantage, indiquons encore une autre séquence qui s'exprime par la suite des égalités symboliques :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(p) \subset f(t), \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi\left(\frac{1}{4t}\right) \supset \mathbf{K}(p), \\ f(t^2) \supset \frac{\mathbf{K}(p^2)}{p \sqrt{\pi}}. \end{array} \right.$$

Elles s'obtiennent à l'aide de la règle opérationnelle (11) et de la règle opérationnelle

$$(18) \quad f(t^2) \subset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2 x^2}{4}} \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

qui s'établit formellement comme suit :

$$\begin{aligned} f(t^2) \supset p \int_0^{+\infty} e^{-p^2 v} f(v^2) dv &= \frac{p}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p \sqrt{\theta}}}{\sqrt{\theta}} f(\theta) d\theta \\ &= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x^2} - \frac{p^2 x^2}{4}} f(\theta) \frac{d\theta dx}{x^2} \\ &= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2 x^2}{4}} dx \left(\frac{1}{x^2}\right) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x^2}} f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ces diverses séquences sont très utiles pour la recherche de relations nouvelles entre fonctions dont on connaît les images, ou les originaux.

**8. Formule d'inversion de Mellin.** — L'étude de la transformation inverse de celle de Laplace est étroitement liée à la notion d'intégrales réciproques de Fourier

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \Phi(\omega) d\omega.$$

Du reste, la transformation bilatérale de Laplace et la transformation de Fourier ne constituent qu'une seule et même transformation fonctionnelle intégrale. Il suffit, en effet, de poser

$$p = -i\omega \quad \text{et} \quad (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x) = f(x).$$

Les intégrales réciproques de Fourier se rattachent directement à la formule de l'intégrale de Fourier

$$\pi[h(x+0) + h(x-0)] = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi,$$

$\omega$  et  $\xi$  sont supposés réels. La formule est valable si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$$

existe et si le point  $x$  est intérieur à un intervalle dans lequel  $h(x)$  est à variation bornée. (A cette dernière condition suffisante, on peut

évidemment substituer celle relative à l'appartenance de  $h(x)$  à la classe  $C_1$ .)

Le problème de l'inversion de la transformée de Carson, problème essentiel en calcul symbolique, a reçu plusieurs solutions; la plus naturelle réside dans une utilisation convenable de la formule de l'intégrale de Fourier. C'est ce que nous allons maintenant vérifier; mais il nous faut auparavant envisager deux questions importantes.

La première est relative à certaines conditions nécessaires pour qu'une fonction  $\varphi(p)$  soit une image, plus précisément, l'image d'une fonction « ordinaire ». (Dans les limites du présent exposé, il ne nous est malheureusement par possible de traiter du cas, si intéressant pour les applications physiques, des *distributions*) [42].

Avec les hypothèses que nous avons adoptées pour l'original  $f(t)$  afin de justifier ou préciser les règles opérationnelles usuelles, ces conditions nécessaires résultent de certains théorèmes élémentaires d'analyse mathématique. Cependant, nous croyons utile d'esquisser ici les démarches d'une théorie plus complète et basée essentiellement sur la convergence de l'intégrale définissant l'image de Carson.

Soit alors  $p_0$  un point du demi-plan de convergence; soit (D) le domaine non borné limité par deux demi-droites issues de  $p_0$  et faisant respectivement les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  avec la direction positive de l'axe réel,

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < 0.$$

On démontre que, dans ce domaine (D), et sur sa frontière, il y a convergence uniforme de

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

On en déduit : a. l'holomorphicité de  $\varphi(p)$  dans tout le demi-plan de convergence  $\Re(p) > \alpha$ ; b.  $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \rho^{-1} \varphi(\rho) = 0$ , [ $\Re(p) > \alpha$ ] [25].

Le second problème a trait à l'unicité de la solution de l'équation intégrale

$$p^{-1} \varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

où  $f(t)$  est l'inconnue. Deux fonctions continues (pour  $t > 0$ ) et différentes ne peuvent avoir la même image. Ceci résulte d'un théorème dû à Lerch : Si  $f(t)$  est supposée continue, son image  $\varphi(p)$  ne peut s'annuler en une infinité de points dont les affixes forment une progression

*arithmétique* [13]. Wintner a généralisé ce théorème de la façon suivante:  $\varphi(p)$  ne peut posséder une infinité de racines  $p_n$  telles que la série  $\sum \frac{1}{p_n}$  diverge.

En fait, la formule d'inversion de Mellin concerne simultanément la transformée de Carson « unilatérale » (systématiquement envisagée ici) et la transformée de Carson « bilatérale ». Nous poserons

$$\begin{aligned} f(t) \doteq \Phi(p) &= \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_{-b}^a p e^{-pt} f(t) dt \\ &= p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + p \int_0^{+\infty} e^{pt} f(-t) dt. \end{aligned}$$

La transformée bilatérale  $\Phi(p)$  est donc la somme de deux intégrales: la première, de paramètre  $p$  concerne  $f(t)$  et il lui correspond un demi-plan de convergence  $\Re(p) > \alpha_1$ ; la seconde, de paramètre  $-p$  concerne la fonction  $f(-t)$  et il lui correspond un demi-plan de convergence défini par  $\Re(-p) > -\alpha_2$ , soit  $\Re(p) > \alpha_2$ .

Si  $\alpha_1 > \alpha_2$ , ces demi-plans ont une partie commune; la bande de convergence  $\alpha_1 < \Re(p) < \alpha_2$  à l'intérieur de laquelle la transformée bilatérale  $\Phi(p)$  est définie. Si  $\alpha_1 < \alpha_2$ , l'intégrale définissant  $\Phi(p)$  ne converge pour aucune valeur de  $p$ . Si  $\alpha_1 = \alpha_2$ , la transformée peut n'exister que pour des points de la droite  $\Re(p) = \alpha_1$ . On définirait de même une *bande de convergence absolue* qui est intérieure ou qui coïncide avec celle de convergence simple:  $\beta_1 < \Re(p) < \beta_2$ . Dans certains cas on peut avoir  $\alpha_1 = -\infty$ ,  $\alpha_2 = +\infty$ , ou encore  $\beta_1 = -\infty$ ,  $\beta_2 = +\infty$ .

La transformée bilatérale  $\Phi(p)$  est une fonction holomorphe de la variable  $p$  à l'intérieur de la bande de convergence simple.

Les principales règles opérationnelles relatives à la transformation bilatérale sont les suivantes [23'] :

a. On a la règle

$$\frac{d^n}{dp^n} \left( \frac{1}{p} \Phi(p) \right) \doteq (-t)^n f(t)$$

qui traduit ici encore la possibilité de dériver sous le signe d'intégration. Mais cette fois-ci l'opération est licite dans la bande de convergence et non plus dans un demi-plan.

b. La règle opérationnelle relative à  $f'(t)$  est

$$f'(t) \doteq p \Phi(p).$$

Elle est valable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-pt} f(t) = 0.$$

La nouvelle correspondance obtenue est valable dans un domaine parfois plus étendu, parfois moins étendu que celui primitivement envisagé. Ainsi, par exemple, en effectuant le changement de variable

$$s = t\sqrt{a} + \frac{p}{2\sqrt{a}} \text{ dans}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} e^{-at^2} dt,$$

on obtient

$$e^{-at^2} \doteq p \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{p^2}{4a}}$$

valable pour  $-\infty < \mathcal{R}(p) < +\infty$  et la règle opérationnelle relative à  $f'(t)$  fournit la correspondance

$$-2at e^{-at^2} \doteq p^2 \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{p^2}{4a}}$$

qui est également valable dans tout le plan de la variable  $p$ ; l'utilisation de la règle n'a pas modifié ici le domaine de validité de la correspondance. Par contre, si l'on part de la correspondance

$$e^{-t} \doteq \Gamma(p+1), \quad 0 < \mathcal{R}(p) < +\infty,$$

la même règle donne

$$e^{-t} e^{-t} \doteq p \Gamma(p+1)$$

qu'on vérifie aisément être valable dans le domaine  $-1 < \mathcal{R}(p) < +\infty$ , plus étendu que celui dans lequel la correspondance primitive était définie. On arrive à une conclusion opposée en partant de la correspondance

$$\sin e^{-t} \doteq p \Gamma(p) \sin \frac{\pi p}{2}, \quad -1 < \mathcal{R}(p) < +1.$$

On a, en effet,

$$-e^{-t} \cos e^{-t} \doteq p^2 \Gamma(p) \sin \frac{\pi p}{2}, \quad -1 < \mathcal{R}(p) < 0.$$

Plus généralement,

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \Phi(p).$$

c. La règle opérationnelle relative au produit de composition

$$\begin{aligned}\Phi(p) &\doteq f(t), & \Psi(p) &\doteq g(t), \\ \Phi(p) \Psi(p) &\doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s) f(s) ds\end{aligned}$$

est valable lorsque les transformées possèdent un domaine de convergence absolue commun. Toutefois, et de même que pour les transformées unilatérales, il est possible d'énoncer des conditions suffisantes plus larges.

d. Citons enfin les règles immédiates

$$\begin{aligned}f(t-a) &\doteq e^{-ap} \Phi(p), \\ e^{at} f(t) &\doteq \frac{p}{p+a} \Phi(p-a), \\ f(at) &\doteq \Phi\left(\frac{p}{a}\right) \quad (a > 0).\end{aligned}$$

Envisageons maintenant la formule d'inversion pour l'image bilatérale. Soit  $c$  réel, tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cx} |f(x)| dx$$

converge; la formule de l'intégrale de Fourier donne

$$\pi e^{-ct} [f(t-0) + f(t+0)] = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-cx} f(x)] e^{-i\omega x} dx,$$

d'où, en posant  $c + i\omega = p$ ,

$$f(t-0) + f(t+0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{c-i\lambda}^{c+i\lambda} e^{pt} \frac{dp}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$$

et, si  $f(t)$  est continue,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{c-i\lambda}^{c+i\lambda} e^{pt} \Phi(p) \frac{dp}{p}.$$

Le contour d'intégration est une parallèle à l'axe imaginaire *située dans la bande de convergence absolue*; il est facile de vérifier que l'intégrale ne dépend pas de  $c$ ;  $\beta_1 < c < \beta_2$ .

Passons maintenant au cas de l'image unilatérale :

$$\begin{aligned}\varphi(p) &\doteq f(t) U(t), \\ U(t) [f(t-0) + f(t+0)] &= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{c-i\lambda}^{c+i\lambda} e^{(c+i\omega)t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cx} f(x) U(x) dx,\end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \varphi(p) \frac{dp}{p} = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)] & \text{pour } t > 0, \\ = 0 & \text{pour } t < 0, \end{cases}$$

l'intégrale étant prise en valeur principale au sens de Cauchy.  $f(t)$  doit évidemment satisfaire aux conditions énoncées pour la validité de la formule de Fourier. On doit avoir  $c > \beta$  et ici aussi le résultat est indépendant de la valeur adoptée pour  $c$ . [On notera que la formule est la même pour  $\varphi(p)$  et  $\Phi(p)$ .]

Appliquons ces considérations à la détermination de l'original de  $(\log p)^{-1}$ , résultat dont nous ferons usage plus loin. Il s'agit de calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{tp}}{p \log p} dp$$

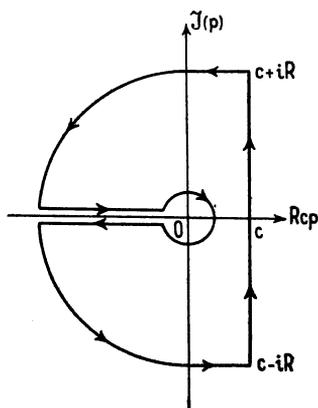


Fig. 1.

prise le long de la droite  $\mathcal{R}(p) = c > 1$ . Intégrons le long d'un contour fermé ( $\gamma$ ) constitué par (fig. 1) :

- 1° le segment joignant  $p = c$  à  $p = c + iR$ ;
- 2° le segment joignant  $p = c + iR$  à  $p = iR$ ;
- 3° le quart de cercle de centre O et de rayon R situé au-dessus de l'axe réel;
- 4° le segment  $(-R, -r)$  de l'axe réel;
- 5° le demi-cercle de centre O et de rayon  $r$  situé au-dessus de l'axe réel;
- 6° le contour symétrique de celui décrit ci-dessus par rapport à l'axe réel.

