

E. Lucas, *Récréations mathématiques*, t. I (2ème éd., Paris, 1882), ch. 2, pp. 21–38.
par Michael Behrend

Les Œuvres de Lucas en quatre volumes, dont deux chapitres sont publiés sur le présent site, est un des livres classiques de mathématiques récréatives. Dans le présent chapitre, Lucas fournit une traduction de l'article d'Euler à propos des ponts de Königsberg, et il ajoute à cette traduction quelques notes à propos de problèmes discrets¹ similaires.

DEUXIÈME RÉCRÉATION. LE JEU DES PONTS ET DES ÎLES.

Parmi les divers travaux des mathématiciens sur cette branche de la science de l'étendue que l'on nomme Géométrie de situation, on rencontre, dès l'origine, un fameux Mémoire d'Euler, connu sous le nom de Problème des Ponts de Königsberg ; nous donnons, d'après les *Nouvelles Annales de Mathématiques*², un commentaire de cet opuscule, qui a paru en latin dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* pour l'année 1759³, et qui a pour titre : *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*.

LE MÉMOIRE D'EULER.

1° Outre cette partie de la Géométrie qui s'occupe de la grandeur et de la mesure, et qui a été cultivée dès les temps les plus reculés, avec une grande application, Leibniz a fait mention, pour la première fois, d'une autre partie encore très inconnue actuellement, qu'il a appelée *Geometria situs*. D'après lui, cette branche de la science s'occupe uniquement de l'ordre et de la situation, indépendamment des rapports de grandeur. Mais quels sont les problèmes qui appartiennent à cette géométrie ; quelles sont les méthodes qu'il faut employer à leur résolution ? C'est ce qui n'a pas encore été nettement défini. Récemment j'ai entendu parler d'un problème qui paraît se rapporter à la Géométrie de situation, puisqu'il ne contient, dans son énoncé, que des considérations d'ordre et non de mesure ; aussi ai-je résolu d'exposer ici, comme un spécimen, la méthode que j'ai trouvée

Référence de la page : https://www.cantab.net/users/michael.behrend/repubs/maze_maths/pages/lucas_ch2.html.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, mars 2026.

1. L'adjectif de la page du site est "unicursal".

2. D'après les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Ce à quoi cette phrase se réfère n'apparaît pas d'emblée. Il y a une traduction de l'article d'Euler en français, par E. Coupy, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 10 (1851), 106-119. Mais la traduction publiée par Lucas est très différente de celle-ci.

Contrairement à Coupy, Lucas est plutôt libre dans sa traduction. Il introduit la notation algébrique, qu'Euler n'a pas utilisée dans ce document ; et il découpe la figure 2 d'Euler de sorte que ce que Lucas appelle la figure 2 est la figure d'Euler. 3.

3. dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* pour l'année 1759.

Il s'agit d'une autre référence déconcertante. L'article d'Euler au sujet des ponts de Königsberg, "Solution problemati queatis ad Geometriam situs pertinentis", est apparu dans *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Vol. 8 (1736), 128-140. Coupy (voir la note précédente) remarque que les *Mémoires de Berlin* pour l'année 1759, incluent la solution par Euler d'un problème assez similaire, le parcours d'un échiquier par le cavalier ; peut-être Lucas confondait-il ces références.

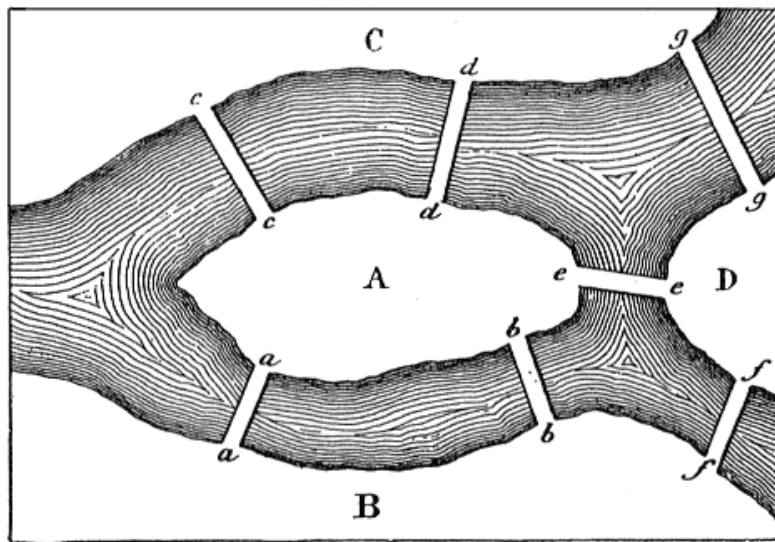
Pour plus de détails sur les publications d'Euler, voir Les archives d'Euler (Ponts de Königsberg = E53 ; tournée de chevalier = E309).

pour résoudre ce problème.

2° À Königsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof ; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras (fig. 1), sur lesquels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g. Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque pont, et, que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois ? Cela semble possible, disent les uns ; impossible, disent les autres ; cependant personne n'a la certitude de son sentiment. Je me suis donc proposé le problème suivant, qui est très général :

Quelle que soit la forme d'un fleuve, sa distribution en bras, par des îles en nombre quelconque, et