La fonction intégrée possède un pôle pour  $p = 1$ . Le théorème des résidus fournit ici

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{e^{lp}}{p \log p} dp = \lim_{p \rightarrow 1} (p-1) \frac{e^{lp}}{p \log p} = e^l.$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2\pi i e^l &= \int_{c-iR}^{c+iR} e^{lp} (p \log p)^{-1} dp \\ &+ \int_c^0 e^{l(\xi+iR)} [(\xi+iR) \log(\xi+iR)]^{-1} d\xi \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{lR(\cos\theta+i\sin\theta)} (\log R+i\theta)^{-1} i d\theta \\ &+ \int_{-R}^{-r} e^{l\xi} (\log|\xi|+i\pi)^{-1} \frac{d\xi}{\xi} \\ &+ \int_{\pi}^{-\pi} e^{lr e^{i\theta}} (\log r+i\theta)^{-1} i d\theta + \int_{-r}^{-R} e^{l\xi} (\log|\xi|-i\pi)^{-1} \frac{d\xi}{\xi} \\ &+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} e^{lR(\cos\theta+i\sin\theta)} (\log R+i\theta)^{-1} i d\theta \\ &+ \int_0^c e^{l(\xi-iR)} [(\xi-iR) \log(\xi-iR)]^{-1} d\xi. \end{aligned}$$

Faisons tendre  $R$  vers  $+\infty$  et  $r$  vers zéro; après quelques simplifications, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{lp} (p \log p)^{-1} dp = e^l - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\xi} d\xi}{\xi [\pi^2 + (\log \xi)^2]}.$$

Nous verrons au chapitre suivant que cette relation s'écrit aussi

$$(\log p)^{-1} \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\Gamma(s+1)} ds.$$

Nous terminerons par quelques remarques importantes.

Dans le cas de la transformation unilatérale, considérons un contour fermé (C) situé dans le demi-plan de convergence absolue et constitué : *a.* par le segment de longueur  $2R$  parallèle à l'axe imaginaire et centré sur un point  $c$  de l'axe réel; *b.* par le demi-cercle de rayon  $R$

et de centre  $c$ , situé à droite de ce segment, lequel constitue son diamètre. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} e^{tp} \varphi(p) \frac{dp}{p} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{tp} \varphi(p) \frac{dp}{p} \\ &\quad - \frac{R}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{t(c+Re^{i\theta})} \varphi(c+Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Le premier membre est nul puisque le contour (C) ne contient aucune singularité; si  $t < 0$ , le troisième terme tend vers zéro quand  $R \rightarrow +\infty$ . Il en résulte que la formule d'inversion fournit bien la valeur 0 pour  $t < 0$ .

La convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \varphi(p) \frac{dp}{p}$$

n'est donc pas une condition suffisante pour qu'elle représente un original  $f(t)$ ; il faut de plus, dans le cas de la transformée unilatérale  $\varphi(p)$  s'assurer que pour  $t < 0$  cette intégrale est identiquement nulle. Ainsi, par exemple, et quel que soit  $p$ , on a simultanément

$$\begin{aligned} e^{-at} &> \int_{\frac{p}{2\sqrt{a}}}^{+\infty} e^{-s^2 + \frac{p^2}{4a^2}} \frac{ds}{\sqrt{a}} = \frac{p}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{p^2}{4a^2}} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{p}{2\sqrt{a}} \right). \\ \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-at} &\doteq e^{\frac{p^2}{4a^2}} \end{aligned}$$

On vérifierait que, pour  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp + \frac{p^2}{4a^2}} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{p}{2\sqrt{a}} \right) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp + \frac{p^2}{4a^2}} dp = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-at} \end{aligned}$$

et, pour  $t < 0$ ,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp + \frac{p^2}{4a^2}} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{p}{2\sqrt{a}} \right) dp = 0, \\ &\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp + \frac{p^2}{4a^2}} dp = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-at}. \end{aligned}$$

Enfin, la condition  $c > \beta$  apparaît quelquefois comme une restriction gênante; aussi préfère-t-on souvent énoncer le théorème d'inversion sous cette autre forme : la formule d'inversion de Mellin est valable avec  $c > \alpha$  à condition de considérer l'intégrale comme prise au sens de Césaró (C, 1), c'est-à-dire

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{c-i\lambda}^{c+i\lambda} \left[ 1 - \frac{|p|}{\lambda} \right] e^{tp} \varphi(p) \frac{dp}{p}.$$

## SECONDE PARTIE.

### LE CALCUL SYMBOLIQUE ET L'ÉTUDE DES FONCTIONS.

Nous allons à présent, comme nous l'avons annoncé, montrer que le calcul symbolique permet de trouver aisément les principales propriétés d'un grand nombre de fonctions.

Nous nous référerons systématiquement aux tableaux I et II des pages 71, 72. Les notations  $(n, I)$ ,  $(m, I)$  désigneront respectivement la formule  $(n)$  du tableau I, la formule  $(m)$  du tableau II.

**1. Fonctions de Bessel [30].** — La fonction  $J_n(t)$  de Bessel est définie par la série

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}}{(n+1, m) m!},$$

où  $n$  est quelconque, et où, pour simplifier, on pose

$$(n+1, m) = (n+1)(n+2)\dots(n+m).$$

Pour trouver son image symbolique, modifions légèrement cette définition en remplaçant  $t$  par  $2\sqrt{t}$ ,

$$J_n(2\sqrt{t}) = \frac{t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m}{m! (n+1, m)},$$

d'où

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{m+n}}{m! (n+1, m) \Gamma(n+1)}$$

et, en prenant les images de chacun des termes de la série (1),

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \supset \sum \frac{(-1)^m \Gamma(m+n+1)}{m!(n+1, m) \Gamma(n+1) p^{m+n}}.$$

Mais on a visiblement

$$\Gamma(m+n+1) = (n+1)(n+2)\dots(n+m)\Gamma(n+1),$$

de sorte que le second membre se réduit à

$$\frac{1}{p^n} \sum_m \frac{(-1)^m}{m! p^m} = \frac{1}{p^n} e^{-\frac{1}{p}},$$

d'où finalement l'image fondamentale

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \supset p^{-n} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Démontrons alors quelques-unes des propriétés des fonctions de Bessel, à partir de cette relation symbolique. Appliquons d'abord la formule (1, I), en supposant  $n$  différent de zéro : au premier membre, on aura la dérivée

$$\frac{d}{dt} \left[ t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \right] = \frac{n}{2} t^{\frac{n-2}{2}} J_n(2\sqrt{t}) + t^{\frac{n-1}{2}} J'_n(2\sqrt{t}),$$

et au second membre,

$$p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}},$$

qui est l'image de

$$t^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{t}),$$

d'où, en remplaçant  $2\sqrt{t}$  par  $t$ , et en simplifiant, la *formule de récurrence* entre fonctions  $J$  et  $J'$ ,

$$t J_{n-1}(t) = n J_n(t) + t J'_n(t).$$

De même, l'application de la formule (5, I) donnerait la *formule de récurrence* entre fonctions  $J$  contiguës

$$J_{n+1}(t) + J_{n-1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t).$$

---

(1) Voir remarque faite plus haut, page 19.

Enfin on obtiendra aisément l'équation différentielle des fonctions de Bessel. Si nous posons

$$y = t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \supset p^{-n} e^{-\frac{1}{p}},$$

on aura

$$y' \supset p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}},$$

$$y'' \supset p^{-n+2} e^{-\frac{1}{p}}$$

et

$$t y'' \supset -p \frac{d}{dp} \left[ p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}} \right] = (n-1) p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}} - p^{-n} e^{-\frac{1}{p}};$$

d'où

$$t y'' = (n-1) y' - y.$$

On déduira aussi de la représentation symbolique indiquée la valeur de  $J_{-\frac{1}{2}}(t)$ . Considérons en effet la séquence (16) (page 21) : on aura, en partant de

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \frac{p}{p+1} \supset e^{-t}, & f(t) &= e^{-t}, \\ \sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right) &= \sqrt{p} e^{-\frac{1}{p}} \subset t^{-\frac{1}{4}} J_{-\frac{1}{2}}(2\sqrt{t}) = h(t) \end{aligned}$$

et

$$\frac{p^2}{p^2+1} \subset \frac{\sqrt{\pi}}{2} t \left[ \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(t) \right];$$

donc

$$\cos t = \sqrt{\frac{\pi t}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(t)$$

et la valeur de  $J_{\frac{1}{2}}(t)$  s'obtiendrait d'une manière analogue.

Établissons à présent la *représentation intégrale* d'une fonction de Bessel. Considérons les deux correspondances

$$\varphi_1(p) = p^{m-n} \subset \frac{t^{n-m}}{\Gamma(n-m+1)},$$

avec  $n - m > 1$ , et

$$\varphi_2(p) = p^{1-m} e^{-\frac{1}{p}} \subset t^{\frac{m-1}{2}} J_{m-1}(2\sqrt{t})$$

Appliquons la *formule du produit, de composition*, on a

$$\frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_2(p) = p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \mathfrak{C} t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t});$$

donc

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) = \frac{1}{\Gamma(n-m+1)} \int_0^t (t-u)^{n-m} u^{\frac{m-1}{2}} J_{m-1}(2\sqrt{u}) du.$$

Remplaçons  $2\sqrt{t}$  par  $t$ , et  $2\sqrt{u}$  par  $u$

$$t^n J_n(t) = \frac{2^{m-n}}{\Gamma(n-m+1)} \int_0^t (t^2-u^2)^{n-m} u^m J_{m-1}(u) du.$$

Faisons à présent  $m = \frac{1}{2}$  : au second membre apparaît la fonction de Bessel d'indice  $-\frac{1}{2}$  : d'où, après réductions,

$$t^n J_n(t) = \frac{2^{1-n}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \int_0^t (t^2-u^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos u du.$$

Posons enfin dans l'intégrale  $u = t \sin \theta$  : on obtient la formule cherchée

$$J_n(t) = \frac{2^{1-n} t^n}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta \cos(t \sin \theta) d\theta.$$

Demandons-nous maintenant quelle est l'image d'une fonction de Bessel d'argument  $t$ , et non plus d'argument  $2\sqrt{t}$ . Il suffira d'appliquer la formule (18) (première partie) : on a

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \supset p^{-n} e^{-\frac{1}{p}};$$

donc

$$t^n J_n(2t) \supset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2 x^2}{4}} x^{2n} e^{-x^2} dx.$$

Divisons  $t$  par 2, ce qui revient (4, I) à multiplier  $p$  par 2, et remplaçons en même temps dans l'intégrale  $x$  par  $\frac{s}{2}$

$$2^n t^n J_n(t) \supset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4} (p^2+1)} s^{2n} ds$$

et, en posant

$$s = \frac{2u}{\sqrt{p^2+1}},$$

$$2^n t^n J_n(t) \supset \frac{2^{2n+1} p}{\sqrt{\pi}(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2n} du.$$

Supposons maintenant  $n$  entier  $> 0$ ; l'intégrale du second membre est alors classique, et égale à

$$\frac{1.3\dots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}},$$

d'où enfin

$$t^n J_n(t) \supset 1.3\dots(2n-1) \frac{P}{(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

En particulier

$$J_0(t) \supset \frac{P}{\sqrt{p^2+1}}.$$

On en déduira, en appliquant les formules de récurrence,

$$J_n(t) \supset \frac{P}{\sqrt{p^2+1}} (\sqrt{p^2+1} - p)^n,$$

on peut démontrer que cette relation reste valable même pour  $n$  non entier.

Enfin diverses propriétés, plus difficiles à démontrer par le calcul ordinaire : voici par exemple deux formules établies par Van der Pol [23].

1° Appliquons la formule du produit aux deux fonctions

$$\varphi_1(p) = \varphi_2(p) = \frac{P}{\sqrt{p^2+1}} \subset J_0(t),$$

on aura

$$\frac{1}{p} \frac{P^2}{p^2+1} \subset \int_0^t J_0(t-u) J_0(u) du,$$

d'où la relation

$$\int_0^t J_0(t-u) J_0(u) du = \sin t.$$

2° Dérivée de  $J_n$ , par rapport à l'indice  $n$  : écrivons encore

$$p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \subset t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t})$$

et dérivons les deux membres par rapport à  $n$

$$-p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \log p < \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2}} \log t J_n(2\sqrt{t}) + t^{\frac{n}{2}} \frac{\partial}{\partial n} J_n(2\sqrt{t}).$$

Mais le premier membre peut s'écrire

$$\frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_2(p),$$

avec

$$\varphi_1(p) = -\log p < \log t + \gamma,$$

$$\varphi_2(p) = p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}} < t^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{t})$$

et son image, d'après le théorème du produit, sera donc

$$\int_0^t [\log(t-u) + \gamma] u^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{u}) du,$$

ce qui conduit, après un changement de variables, à la formule très remarquable

$$\frac{\partial J_n(t)}{\partial n} = \left[ \log \frac{t}{2} + \gamma \right] J_n(t) + \int_0^t \log \left( 1 - \frac{y^2}{t^2} \right) \left( \frac{y}{t} \right)^n J_{n-1}(y) dy.$$

**2. Fonctions de Kelvin.** — La physique mathématique utilise souvent les fonctions *ber* et *bei* de Kelvin, définies par

$$J_0(ti\sqrt{i}) = bert + i beit.$$

Leurs images sont aisées à écrire : comme on a

$$J_0(2\sqrt{t}) > e^{-\frac{1}{p}},$$

il suffira de multiplier  $\sqrt{t}$  par  $i^{\frac{1}{2}}$ , donc  $t$  par  $-i$ , et par conséquent de diviser  $p$  par  $-i$  au second membre, pour obtenir, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$ber(2\sqrt{t}) > \cos \frac{1}{p},$$

$$bei(2\sqrt{t}) > \sin \frac{1}{p},$$

formules signalées pour la première fois par Van der Pol [23].

De la même manière, en partant de la représentation

$$J_0(t) > \frac{P}{\sqrt{P^2 + 1}},$$

on sera conduit à [31]

$$\begin{aligned} ber t &\supset \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{p^4+1}} + \frac{p^2}{p^4+1} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ bei t &\supset \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{p^4+1}} - \frac{p^2}{p^4+1} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule du produit, on aura

$$2 \int_0^t ber(t-u) bei u du \supset \frac{P}{p^4+1}.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \sin \lambda t &\supset \frac{\lambda p}{p^2 + \lambda^2}, \\ \operatorname{sh} \lambda t &\supset \frac{\lambda p}{p^2 - \lambda^2}, \end{aligned}$$

on pourra écrire

$$\operatorname{sh} \lambda t - \sin \lambda t \supset \frac{2p\lambda^3}{p^4 - \lambda^4},$$

d'où le résultat

$$\int_0^t ber(t-u) bei u du = \frac{\operatorname{sh} t \sqrt{i} - \sin t \sqrt{i}}{4i \sqrt{i}}.$$

**3. Logarithme intégral et fonctions connexes.** — Très importantes dans de nombreux problèmes sont les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \frac{e^u du}{u} &= E i(t) \quad (\text{logarithme intégral}), \\ - \int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du &= c i(t) \quad (\text{cosinus intégral}), \\ - \int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u} du &= s i(t) \quad (\text{sinus intégral}), \end{aligned}$$

qui satisfont à la relation

$$E i(it) = c i(t) + i s i(t).$$

Leurs images s'obtiennent immédiatement à partir de celles de l'exponentielle, du sinus et du cosinus, en appliquant la relation (8', I): on trouvera

$$\begin{aligned} E i(t) &\supset -\log(p-1), \\ c i(t) &\supset -\log \sqrt{p^2+1}, \\ s i(t) &\supset -\operatorname{arc} \operatorname{tg} p. \end{aligned}$$

On peut aussi considérer la fonction  $Ei$  comme image, et non comme original : on connaît en effet le développement

$$Ei(p) = \frac{e^p}{p} \sum_0^{\infty} \frac{m!}{p^m},$$

qu'on peut écrire

$$-p e^p Ei(-p) = \sum \frac{m!}{(-p)^m},$$

Mais

$$\sum \frac{m!}{(-p)^m} \subset \sum (-t)^m = \frac{1}{1+t},$$

d'où

$$-p e^p Ei(-p) \subset \frac{1}{1+t}.$$

Appliquons la formule du produit à cette fonction et à la fonction  $(1-t)^{-1}$ , laquelle a pour image  $p e^{-p} Ei(p)$ ; nous trouvons

$$-p Ei(p) Ei(-p) \subset \int_0^t \frac{du}{(1-t-u)(1-u)} = -\frac{\log(1-t^2)}{t},$$

ou encore

$$p Ei(ip) Ei(-ip) \subset \frac{\log(1+t^2)}{t}.$$

Mais le premier membre est

$$p [c i^2(p) + s i^2(p)],$$

ce qui conduit à la formule, établie par Enneper,

$$c i^2(p) + s i^2(p) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-p^2 t} \log(1+t^2)}{t} dt.$$

Ainsi l'image de  $\frac{\log(1+t^2)}{t}$  est  $p [c i^2(p) + s i^2(p)]$ . D'autre part, l'original de  $\frac{\log(1+p^2)}{p}$  se calculera aisément : on a, en effet,

$$\log \sqrt{1+p^2} \subset -c i(t),$$

d'où (2, I)

$$\frac{\log(1+p^2)}{p} \subset -2 \int_0^t c i(u) du = -2 [t c i(t) - \sin t].$$

Appliquons alors la formule 15 : il vient la relation

$$c i^2(p) + s i^2(p) = -2 \int_0^\infty \frac{tc i(t) - \sin t}{(p+t)^2} dt$$

qui après, une intégration par parties, en se souvenant que  $c i(t)$  s'annule à l'infini, conduit à une formule beaucoup plus simple que celle d'Enneper [27]

$$c i^2(p) + s i^2(p) = -2 \int_0^\infty \frac{c i(t)}{p+t} dt.$$

**4. Intégrales de Fresnel et de Gilbert.** — L'optique mathématique utilise les intégrales de Fresnel, définies par

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^t J_{\frac{1}{2}}(u) du,$$

$$C(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^t J_{-\frac{1}{2}}(u) du,$$

ainsi que les intégrales de Gilbert,

$$P_\lambda(p) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x^2} dx.$$

Plusieurs propriétés de ces fonctions peuvent être obtenues symboliquement. On a, en se reportant aux images symboliques des fonctions de Bessel,

$$S(t) \supset \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p^2+1}},$$

$$C(t) \supset \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p^2+1}}.$$

Pour ne donner qu'un exemple, calculons, par la formule

$$t f(t) \supset -p \varphi'(p),$$

l'image de  $tS(t)$  : nous trouverons

$$tS(t) \supset \frac{1}{p} \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p^2+1}} \left[ \frac{p}{2\sqrt{p^2+1}} + \frac{p^2}{p^2+1} + 1 \right].$$

Au second membre apparaît le produit

$$\frac{1}{p} \varphi_1(p) [\varphi_2(p) + \varphi_3(p) + \varphi_4(p)],$$

où

$$\begin{aligned}\varphi_1(p) &\subset S(t), \\ \varphi_2(p) &\subset \frac{J_0(t)}{2}, \\ \varphi_3(p) &\subset \cos t, \\ \varphi_4(p) &\subset 1,\end{aligned}$$

d'où, par application de la formule du produit, la relation

$$t S(t) = \int_0^t \left[ \frac{J_0(t-u)}{2} + \cos(t-u) + 1 \right] S(u) du,$$

qu'une dérivation transformera en équation intégrale vérifiée par la fonction S

$$S(t) = t J_{\frac{1}{2}}(t) + \int_0^t [J_1(t-u) + 2 \sin(t-u)] S(u) du.$$

Quant aux intégrales de Gilbert, on a, par leur définition même

$$p P_\lambda(p) \subset \frac{t^{\lambda-1}}{1+t^2}$$

et

$$P_\lambda(p) \subset \int_0^t \frac{x^{\lambda-1}}{1+x^2} dx,$$

en particulier,

$$\begin{aligned}P_1(p) &\subset \text{arc } \text{tg } t, \\ P_2(p) &\subset \log \sqrt{1+t^2},\end{aligned}$$

d'où, par application de la séquence (15) de la première partie,

$$P_1(p) = -p \int_0^\infty \frac{si(x)}{(p+x)^2} dx,$$

$$P_2(p) = -p \int_0^\infty \frac{ci(x)}{(p+x)^2} dx$$

et, comme on a la relation facile à vérifier

$$P_{\lambda+2} + P_\lambda = \Gamma(\lambda) p^{-\lambda},$$

on voit que les intégrales de Gilbert s'exprimeront, pour toutes les valeurs entières de  $\lambda$ , et suivant sa parité, par le sinus intégral ou par le cosinus intégral [33].

5. **Polynomes de Laguerre.** — Les polynomes de Laguerre sont définis par

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}).$$

On a

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, \\ L_1(t) &= -t + 1, \\ L_2(t) &= t^2 - 4t + 2, \\ L_3(t) &= -t^3 + 9t^2 - 18t + 6, \\ L_4(t) &= t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et, plus généralement,

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s n(n-1)\dots(s+1)t^s \\ &= \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} C_n^s n(n-1)\dots(n-s+1)t^{n-s} \\ &= \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \frac{[n(n-1)\dots(n-s+1)]^2}{s!} t^{n-s} \\ &= (-1)^n \left[ t^n - \frac{n^2}{1!} t^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} t^{n-2} + \dots + (-1)^n n! \right]. \end{aligned}$$

On démontre que la suite

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n!} e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)$$

est orthonormée sur  $(0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} L_m(t) L_n(t) dt = (n!) \delta_{mn},$$

$\delta_{mn}$  désignant le symbole de Kronecker.

L'image de  $L_n(t)$  est immédiate. On a, d'après (6, I) et (1, II),

$$t^n e^{-t} \succ \frac{n! p}{(p+1)^{n+1}}$$

et, en vertu de (1, I) et (4', I),

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) &= \left[ \frac{p}{p+1} \right]^{n+1} (n!), \\ e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) &= \left[ \frac{p}{p-1} \right] \left[ \frac{p-1}{p} \right]^{n+1} (n!), \end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{n!} L_n(t) \supset \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \frac{d}{dt} L_n(t) &\supset p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n - n! \\ - \frac{1}{n!} t \frac{dt}{dt} L_n(t) &\supset \frac{n}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-1}, \\ \frac{1}{n!} t \frac{d^2}{dt^2} L_n(t) &\supset -p \frac{d}{dp} \left[ p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n - p(n!) + n(n!) \right] \\ &= -p \left[ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n + \frac{n}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-1} - n! \right], \end{aligned}$$

ce qui conduit à constater immédiatement que  $L_n(t)$  est solution de l'équation différentielle homogène

$$t y'' + (1-t) y' + n y = 0.$$

A partir de l'image de  $L_n(t)$  on retrouve immédiatement la fonction génératrice des polynomes de Laguerre. En effet, posons

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \frac{x^n}{n!} = K(t, x).$$

Or, on peut démontrer (voir p. 168 de la référence [13]), que

$$\left| \frac{L_n(t)}{n!} \right| \leq e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Il est donc possible, d'après ce qui a été dit précédemment (p. 19) de prendre les images termes à termes

$$K(t, x) \supset \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n x^n = \frac{p}{p(1-x) + x},$$

d'où la fonction génératrice

$$K(t, x) = \frac{e^{-tx}}{1-x}.$$

Les égalités évidentes

$$(1-x)^2 \frac{\partial K}{\partial x} = (1-t-x) K(t, x),$$

$$(1-x) \frac{\partial K}{\partial t} = -x K(t, x)$$

conduisent aux formules de récurrence bien connues

$$\begin{aligned} L_{n+1}(t) - (2n+1-t)L_n(t) + nL_{n-1}(t) &= 0, \\ L'_n(t) - nL'_{n-1}(t) &= -nL_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Le produit de composition  $L_m(t) \star L_n(t)$  possède une propriété commune à toute suite  $f_m(t)$  telle que  $f_m(t) \supset [\varphi(p)]^m$ . On a

$$\frac{1}{p} [\varphi(p)]^{m+n} \subset f_m(t) \star f_n(t) = \int_0^t f_{m+n}(t) dt$$

et, dans le cas présent,

$$L_m(t) \star L_n(t) = \frac{1}{(m!)(n!)} \int_0^t L_{m+n}(x) dx.$$

Dans une correspondance  $f(t) \supset \varphi(p)$ , posons

$$p = (1-z)^{-1}, \quad \varphi(p) = \psi(z);$$

du développement de Mac Laurin

$$\psi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \left(1 - \frac{1}{p}\right)^s$$

on peut déduire immédiatement le développement de  $f(t)$  en série de polynomes de Laguerre [36], [41].

$$f(t) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \frac{L_s(t)}{s!}.$$

*Les polynomes de Laguerre généralisés*

$$L_n^k(t) = t^{-k} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+k} e^{-t})$$

conduisent, ainsi qu'il est aisé de le vérifier en opérant comme plus haut, à la correspondance

$$t^k L_n^k(t) \supset \frac{\Gamma(n+k+1)}{p^k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

**6. Les fonctions  $\nu(t, n)$  et  $\mu(t, m, n)$ .** — L'équation intégrale de Volterra

$$(1) \quad f(t) = \int_0^t K(t, x) y(x) dx,$$

où  $y(x)$  désigne une fonction inconnue, intervient en mécanique (lors de l'étude du pendule tautochrone, en théorie des mouvements vibratoires, etc.), en statistique, en biologie. Dans le cas général, et si  $K(t, t)$  n'est pas identiquement nul, on rattache la résolution de l'équation (1) (ou équation de première espèce) à la résolution de la suivante :

$$(2) \quad f'(t) = K(t, t) y(t) + \int_0^t \frac{\partial K(t, x)}{\partial t} y(x) dx,$$

dite équation de seconde espèce, obtenue en dérivant les deux membres de (1); on adopte pour forme canonique de l'équation de seconde espèce

$$f(t) = y(t) + \int_0^t N(t, x) y(x) dx.$$

Dans le cas particulier où le noyau  $K(t, x)$  est de la forme  $K(t - x)$  (noyau appartenant au groupe du *cycle fermé*), l'équation de première espèce peut s'écrire

$$f(t) = K(t) \star y(t),$$

de sorte qu'il suffit de poser

$$\varphi(t) \subset f(t), \quad K(t) \supset \omega(p), \quad y(t) \supset Y(p)$$

pour obtenir [34], [37]

$$y(t) \supset Y(p) = \frac{p \varphi(p)}{\omega(p)},$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{e^{tp} \varphi(p)}{\omega(p)} dp.$$

Les fonctions  $\nu(t; n)$ ,  $\mu(t; m, n)$  s'introduisent tout naturellement quand le noyau est de la forme

$$(3) \quad K(u) = \sum_{r=0}^{r=n} a_r (\log_c u)^r \quad (u = t - x),$$

les coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_n$  étant supposés réels. D'après un résultat établi antérieurement (p. 20), l'image de  $K(t)$

$$K(t) \supset \omega(p) = \sum_{r=0}^n b_r (\log p)^r$$

est un polynome  $P(\zeta)$ , où  $\zeta = \log p$ , de même degré que  $K(e^u)$  polynome en  $u$ ; les coefficients  $b_r$  se déduisant des coefficients  $a_r$  [35 c].

La méthode de résolution qui vient d'être exposée montre immédiatement que l'inconnue  $y(t)$  sera une somme de produits de composition dans lesquels l'un des facteurs sera obligatoirement une fonction ayant pour image l'une des quatre expressions suivantes :

$$\begin{aligned} (\log p + \alpha)^{-1} &= (\log p e^\alpha)^{-1}, & (\log p + \alpha)^{-m} &= (\log p e^\alpha)^{-m}, \\ [(\log p + \alpha)^2 + \beta^2]^{-1} &= [(\log p e^\alpha)^2 + \beta^2]^{-1}, \\ [(\log p + \alpha)^2 + \beta^2]^{-m} &= [(\log p e^\alpha)^2 + \beta^2]^{-m} \end{aligned}$$

$\alpha$  et  $\beta$  désignant des constantes réelles,  $m$  un entier positif. Le problème, compte tenu de la règle opérationnelle (4, I), revient à déterminer les originaux de

$$\begin{aligned} (\log p)^{-1}, & (\log p)^{-m}, \\ [(\log p)^2 + \beta^2]^{-1}, & [(\log p)^2 + \beta^2]^{-m}. \end{aligned}$$

En faisant  $f(t) = U(t - n) \supset e^{-np}$  dans (9, I), on obtient

$$(4) \quad p^{-n} (\log p)^{-1} \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^{s+n}}{\Gamma(s+n+1)} ds = \nu(t; n) \quad (n > 0).$$

Avec

$$f(t) = \frac{(t-m)^m}{(m+1)} U(t-n) \supset p^{-m} e^{-np} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

on trouve

$$(5) \quad p^{-n} (\log p)^{-m-1} \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^{s+n} s^m ds}{\Gamma(s+n+1) \Gamma(m+1)} = \mu(t; m, n).$$

Déterminons maintenant les images de  $\mathcal{R} \{ \nu(t e^{i\theta}; n) \}$ ,  $\mathcal{J} \{ \nu(t e^{i\theta}; n) \}$ , partie réelle et partie imaginaire de  $\nu(t e^{i\theta}; n)$ ,  $t$  étant la variable et  $\theta$  un paramètre, tous deux supposés réels. On a

$$\begin{aligned} \nu(t e^{i\theta}; n) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{s+n} e^{i\theta(s+n)}}{\Gamma(s+n+1)} ds = \int_n^{+\infty} \frac{t^w e^{i\theta w}}{\Gamma(w+1)} dw, \\ \mathcal{R} \{ \nu(t e^{i\theta}; n) \} &= (\cos n\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^\nu \cos \theta(\nu-n)}{\Gamma(\nu+1)} U(\nu-n) d\nu \\ &\quad - (\sin n\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^\nu \sin \theta(\nu-n)}{\Gamma(\nu+1)} U(\nu-n) d\nu, \\ \mathcal{J} \{ \nu(t e^{i\theta}; n) \} &= (\cos n\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^\nu \sin \theta(\nu-n)}{\Gamma(\nu+1)} U(\nu-n) d\nu \\ &\quad - (\sin n\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^\nu \cos \theta(\nu-n)}{\Gamma(\nu+1)} U(\nu-n) d\nu, \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (3, II), (3', II), (7, I), (9, I),

$$(6) \quad \mathcal{R} \{ \nu(t e^{i\theta}; n) \} \supset \frac{(\cos n\theta) \log p - \theta \sin n\theta}{p^n [(\log p)^2 + \theta^2]},$$

$$(7) \quad \mathcal{J} \{ \nu(t e^{i\theta}; n) \} \supset \frac{(\sin n\theta) \log p + \theta \cos n\theta}{p^n [(\log p)^2 + \theta^2]}.$$

On trouve, de même,

$$(8) \quad \mathcal{R} \{ \mu(t e^{i\theta}; m, n) \} \supset \frac{(\cos n\theta) \log p - \theta \sin n\theta}{p^n [(\log p)^2 + \theta^2]^{m+1}},$$

$$(9) \quad \mathcal{J} \{ \mu(t e^{i\theta}; m, n) \} \supset \frac{(\sin n\theta) \log p + \theta \cos n\theta}{p^n [(\log p)^2 + \theta^2]^{m+1}}.$$

Le problème de la représentation des solutions des équations intégrales de Volterra dont les noyaux, appartenant au groupe du cycle fermé, sont donnés par l'expression (3) est donc résolu.

La règle (9, I) appliquée aux correspondances (4) et (5) fournira

$$(10) \quad (\log p)^{-n-1} (\log \log p)^{-1} \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\Gamma(s+1)} \nu(s; n) ds,$$

$$(11) \quad (\log p)^{-n-1} (\log \log p)^{-m-1} \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\Gamma(s+1)} \mu(s; m, n) ds.$$

Notons que l'image de  $\nu(f(t); n)$  se déduit éventuellement de celle de  $[f(t)]^s$ . Par exemple,

$$(12) \quad \nu(e^{-t}; 0) \supset p \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(p+s) \Gamma(s+1)}.$$

Les transcendantes  $\nu(t; n)$ ,  $\mu(t; m, n)$ , considérées en tant qu'images, sont susceptibles de conduire à de nombreuses correspondances symboliques. On a

$$(13) \quad p e^{np} \nu(e^{-p}; n) \subset \frac{1}{\Gamma(t+n+1)},$$

$$(14) \quad p e^{np} \mu(e^{-p}; m, n) \subset \frac{t^m}{\Gamma(t+n+1) \Gamma(m+1)},$$

d'où aussi, par application de (9, I),

$$(15) \quad p^n \nu\left(\frac{1}{p}; n\right) \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\Gamma(s+1) \Gamma(s+n+1)} ds,$$

$$(16) \quad p^n \mu\left(\frac{1}{p}; m, n\right) \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^s s^m}{\Gamma(s+1) \Gamma(s+m+1)} ds.$$

D'autre part, toute transformée de la forme  $\varphi_1(p) [\varphi_2(p)]^s$  fournit éventuellement une correspondance où l'image est  $\varphi_1(p) \nu(\varphi_2(p); n)$ . Ainsi, les correspondances établies plus haut pour  $J_n(t)$  et  $J_n(2\sqrt{t})$  fournissent

$$(17) \quad p(p^2+1)^{-\frac{1}{2}} \nu(\sqrt{p^2+1}-p) \subset \int_0^{+\infty} \frac{J_s(t)}{\Gamma(s+1)} ds,$$

$$(18) \quad e^{-\frac{1}{p}} \nu\left(\frac{1}{p}; n\right) \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{s}{2}} J_s(2\sqrt{t})}{\Gamma(s+1)} ds.$$

Enfin, le tableau I pourrait être complété par plusieurs règles opérationnelles faisant intervenir les transcendentes  $\nu$  et  $\mu$ ; nous citerons uniquement la règle

$$(19) \quad (p \log p)^{-1} \varphi(\log p) \subset \int_0^{+\infty} \nu(t, s) f(s) ds$$

et qui résulte directement de (4).

(Pour quelques autres règles analogues, consulter [35 a] et [35 e]).

De toutes les correspondances et règles établies ci-dessus on pourra déduire bien des propriétés importantes des fonctions envisagées, comme l'illustrent les quelques exemples suivants.

#### a. L'identité

$$p^{-n_1-n_2-1} (\log p)^{-m_1-m_2} \equiv \frac{1}{p} [p^{-n_1} (\log p)^{-m_1}] [p^{-n_2} (\log p)^{-m_2}]$$

correspond à la relation intégrale

$$(20) \quad \mu(t; m_1-1, n_1) \star \mu(t; m_2-1, n_2) = \mu(t; m_1+m_2-1, n_1+n_2+1).$$

#### b. En remarquant que

$$\frac{1}{(\sqrt{p})^{2n} \log \sqrt{p}} = \frac{2}{p^n \log p}$$

et en appliquant (11, I) à (4), on obtient

$$(21) \quad 2\nu(t; n) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} \nu(x; 2n) dx,$$

d'où, en remarquant de plus que

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \nu(t; n) = \nu(t; n-k),$$

la propriété pour  $\nu(t, 2n)$  de satisfaire à la relation intégrodifférentielle

$$(21') \quad {}_2y^{(n)}(x) = (\pi x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4x}} y(x) dx.$$

On établirait de même que  $\mu(x; m, 2n)$  est solution de

$$(21'') \quad {}_2m^{+1}y^{(n)}(x) = (\pi x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4x}} y(x) dx.$$

c. Une relation intégrale s'obtient en prenant

$$\varphi(p) = p^{-n}(\log p)^{-1} \subset \nu(t; n)$$

dans (19) :

$$\int_0^{+\infty} \nu(t; s) \nu(s; n) ds \supset (\log p)^{-n-2} (\log \log p)^{-1},$$

d'où, compte tenu de (9, I),

$$(22) \quad \int_0^{+\infty} \nu(t; s) \nu(s; n) ds = \int_0^{+\infty} \frac{t^s \nu(s; n+1)}{\Gamma(s+1)} ds.$$

d. De (1, I), (3, I), (5, I), on déduit que la relation intégrodifférentielle

$$t y'(t) - (\alpha + \beta - 1) y(t) = y^{(\alpha)}(t) \star y^{(\beta)}(t)$$

est vérifiée par  $y(t) = \nu(t; \alpha + \beta - 1)$ .

e. La formule d'inversion de Mellin fournit

$$\nu(t; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} e^{tp} (p \log p)^{-1} dp$$

et l'utilisation d'un contour d'intégration convenable et du théorème des résidus conduit (voir p. 28) à la relation de Ramanujan-Landau [35 c]

$$(23) \quad \nu(t; 0) = e^t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts} ds}{s[\pi^2 + (\log s)^2]}$$

qui peut aussi s'écrire

$$p[e^p - \nu(p, 0)] \subset t^{-1}[\pi^2 + (\log t)^2]^{-1}.$$

D'autre part, le développement

$$\frac{x}{\log x} = \sum_{n=0}^{\infty} i_n x^n$$

définit les *nombre de Cauchy*

$$i_0 = -1, \quad i_1 = \frac{1}{2}, \quad i_2 = \frac{1}{12}, \quad \dots$$

(ils sont positifs pour  $n = 1$  et tendent vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ ). En écrivant

$$(\log p)^{-1} = -\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \frac{1 - \frac{1}{p}}{\log\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)} = -\frac{i_0 p}{p-1} - \sum_{m=0}^{\infty} i_m \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{m-1}$$

et compte tenu de la correspondance relative aux polynomes de Laguerre, on obtient

$$\frac{p}{p-1} - \frac{1}{\log p} \subset e^t - \nu(t; 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i_{m+1} L_m(t)}{m!}.$$

On en déduit une représentation intégrale des nombres de Cauchy [38]

$$(23) \quad i_{m+1} = \frac{1}{m!} \int_0^{+\infty} [1 - e^{-t} \nu(t; 0)] L_m(t) dt \\ = \int_0^{+\infty} \frac{\xi^{m-1} d\xi}{(1+\xi)^m [\pi^2 + (\log \xi)^2]} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^m [\pi^2 + (\log u)^2]}.$$

(Pour l'établissement, par ces mêmes procédés, de quelques autres propriétés remarquables des transcendentes  $\nu$  et  $\mu$ , le lecteur pourra se reporter aux références [35 c], [35 d].)

Disons pour terminer que les fonctions  $\nu$  et  $\mu$  interviennent utilement dans l'étude de plusieurs transformations fonctionnelles. Ainsi, en posant

$$\bar{f}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\Gamma(x+y+1)} dx$$

(c'est la transformation intégrale de Fraser, définie plus haut, p. 8), on a

$$\bar{f}(y) = a^{-y} \mu(a; m, n), \quad \text{avec } f(x) = \frac{a^x x^m}{\Gamma(m+1)},$$

Ou encore, avec la transformation de Mellin (p. 6), on a

$$\mathfrak{M} \left\{ \frac{a^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)} \right\} = \Gamma(s) \mu(a; s, n).$$

**7. Fonctions périodiques.** — Si  $\lambda$  est un nombre positif quelconque, et si  $f(t)$  est nul pour  $t < 0$ , nous avons les formules

$$\begin{aligned} e^{-\lambda p} \varphi(p) &\subset 0 && (t < \lambda), \\ e^{-\lambda p} \varphi(p) &\subset f(t - \lambda) && (t > \lambda). \end{aligned}$$

Interprétons graphiquement ces correspondances.

Soit  $X'OAB$  la courbe représentative des variations de  $f(t)$  : l'original de  $e^{-\rho\lambda}\varphi(p)$  aura pour courbe représentative de ses variations la courbe  $X'CA'B'$ , déduite de la précédente par une translation parallèle à  $X'X$ , d'amplitude  $\lambda$ .

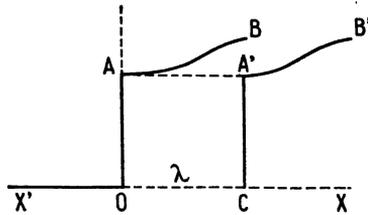


Fig. 2.

Il est alors possible de trouver les images de diverses fonctions périodiques : ainsi l'égalité symbolique

$$e^{-Kp} \subset U(t - K)$$

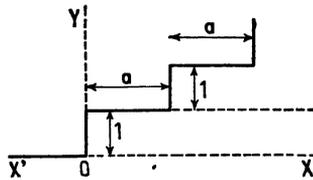


Fig. 3.

montrera que l'image de la *fonction gradins*,

$$U(t) + (t - a) + U(t - 2a) + \dots$$

est

$$1 + e^{-ap} + e^{-2ap} + \dots = (1 - e^{-ap})^{-1}.$$

De même, la *fonction créneaux*

$$U(t) - U(t - a) + U(t - 2a) - \dots$$

a pour image

$$1 - e^{-ap} + e^{-2ap} - e^{-3ap} + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{ap}{2}.$$

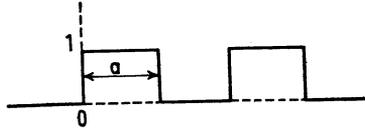


Fig. 4.

Soit encore la *fonction dents de scie*, qui est

$$f(t) = t - [t],$$

où  $[t]$  représente le plus grand nombre entier contenu dans  $t$ , et qui est liée à la théorie des oscillations de relaxation : d'après ce qu'on vient de dire sur la fonction gradins, on pourra écrire

$$\frac{1}{1 - e^{-p}} - 1 = \frac{1}{e^p - 1} \subset [t]$$

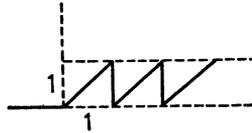


Fig. 5.

et par conséquent l'image de cette fonction dents de scie sera

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{e^p - 1}.$$

Ces résultats ont permis à Van der Pol [23 c] d'obtenir l'original de la fonction  $\zeta$  de Riemann, définie par

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

On peut, en effet, l'écrire

$$\zeta(p) = e^{-p \log 1} + e^{-p \log 2} + \dots$$

Mais

$$e^{-p \log n} \subset U(t - \log n),$$

L'original de  $\zeta(p)$  est donc la fonction passant de 0 à 1 pour  $t = \log 1$ , de 1 à 2 pour  $t = \log 2, \dots$ ; donc évidemment

$$\zeta(p) \subset [e^t].$$

A partir de cette représentation, Van der Pol a démontré plusieurs théorèmes connus relatifs aux nombres premiers.

Si nous revenons aux fonction périodiques, considérons une telle fonction  $f(t)$  et soit T sa période. Désignons par  $f_1(t)$  une fonction auxiliaire définie comme il suit :  $f_1(t) = f(t)$  dans l'intervalle (0, T);  $f_1(t) = 0$  pour toute valeur de  $t$  extérieure à cet intervalle. L'image de  $f_1(t)$  sera

$$\varphi_1(p) = p \int_0^T e^{-px} f_1(x) dx.$$

Développons  $f$  en série de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{ni\omega t} F(ni\omega),$$

où

$$F(ni\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ni\omega x} f(x) dx,$$

relation qui s'écrira

$$F(ni\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\varphi_1(ni\omega)}{ni\omega} = \frac{\varphi_1(ni\omega)}{2\pi in},$$

d'où les coefficients de la série de Fourier à partir de l'expression symbolique de la fonction auxiliaire  $f_1(t)$ .

Ainsi, cherchons le développement en série de Fourier à partir de la fonction périodique représentée par une sinusoïde dont on aurait supprimé toutes les alternances négatives

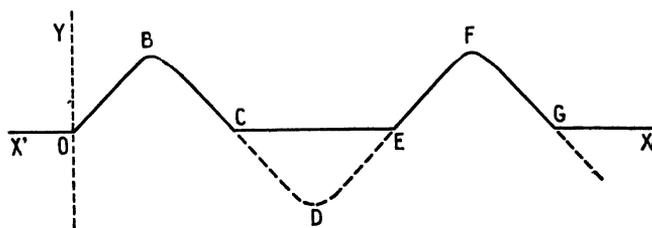


Fig. 6.

La courbe X'OBCDEFG... représente la fonction dont l'image est

$$\frac{p\omega}{p^2 + \omega^2},$$



tandis que la courbe constituée par la demi-droite X'C et la sinusoïde CDEFG... représente une fonction ayant pour image

$$\frac{-p\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-\frac{\pi}{\omega} p},$$

de sorte que la fonction auxiliaire, représentée ici par la demi-droite X'O, l'arche OBC et la demi-droite CX, a pour image

$$\frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \left( 1 + e^{-\frac{\pi}{\omega} p} \right).$$

Il en résulte, tous calculs faits,

$$F(ni\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - n^2},$$

d'où le développement en série de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - n^2} e^{ni\omega t},$$

qui s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \dots - \frac{2}{(4n^2 - 1)\pi} \cos 2n\omega t + \dots,$$

le coefficient de  $\sin \omega t$  s'obtenant en appliquant la règle de L'Hospital à l'expression

$$\frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - n^2},$$

qui est indéterminée pour  $n = \pm 1$ .

---

## TROISIÈME PARTIE.

## LE CALCUL SYMBOLIQUE ET LA THÉORIE DU CIRCUIT ÉLECTRIQUE.

Dans ce chapitre, nous étudierons à l'aide du calcul symbolique les régimes transitoires des circuits électriques. Nous envisagerons d'abord ceux à caractéristiques concentrées.

Ceux-ci conduisent à l'intégration de systèmes d'équations différentielles du second ordre, linéaires et à coefficients constants.

L'étude des phénomènes transitoires sur les lignes à caractéristiques uniformément réparties sera ensuite abordée. Elle nécessite l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles, appelées *équations des télégraphistes*.

**1. Équations différentielles linéaires à coefficients constants.** — Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(1) \quad A_0 \frac{d^m y}{dt^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + A_{m-1} \frac{dy}{dt} + A_m y = U(t).$$

Nous désignerons par  $y^{(n)}(0)$  la valeur prise par  $\frac{d^n y}{dt^n}$  pour  $t = 0$ .

Multiplions les deux membres de (1) par  $e^{-pt}$ ,  $p$  étant un nombre positif quelconque, et intégrons terme à terme entre zéro et l'infini.

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^n y}{dt^n} dt &= \left[ e^{-pt} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right]_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} dt \\ &= -y^{(n-1)}(0) - p y^{(n-2)}(0) - \dots + p^n \int_0^\infty e^{-pt} y dt. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_0^\infty e^{-pt} U(t) dt = \frac{1}{p}.$$

Soit  $Z(p)$  le polynome

$$A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \dots + A_m$$





fonction  $y_v$  dans le cas particulier où les conditions (4) sont réalisées et où l'on a  $f_n(t) = U(t)$ . Cette détermination s'effectue directement à partir de la fonction rationnelle

$$\frac{\Delta_{nv}}{\Delta} = \frac{H(p)}{Z(p)}.$$

Le paragraphe suivant donne la justification de deux règles importantes énoncées à ce sujet par Heaviside.

**2. Retour sur les méthodes opérationnelles.** — *a.* Développons  $y_v$  en série entière

$$y_v = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$$

On en déduit

$$\int_0^\infty e^{-pt} y_v dt = \frac{1}{p} \left( \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{2! \alpha_2}{p^2} + \dots \right)$$

Mais on doit avoir

$$\frac{H(p)}{Z(p)} = p \int_0^\infty e^{-pt} y_v dt \subset y_v(t).$$

Développons le premier membre suivant les puissances négatives de  $p$

$$\frac{H(p)}{Z(p)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2} + \dots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{2! \alpha_2}{p^2} + \dots,$$

d'où, par identification,

$$\alpha_0 = \alpha_0, \quad \frac{\alpha_1}{1!} = \alpha_1, \quad \frac{\alpha_2}{2!} = \alpha_2, \quad \dots,$$

et le théorème :

Ayant développé la fraction  $\frac{H(p)}{Z(p)}$  suivant les puissances entières et négatives de  $p$ , on en déduira le développement en série entière de  $y_v$  en remplaçant  $p^{-m}$  par  $\frac{t^m}{m!}$ .

*b.* Les  $C$  désignant des constantes, écrivons que

$$y_v(t) = C_1 e^{p_1 t} + \dots + C_m e^{p_m t},$$

$p_1, \dots, p_m$  désignant les  $m$  racines (supposées distinctes) de  $Z(p)$ . On a alors

$$\int_0^\infty e^{-pt} y_v(t) dt = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p - p_1} + \dots + \frac{C_m}{p - p_m}.$$

Écrivons

$$(5) \quad \frac{H(p)}{pL(p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} = \dots + \frac{M}{p-p_m};$$

comme le premier membre est égal à l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt,$$

on aura

$$C_0 = A, \quad C_1 = B, \quad \dots, \quad C_m = M.$$

Les règles bien connues de la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples permettent de calculer A, B, ... ,

$$A = \frac{H(0)}{L(0)}, \quad B = \frac{H(p_1)}{p_1 L'(p_1)}, \quad \dots$$

d'où le théorème du développement

$$\varphi(t) = \frac{H(0)}{L(0)} + \sum_{i=1}^m \frac{H(p_i)}{p_i L'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Les deux règles opérationnelles ainsi trouvées se justifient immédiatement en utilisant l'intégrale de Bromwich-Wagner : ainsi, en écrivant

$$\varphi(p) = \frac{H(p)}{L(p)} = a_0 + \frac{a_1}{p} + \dots + \frac{a_n}{p^n} + \dots$$

on trouve pour l'original  $f(t)$  de cette fonction.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots \right) \left( 1 + \frac{pt}{1!} + \frac{p^2 t^2}{2!} + \dots \right) dp.$$

En effectuant le produit, et en ordonnant suivant les puissances positives et négatives de  $p$ , on trouve un développement en série de Laurent valable dans une couronne circulaire ayant l'origine pour centre; la valeur de l'intégrale devant être égale au coefficient du terme en  $\frac{1}{p}$ , multiplié par  $2\pi i$ , on obtient bien

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1 t}{1!} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \dots$$

Quant au théorème du développement, il suffira pour le justifier de prendre pour contour d'intégration un cercle ayant l'origine pour

centre et contenant à son intérieur tous les pôles  $p_i$  de  $\frac{H(p)}{Z(p)}$ ; il n'y aura alors qu'à appliquer le théorème des résidus pour calculer l'intégrale de Bromwich-Wagner.

**3. Circuits à constantes localisées.** — Dans le cas de circuits électriques comportant des impédances localisées, la détermination des régimes transitoires exige la résolution de systèmes d'équations différentielles. Comme nous supposons de plus que les circuits envisagés sont linéaires et passifs, ces équations différentielles seront linéaires et à coefficients constants : nous pourrons donc utiliser les principes généraux que nous avons posés.

Supposons que, jusqu'à l'instant  $t = 0$ , le réseau électrique envisagé soit en équilibre, ce qui revient à dire que jusqu'à l'instant  $t = 0$  aucun courant ne circule dans les diverses branches, le réseau étant par hypothèses passif. Ayant divisé le réseau en un certain nombre de mailles indépendantes suivant la méthode classique, introduisons dans la première maille une f. é. m.  $U(t)$  : l'intensité du courant qui circulera dès lors dans la  $k^{\text{ème}}$  maille sera une certaine fonction du temps  $t$ , que nous désignerons par  $A_{k1}(t)$ , et qu'on appelle *admittance* caractéristique de la maille  $k$  par rapport à la maille 1.

Soit  $n$  le nombre de mailles indépendantes : proposons-nous de déterminer les  $n$  admittances caractéristiques

$$A_{11}(t), A_{21}(t), \dots, A_{n1}(t);$$

à cette fin, nous prendrons pour fonctions inconnues non pas les valeurs  $I_k(t)$  des intensités de courant dans les diverses mailles, mais les quantités

$$q_k = \int_0^t I_k(t) dt,$$

c'est-à-dire les charges électriques. Nous aurons alors le système

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{C_{11}} + R_{11} \frac{d}{dt} + \mathcal{L}_{11} \frac{d^2}{dt^2} \right) q_1 + \left( \frac{1}{C_{12}} + R_{12} \frac{d}{dt} + \mathcal{L}_{12} \frac{d^2}{dt^2} \right) q_2 + \dots &= U(t), \\ \left( \frac{1}{C_{21}} + R_{21} \frac{d}{dt} + \mathcal{L}_{21} \frac{d^2}{dt^2} \right) q_1 + \left( \frac{1}{C_{22}} + R_{22} \frac{d}{dt} + \mathcal{L}_{22} \frac{d^2}{dt^2} \right) q_2 + \dots &= 0, \\ \dots\dots\dots & \end{aligned}$$

tous les seconds membres étant nuls, sauf dans la première équation.

Les symboles  $R_{jk}$ ,  $R_{kj}$ ,  $C_{jk}$  représentent pour  $j \neq k$  les inductances, les résistances et les capacités mutuelles (ou communes)

des mailles  $j$  et  $k$ , et pour  $j = k$  l'inductance propre, la résistance et la capacité de la maille  $k$ . On a évidemment

$$\mathcal{L}_{jk} = \mathcal{L}_{kj}, \quad R_{jk} = R_{kj}, \quad C_{jk} = C_{kj}.$$

Les fonctions  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  étant déterminées, on en déduit aussitôt

$$A_{11}(t) = I_{11}(t) = \frac{dq_1}{dt} \dots$$

Quant aux admittances caractéristiques des diverses mailles par rapport à la maille  $j$ , il suffira pour les obtenir de résoudre un nouveau système d'équations différentielles identique au premier, mais avec remplacement de zéro par  $U(t)$  au second membre de la  $j^{\text{ème}}$  équation, et de  $U(t)$  par zéro au second membre de la première.

**4. Théorème de Pomey.** — Si la f. é. m. insérée dans la première maille est une fonction quelconque  $V(t)$  du temps  $t$ , le courant  $I_{1k}(t)$  qui circule dans la  $k^{\text{ème}}$  maille est

$$(6) \quad I_{1k}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t V(\theta) A(t-\theta) d\theta.$$

En effet, divisons l'intervalle  $(0, t)$  en  $n$  intervalles  $(0, \theta_1), (\theta_1, \theta_2), \dots, (\theta_{n-1}, t)$  et supposons qu'une f. é. m. constante  $V(0)$  agisse à partir de l'instant  $t = 0$ , qu'une f. é. m. constante  $V(\theta_1) - V(0)$  agisse à partir de l'instant  $t = \theta_1$ , qu'une f. é. m. constante  $V(\theta_2) - V(\theta_1)$  agisse à partir de l'instant  $t = \theta_2$ , et ainsi de suite. Chacune de ces f. é. m. provoquera la circulation d'un courant de la  $k^{\text{ème}}$  maille :  $A_{1k}(t) V(0)$  pour la première,  $A_{1k}(t - \theta_1) [V(\theta_1) - V(0)]$  pour la seconde, et ainsi de suite. Si nous faisons tendre  $n$  vers l'infini, il vient

$$(7) \quad I(t) = A(t) V(0) + \int_0^t A(t-\theta) V'(\theta) d\theta$$

(où l'on a supprimé les indices pour simplifier l'écriture). En intégrant par parties, on a

$$\int_0^t A(t-\theta) V'(\theta) d\theta = [A(t-\theta) V(\theta)]_0^t - \int_0^t V(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} A(t-\theta) d\theta,$$

d'où, en portant dans (7),

$$\begin{aligned} I(t) &= A(0) V(t) - \int_0^t V(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} A(t-\theta) d\theta \\ &= A(0) V(t) + \int_0^t V(\theta) \frac{\partial}{\partial t} A(t-\theta) d\theta, \end{aligned}$$

ce qui est identique à la formule (6), ainsi qu'on le voit aisément. Cette formule exprime le théorème de Pomey [39].

On voit donc que si

$$\varphi_1(p) \subset V(t),$$

$$\varphi_2(p) \subset A(t),$$

on a, en vertu du théorème du produit, la correspondance

$$\varphi_1(p) \varphi_2(p) \subset I(t).$$

Comme le théorème du produit subsiste par permutation des indices, les fonctions A et V seront commutatives, et la formule (6) s'écrira aussi

$$I(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t V(t-\theta) A(\theta) d\theta.$$

Le théorème de Pomey consiste à remplacer la courbe X'OAM représentative des variations de V(t) par la ligne brisée X'OABC... et à intégrer ensuite les effets produits par chaque échelon infiniment petit de cette ligne. Ce théorème n'est évidemment valable que dans le cas où il est licite de superposer les effets produits par chaque f. é. m. élémentaire, c'est-à-dire dans le cas de circuits à caractéristiques linéaires.

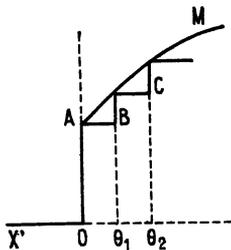


Fig. 7.

##### 5. Régimes transitoires de deux circuits oscillants couplés. —

Considérons, ainsi que l'indique la figure ci-après, le schéma le plus général de deux circuits oscillants couplés. Proposons-nous de déterminer les admittances caractéristiques des deux mailles MNPQ et M'NPQ' par rapport à la première d'entre elles.

Pour cela, nous déterminerons d'abord les fonctions

$$q_1(t) = \int_0^t A_{11}(t) dt, \quad q_2(t) = \int_0^t A_{12}(t) dt,$$

qui satisfont au système

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) q_1 + (R + R_1) \frac{dq_1}{dt} + \mathcal{L}_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_2}{C} + R \frac{dq_2}{dt} + \mathcal{N} \frac{d^2 q_2}{dt^2} = U(t),$$

$$\frac{q_1}{C} + R \frac{dq_1}{dt} + \mathcal{N} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) q_2 + (R_2 + R_1) \frac{dq_2}{dt} + \mathcal{L}_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0.$$

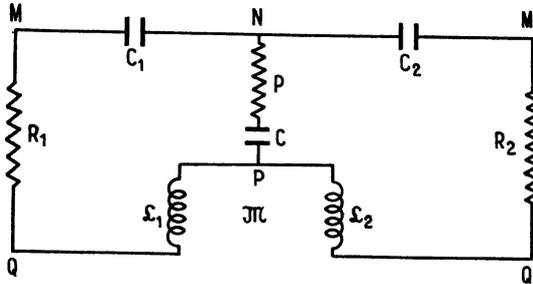


Fig. 8.

Posons

$$Q_1(p) \subset q_1(t), \quad Q_2(p) \subset q_2(t),$$

on aura

$$Q_1(p) = \frac{\mathcal{L}_2 p^2 + (R_1 + R_2) p + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2}}{Z(p)},$$

$$Q_2(p) = - \frac{\mathcal{N} p^2 + R p + \frac{1}{C}}{Z(p)},$$

avec

$$Z(p) = (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{N}^2) p^4 + [R(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{N}) + R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1] p^3$$

$$+ \left[ \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{N}}{C} + R(R_1 + R_2) + R_2 R_1 \right] p^2$$

$$+ \left[ \frac{R_1 + R_2}{C} + \frac{R + R_2}{C_1} + \frac{R + R_1}{C_2} \right] p$$

$$+ \frac{1}{C_1 C_2} + \frac{1}{C} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

On en déduit  $A_{11}(t)$  et  $A_{12}(t)$  sachant qu'ils ont respectivement pour images  $p_1$   $Q_1(p)$  et  $p_2$   $Q_2(p)$ . On obtiendra donc les  $A$  par le théorème du développement, si toutefois on connaît les racines de  $Z$ .

Envisageons quelques cas particuliers.

$\alpha$ . Dans le cas de deux circuits oscillants couplés électromagnétiquement, on a  $C = \infty$ ,  $R = 0$ , et

$$Z(p) = (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2) p^4 + (R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p^3 + \left( \frac{\mathcal{L}_2}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_1} + R_1 R_2 \right) p^2 + \left( \frac{R_2}{C_1} + \frac{R_1}{C_2} \right) p + \frac{1}{C_1 C_2},$$

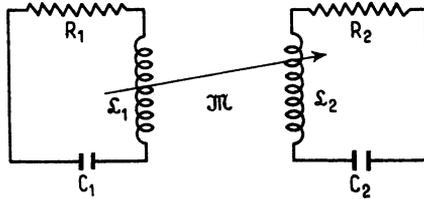


Fig. 9.

Si les quatre racines de ce polynôme sont complexes.

$$\begin{aligned} p_1 &= -\alpha_1 + i\omega_1, & p_2 &= -\alpha_1 - i\omega_1, \\ p_3 &= -\alpha_2 + i\omega_2, & p_4 &= -\alpha_2 - i\omega_2, \end{aligned}$$

le régime transitoire comportera (comme le montre le théorème du développement) deux termes oscillatoires amortis dont les pseudo-périodes sont respectivement  $\frac{2\pi}{\omega_1}$  et  $\frac{2\pi}{\omega_2}$ . Il peut ne comporter qu'une seule composante oscillatoire amortie (cas de deux racines réelles et deux racines complexes), ou pas du tout (les quatre racines réelles). Dans ce dernier cas, on peut affirmer que l'équation  $Z''(p) = 0$  a certainement deux racines réelles, la courbe représentative des variations de  $Z(p)$  comportant nécessairement deux points d'inflexion.

Cependant, la réciproque n'est pas vraie (voir la figure ci-après) : comme on a

$$\frac{1}{2} Z''(p) = 6(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2) p^2 + 3(R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p + \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + R_1 R_2,$$

nous pouvons écrire qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que le régime transitoire des circuits envisagés ne comporte aucune composante oscillatoire est

$$9(R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1)^2 > 24(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2) \left( \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + R_1 R_2 \right).$$

On voit, en particulier, qu'une telle condition est réalisée si le couplage est suffisamment serré.

Dans le cas d'un couplage parfait,  $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 = \mathcal{M}^2$ , et le polynome  $Z(p)$  est du troisième degré : l'équation  $Z(p) = 0$  aura au moins une racine réelle, et le régime transitoire comportera une seule composante oscillatoire, ou même n'en comportera aucune.

Lorsque les résistances  $R_1$  et  $R_2$  ont des valeurs négligeables, l'équation  $Z(p) = 0$  se réduit à l'équation bicarrée

$$(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2) p^4 + \left( \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} \right) p^2 + \frac{1}{C_1 C_2} = 0$$

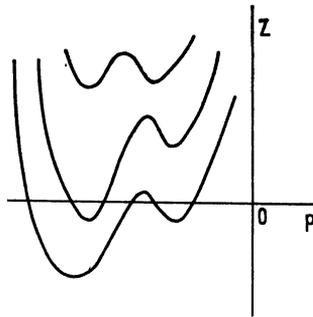


Fig. 10.

qui a quatre racines imaginaires pures. Ici il n'existe pas à proprement parler de régime transitoire : le système atteint immédiatement un régime permanent résultant de la superposition de deux oscillations sinusoïdales qui se perpétuent indéfiniment (l'amortissement est en effet nul). Les périodes de ces oscillations sont différentes des périodes propres  $2\pi\sqrt{\mathcal{L}_1 C_1}$  et  $2\pi\sqrt{\mathcal{L}_2 C_2}$  des deux circuits, mais elles s'en rapprochent d'autant plus que  $\mathcal{M}$  est plus petit, c'est-à-dire que le couplage est plus faible.

Tous ces résultats sont classiques : néanmoins il est intéressant de remarquer avec quelle facilité le calcul symbolique permet incidemment de les mettre en évidence.

$\beta$ . Dans le cas de deux circuits oscillants, qui ne seraient couplés qu'électrostatiquement, on a  $\mathcal{M} = R = 0$ , et alors

$$\begin{aligned} Z(p) &= \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 p^4 + (R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p^3 \\ &+ \left( \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{C} + R_1 R_2 \right) p^2 \\ &+ \left( \frac{R_1 + R_2}{C} + \frac{R_2}{C_1} + \frac{R_1}{C_2} \right) p + \frac{1}{C_1 C_2} + \frac{1}{C} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \end{aligned}$$

Ici

$$\frac{1}{2} Z''(p) = 6 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 p^2 + 3 (R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p + \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{C} + R_1 R_2$$

et une condition, nécessaire mais non suffisante, pour que le régime transitoire ne comporte pas de composante oscillatoire sera

$$3 \left( R_1^2 \frac{\mathcal{L}_2}{\mathcal{L}_1} + R_2^2 \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2} - 2 R_1 R_2 \right) > 8 \left( \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{C} \right).$$

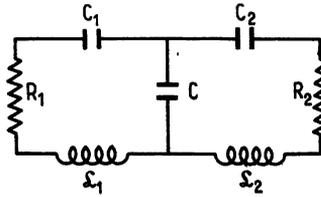


Fig. 11.

Si nous supposons de plus  $C_1 = C_2 = \infty$ , alors

$$Z(p) = p \left[ \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 p^3 + (R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p^2 + \left( \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{C} + R_1 R_2 \right) p + \frac{R_1 + R_2}{C} \right]$$

et  $Z(p)$  admet la racine  $p = 0$ .

$\gamma$ . Revenons au cas général, mais supposons que les circuits soient dénués de résistance, et que le couplage électromagnétique soit parfait. On aura

$$Z(p) = \left[ \frac{1}{C} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{M}) + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} \right] p^2 + \frac{C + C_1 + C_2}{CC_1 C_2}.$$

Posons

$$\frac{C + C_1 + C_2}{C_1 C_2 (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{M}) + C (\mathcal{L}_1 C_1 + \mathcal{L}_2 C_2)} = \omega^2,$$

$$\frac{CC_1 C_2}{C + C_1 + C_2} \omega^2 = a.$$

Alors

$$ap \frac{\mathcal{L}_2 p^2 + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2}}{p^2 + \omega^2} \subset A_{11}(t),$$

$$-ap \frac{\mathcal{M} p^2 + \frac{1}{C}}{p^2 + \omega^2} = A_{21}(t),$$

d'où

$$A_{11}(t) = a \left( \frac{I}{C_1 \omega} + \frac{I}{C_2 \omega} - \mathcal{L}_2 \omega \right) \sin \omega t,$$

$$A_{21}(t) = a \left( \mathcal{M} \omega - \frac{I}{C_1 \omega} \right) \sin \omega t.$$

Les circuits n'étant pas amortis, un régime sinusoïdal permanent de pulsation  $\omega$  est immédiatement atteint.

**6. Cas de deux circuits oscillants couplés par l'entremise d'un troisième circuit oscillant.** — Posons ici (voir la figure)

$$\mathcal{L}'_2 + \mathcal{L}''_2 = \mathcal{L}_2.$$

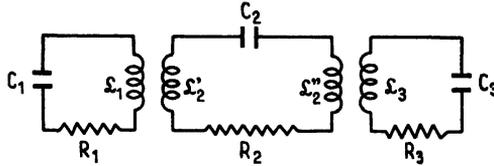


Fig. 12.

Pour pouvoir utiliser le théorème du développement, on doit calculer les racines de l'équation suivante, qui se présente sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} + p R_1 + p^2 \mathcal{L}_1 & p^2 \mathcal{M}_{12} & 0 \\ p^2 \mathcal{M}_{12} & \frac{1}{C_2} + p R_2 + p^2 \mathcal{L}_2 & p^2 \mathcal{M}_{23} \\ 0 & p^2 \mathcal{M}_{23} & \frac{1}{C_3} + p R_3 + p^2 \mathcal{L}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle est du sixième degré. Cet exemple montre combien la détermination des admittances indiciales devient en pratique très ardue dès que la configuration des circuits se complique tant soit peu.

**7. Régime transitoire du circuit électrique constitué par une ligne de transmission et un appareil récepteur.** — Le problème à résoudre est le suivant : connaissant la tension agissant à l'origine  $x = 0$  de la ligne ainsi que le montage caractérisant l'appareil récepteur disposé à l'extrémité  $x = h$ , déterminer l'état électrique en tout point d'abscisse  $x$  et en tout instant  $t$ . Cet état se définit

par la différence de potentiel  $v$  et par l'intensité de courant  $i$ ; ces deux quantités satisfont au système d'équations différentielles

$$(8) \quad ri + l \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$(9) \quad gv + c \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial i}{\partial x},$$

$r$ ,  $g$ ,  $l$ ,  $c$  désignant respectivement la résistance longitudinale, la conductance latérale, la self-induction et la capacité, chacune de ces quantités étant rapportée à l'unité de longueur; nous supposons de plus la ligne homogène :  $r$ ,  $g$ ,  $l$ ,  $c$  sont donc des constantes.

En éliminant d'abord  $v$ , puis  $i$  entre (8) et (9), on obtient

$$(10) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (rc + lg) \frac{\partial v}{\partial t} + rgv,$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (rc + lg) \frac{\partial i}{\partial t} + rgi.$$

Chacune des deux fonctions  $v(x, t)$  et  $i(x, t)$  satisfait donc à l'équation des télégraphistes.

Nous poserons

$$(12) \quad V(x, p) \subset v(x, t),$$

$$(13) \quad I(x, p) \subset i(x, t)$$

et nous supposons que l'état initial satisfait aux conditions

$$v(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq h),$$

ce qui revient à dire que le système constitué par la ligne et le récepteur est initialement neutre. Nous aurons alors

$$(14) \quad (lp + r) I(x, p) = - \frac{\partial V(x, p)}{\partial x},$$

$$(15) \quad (cp + g) V(x, p) = - \frac{\partial I(x, p)}{\partial x}.$$

De ces deux relations, on tire immédiatement

$$(16) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - K^2 V = 0,$$

où

$$(17) \quad K = \sqrt{(lp + r)(cp + g)}.$$

La solution générale de (16) est

$$(18) \quad V(x, p) = A(p) e^{-xK} + B(p) e^{xK};$$

d'autre part, on doit avoir, d'après (14),

$$I(x, p) \subset -\frac{1}{lp+r} \frac{\partial V(x, p)}{\partial x},$$

c'est-à-dire

$$(19) \quad I(x, p) = \frac{K}{lp+r} [A(p) e^{-xK} - B(p) e^{xK}].$$

Il nous faut maintenant déterminer  $A(p)$  et  $B(p)$  à partir des conditions aux frontières. Celles-ci sont au nombre de deux :

a. La première résulte de ce que le phénomène transitoire est engendré par une tension agissant à l'origine de la ligne et qui est une des données du problème. Soit

$$V_0(p) \subset v(0, t)$$

en faisant  $x = 0$ , dans (18) on a une première condition

$$(20) \quad A(p) + B(p) = V_0(p);$$

b. La seconde des conditions aux frontières résulte de la présence d'un appareil récepteur à l'extrémité de la ligne. Désignons par  $Z_1(i\omega)$  l'impédance isochrone de cet appareil récepteur; on doit avoir

$$(21) \quad V(h, p) = Z_1(p) I(h, p).$$

Ainsi qu'on l'a vu précédemment,  $\frac{1}{p} Z_1(p)$  une fraction rationnelle de  $p$ , est l'image de l'admittance caractéristique.

Résolvons le système constitué par (20) et (21) et dans lequel  $A$  et  $B$  sont les deux inconnues. Après avoir posé

$$(22) \quad \sqrt{\frac{lp+r}{cp+g}} = Z(p),$$

on aboutit à

$$(23) \quad V(x, p) = \frac{e^{-xK} + \frac{Z(p) - Z_1(p)}{Z(p) - Z_1(p)} e^{-(2h-x)K}}{1 - \frac{Z(p) - Z_1(p)}{Z(p) - Z_1(p)} e^{-2hK}} V_0(p),$$

$$(24) \quad I(x, p) = \frac{1}{Z(p)} \frac{e^{-xK} + \frac{Z(p) - Z_1(p)}{Z(p) + Z_1(p)} e^{-(2h-x)K}}{1 - \frac{Z(p) - Z_1(p)}{Z(p) - Z_1(p)} e^{-2hK}} V_0(p).$$

Ceci peut encore s'écrire

$$(23') \quad V(x, p) = \frac{Z(p) \operatorname{sh}(h-x)K + Z_1(p) \operatorname{ch}(h-x)K}{Z(p) \operatorname{sh} hK + Z_1(p) \operatorname{ch} hK} V_0(p),$$

$$(24') \quad I(x, p) = \frac{\operatorname{ch}(h-x)K + \frac{Z_1(p)}{Z(p)} \operatorname{sh}(h-x)K}{Z(p) \operatorname{sh} hK + Z_1(p) \operatorname{ch} hK} V_0(p).$$

Si l'on se donne la force électromotrice  $\mathcal{E}(t) \supset E(p)$  qui alimente la ligne à travers un certain circuit, la condition (20) doit être remplacée par une autre qui tiennent compte des caractéristiques du circuit d'alimentation. Par exemple, dans le cas où un générateur dont la force électromotrice  $\mathcal{E}(t)$  alimente la ligne à travers une résistance inductive, on aura

$$v(o, t) = \mathcal{E}(t) - R_0 i(o, t) - L_0 \left( \frac{di}{dt} \right)_{x=0}$$

et il apparaît ainsi immédiatement qu'il faut substituer à (20) la nouvelle condition

$$V(o, p) = A + B = E(p) - (R_0 + L_0 p)(A - B) \frac{K}{lp + r}$$

qui peut aussi s'écrire

$$(25) \quad \left( 1 + \frac{R_0 + L_0 p}{Z(p)} \right) A + \left( 1 - \frac{R_0 + L_0 p}{Z(p)} \right) B = E(p).$$

Cette dernière équation constitue avec (21) un système qui permet de déterminer A et B. On trouve, tous calculs faits,

$$(23'') \quad V(x, p) = \frac{[Z(p) \operatorname{sh}(h-x)K + Z_1(p) \operatorname{ch}(h-x)K] E(p)}{Z(p) \left[ 1 + \frac{(R_0 + L_0 p) Z_1(p)}{(Z(p))^2} \right] \operatorname{sh} hK + [R_0 + L_0 p + Z_1(p)] \operatorname{ch} hK},$$

$$(24'') \quad I(x, p) = \frac{\left[ \operatorname{ch}(h-x)K + \frac{Z_1(p)}{Z(p)} \operatorname{sh}(h-x)K \right] E(p)}{Z(p) \left[ 1 + \frac{(R_0 + L_0 p) Z_1(p)}{(Z(p))^2} \right] \operatorname{sh} hK + [R_0 + L_0 p + Z_1(p)] \operatorname{ch} hK}.$$

On remarquera que ces formules redonnent, comme il se doit, (23') et (24') quand on fait

$$R_0 = L_0 = 0, \quad E(p) = V_0(p).$$

Plus généralement, on vérifierait que si la ligne est alimentée à travers une impédance isochrone  $Z_0(i\omega)$  disposée en série avec le générateur, on aura

$$(23''') \quad V(x, p) = \frac{[Z_1(p) \operatorname{ch}(h-x)K + Z(p) \operatorname{sh}(h-x)K] E(p)}{[Z_0(p) + Z_1(p)] \operatorname{ch} hK + \left[ Z(p) + \frac{Z_0(p)Z_1(p)}{Z(p)} \right] \operatorname{sh} hK},$$

$$(24''') \quad I(x, p) = \frac{I}{Z(p)} \frac{[Z_1(p) \operatorname{sh}(h-x)K + Z(p) \operatorname{ch}(h-x)K] E(p)}{[Z_0(p) + Z_1(p)] \operatorname{ch} hK + \left[ Z(p) + \frac{Z_0(p)Z_1(p)}{Z(p)} \right] \operatorname{sh} hK}.$$

Nous voici donc en possession des images symboliques de certaines solutions de l'équation des télégraphistes. Il s'agirait de déterminer ensuite les fonctions originales correspondantes : cette détermination bien qu'aisée dans quelques cas particuliers est le plus souvent très ardue. Carson [9] a estimé que l'étude du régime transitoire sur une ligne de transmission dans le cas général constitue en ce qui concerne les calculs numériques, un des problèmes les plus délicats de l'électrotechnique.

**8. Établissement du courant sur une ligne.** — Pour abrégé, nous écrirons  $Z_0, Z_1, Z$ , au lieu de  $Z_0(p), Z_1(p), Z(p)$ .

Partons de (24'''), image de  $i(x, t)$  dans le cas le plus général; nous remarquerons qu'elle peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} I(x, p) &= \frac{E(p)}{Z} \frac{(Z_1 + Z) e^{-xk} - (Z_1 - Z) e^{-(2h-x)k}}{\left( Z_0 + Z_1 + Z + \frac{Z_0 Z_1}{Z} \right) + \left( Z_0 + Z_1 - Z - \frac{Z_0 Z_1}{Z} \right) e^{-2hk}} \\ &= \frac{I}{Z + Z_0} \frac{e^{-xk} + \frac{Z - Z_1}{Z + Z_1} e^{-(2h-x)k}}{1 - \left( \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \right) \left( \frac{Z - Z_1}{Z + Z_1} \right) e^{-2hk}} E(p). \end{aligned}$$

Plaçons-nous dans le cas où

$$\mathcal{E}(t) = U(t) \supset I = E(p)$$

et posons

$$\frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \mu_0, \quad \frac{Z - Z_1}{Z + Z_1} = \mu_1, \quad \frac{Z}{Z + Z_0} = \lambda.$$

Alors

$$I(x, p) = \frac{\lambda}{Z} \frac{e^{-xk} + \mu_1 e^{-(2h-x)k}}{1 - \mu_0 \mu_1 e^{-2hk}},$$

d'où, en développant en série,

$$(26) \quad I(x, p) = \lambda \frac{e^{-xK}}{Z} + \lambda \mu_1 \frac{e^{-(2h-x)K}}{Z} + \lambda \mu_0 \mu_1 \frac{e^{-(2h+x)K}}{Z} \\ + \lambda \mu_0 \mu_1^2 \frac{e^{-(4h-x)K}}{Z} + \lambda \mu_0^2 \mu_1^2 \frac{e^{-(4h+x)K}}{Z} + \dots$$

On vérifie immédiatement que  $\frac{e^{-xK}}{K}$  est l'image de la fonction correspondant au courant absorbé au point d'abscisse  $x$  par une ligne dont la longueur serait infinie et qui serait excitée à l'origine  $x = 0$  par la tension  $U(t) \supset 1$ . En effet, une telle hypothèse [cf. (18) et (20)] impose  $A = 1$ ,  $B = 0$ . Donc le premier terme du développement (25) représente l'image de la fonction correspondant au courant au point d'abscisse  $x$  pour la ligne de longueur infinie quand une tension  $v_0(t) \supset \lambda$  agit à l'origine; de même, le second terme est l'image de la fonction correspondant au courant au point d'abscisse  $2h - x$  quand c'est la tension  $v_1(t) \supset \lambda \mu_0$  qui agit à l'origine; le troisième terme est l'image du courant au point d'abscisse  $2h + x$  pour une tension  $v_2(t) \supset \lambda \mu_0 \mu_1$  agissant à l'origine, etc. L'interprétation à partir d'ondes incidentes et réfléchies se superposant au point d'abscisse  $x$  est immédiate [40].

L'original de  $\frac{e^{xK}}{Z}$  s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro  $I_0$ . On met ainsi en évidence la propagation, l'atténuation, et l'existence d'un « résidu d'onde » [41].

**9. Impédance caractéristique d'une ligne.** — Lorsque  $Z_1 = Z$ , on a  $\mu_1 = 0$  et l'onde réfléchie n'existe plus; en d'autres termes, l'onde incidente est intégralement absorbée par l'extrémité réceptrice; (23) et (24) se réduisent alors à

$$V(x, p) = e^{-xK} V_0(p), \quad I(x, p) = \frac{e^{-xK}}{Z} V_0(p);$$

la tension et le courant ont les mêmes valeurs que pour une ligne de longueur infinie.

Si la condition d'Heaviside

$$(27) \quad \frac{r}{l} = \frac{g}{c}$$

se trouve réalisée, on satisfera à la condition  $Z_1 = Z$  en branchant à l'extrémité réceptrice une résistance égale à  $\sqrt{\frac{l}{c}}$ .

**TABLEAU I.**  
**DICTIONNAIRE OPÉRATIONNEL.**

---

- (1)  $p^m \varphi(p) - \sum_{k=1}^m p^m f^{(m-k)}(+0) \subset f^{(m)}(t)$
- (2)  $p^{-1} \varphi(p) \subset \int_0^t f(x) dx$
- (3)  $p^{-1} \varphi_1(p) \varphi_2(p) \subset \int_0^t f_1(t-x) f_2(x) dx$
- (4)  $\varphi(ap) \subset f\left(\frac{t}{a}\right) \quad (a = \text{Cte} > 0)$
- (4')  $\frac{p}{p+a} \varphi(p+a) \subset e^{-at} f(t) \quad (a = \text{Cte})$
- (5)  $p \varphi'(p) \subset -t f'(t)$
- (5')  $\left(p \frac{d}{dp}\right)^m \varphi(p) \subset (-1)^m \left(t \frac{d}{dt}\right)^m f(t)$
- (6)  $p \frac{d^m}{dp^m} [p^{-1} \varphi(p)] \subset (-t)^m f(t)$
- (7)  $e^{-ap} \varphi(p) \subset f(t-a) U(t-a) \quad (a > 0)$
- (8)  $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds = \int_0^{+\infty} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta$
- (8')  $\int_0^p \frac{\varphi(s)}{s} ds \subset \int_t^{+\infty} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta$
- (8'')  $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds \subset \int_0^t \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta$
- (9)  $\frac{\varphi(\log p)}{\log p} \subset \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\Gamma(s+1)} f(s) ds$
- (10)  $p^{1-n} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \subset \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(\sqrt{2\lambda t}) f(\lambda) d\lambda$
- (11)  $\varphi(\sqrt{p}) \subset (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} f(x) dx$
-

## TABLEAU II.

## LISTE DE CORRESPONDANCES SYMBOLIQUES.

- 
- (1)  $e^{at} \supset p (p - a)^{-1}$
- (2)  $t^m \supset p^{-m} \Gamma (m + 1)$
- (3)  $\sin at \supset p (p^2 + a^2)^{-1}$
- (3')  $\cos at \supset p^2 (p^2 + a^2)^{-1}$
- (4)  $\log t \supset \log \frac{1}{p} - C \quad (C = \text{Cte d'Euler})$
- (5)  $\left\{ \begin{array}{l} t^n (\log t)^m \supset p^{-n} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \left( \log \frac{1}{p} \right)^{m-r} \Gamma^{(r)} (n + 1) \\ \left[ \binom{m}{r} = \text{coefficients du binome de Newton} \right] \end{array} \right.$
- (6)  $\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \supset \sqrt{p} e^{-a\sqrt{p}}$
- (7)  $t^{\frac{n}{2}} J_n (2\sqrt{t}) \supset p^{-n} e^{-\frac{1}{p}}$
- (8)  $J_n (t) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} [\sqrt{p^2 + 1} - p]^n$
- (9)  $t^{-1} (e^t - 1) \supset \log \left( 1 + \frac{1}{p} \right)$
- (10)  $L_n (t) \supset \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^n$
- (11)  $Ei (t) \supset -\log (p - 1)$
- (12)  $Ci (t) \supset -\frac{1}{2} \log (p^2 + 1)$
- (13)  $Si (t) \supset -\text{arc tg } p$
- (14)  $\nu (t; n) \supset p^{-n} (\log p)^{-1}$
- (15)  $\mu (t; m, n) \supset p^{-n} (\log p)^{-m-1}$
- (16)  $\frac{1}{\Gamma (t + n + 1)} \supset p e^{np} \nu (e^{-p}; n)$
-

## BIBLIOGRAPHIE.

- 
- [1] O. HEAVISIDE, *Proc. Roy. Soc.*, t. 52, 1893, p. 504; *Ibid.*, t. 54, 1894, p. 105.
- [2] V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Théorie générale des fonctionnelles*, t. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1936.
- [3] T. J. BROMWICH, *Proc. London Math. Soc.*, t. 15, 1916, p. 501.
- [4] G. GIORGI, *Atti Ass. Elett. Ital.*, t. 8, 1905, p. 64; *Ibid.*, t. 9, 1905, p. 651; *Proc. Intern. Math. Congr. Toronto*, 1924, p. 355.
- [5] H. BATEMAN, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 15, 1910, p. 423.
- [6] P. LÉVY, *Bull. Sc. Math.*, 2<sup>e</sup> série t. 50, 1926, p. 174.
- [7] K. W. WAGNER, *Arch. Elektr.*, t. 4, 1916, p. 501; *Operatorenrechnung*, 1940.
- [8] E. T. WHITTAKER, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. 20, 1929, p. 199.
- [9] J. R. CARSON, *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus*, Mac Graw Hill, New-York, 1926.
- [10] B. RIEMANN, *Gesammelte Mathematische Werke*, Leipzig, 1892, p. 149.
- [11] a. H. POINCARÉ, *Acta Mathematica*, t. 8, 1886, p. 295; b. G. VALIRON, *Équations fonctionnelles*, Masson, 2<sup>e</sup> édit., Paris, 1950; c. S. COLOMBO, *Les transformations de Mellin et de Hankel*, Centre d'Études Mathématiques en vue des Applications C. N. R. S., Paris, 1959.
- [12] R. V. CHURCHILL, *Math. Z.*, t. 42, 1937, p. 567; *Math. Ann.*, t. 114, 1937, p. 591.
- [13] D. V. WIDDER, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, 1946.
- [14] H. JEFFREYS, *Inpud : Heaviside Centenary Volume*, Inst. Elect. Engrs., Londres, 1950.
- [15] E. HILLE, *Ann. Math.*, t. 27, 1926, p. 427.
- [16] A. GONZALES-DOMINGUEZ, *Ciencia y Técnica*, t. 42, 1941, p. 283.
- [17] T. J. STIELTJES, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, t. 8, p. 1.
- [18] M. J. KONTOROVICH et N. N. LEBEDEV, *J. Phys. U. R. S. S.*, t. 1, 1939, p. 229.
- [19] J. S. LOWNDES, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 15, 1962, p. 5.
- [20] W. C. G. FRASER, *Duke Math. J.*, t. 13, 1946, p. 239.
- [21] N. W. Mc LACHLAN, *Complex Variable and Operational Calculus*, Cambridge, 1939.
- [22] P. GERMAIN, *Revue des Questions scientifiques*, avril 1955, p. 299.

- [23] B. VAN DER POL, *a. Phil. Mag.*, t. 8, 1928, p. 861; *b. Ibid.*, t. 13, 1932, p. 537; *c. Ibid.*, t. 26, 1938, p. 921.
- [23'] B. VAN DER POL et H. BREMMER, *Operational Calculus based on two-sided Laplace-transform*. Cambridge Univ. Press, 2<sup>e</sup> édition, 1955.
- [24] A. GHIZZETTI, *Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari.*, t. 21, 1951, p. 103.
- [25] M. JANET, *Précis de Calcul matriciel et de Calcul opérationnel*, Presses Universitaires de France, Paris, 1954.
- [26] S. PINCHERLE, *Mem. Accad. Bologna*, t. 8, 1887, p. 125.
- [27] P. HUMBERT, *Bull. Soc. Math. France.*, t. 65, 1937, p. 119; 72<sup>e</sup> Congrès des Sociétés Savantes, Nice, 1938.
- [28] N. W. MC LACHLAN et P. HUMBERT, *Formulaire pour le Calcul symbolique (Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1941)*.
- [29] N. W. MC LACHLAN, P. HUMBERT et L. POLI, *Supplément au formulaire pour le Calcul symbolique (Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1950)*.
- [30] G. PETIAU, *La théorie des fonctions de Bessel*, C. N. R. S., Paris, 1955.
- [31] P. HUMBERT, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 4, 1935, p. 232.
- [32] P. HUMBERT, *Mathematica*, t. 10, 1934, p. 32.
- [33] S. COLOMBO, *Bull. Sc. Math.*, t. 47, 1943.
- [34] L. POLI, *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, t. 55, 1935, p. 111.
- [35] S. COLOMBO, *a. Bull. Sc. Math.*, t. 77, 1953, p. 89; *b. Ibid.*, t. 79, 1955, p. 72; *c. Ann. Fac. Sc. Saigon*, 1963; *d. Studia Univ. Lovanium*, 1963.
- [36] F. TRICOMI, *Rend. Accad. dei Lincei*, t. 21, 1935, p. 232 et 332.
- [37] KOIZUMI, *Phil. Mag.*, 1931, p. 431.
- [38] P. BARRUCAND et S. COLOMBO, *C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1335.
- [39] J.-B. POMEY, *Rev. gén. Électr.*, t. 5, 1919, p. 204.
- [40] M. BAYARD, *Bull. Soc. franç. Électr.*, 1943.
- [41] S. COLOMBO, *Méthodes Mathématiques de l'ingénieur. Cours de Calcul Opérationnel (en préparation)*.
- [42] J. LAVOINE, *Calcul symbolique. Distributions et pseudo-fonctions*, Paris, 1959.
- [43] L. POLI et P. DELERUE, *Le calcul symbolique à deux variables et ses applications (Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1954)*.
- [44] H. DELAVault, *Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications (Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1961)*.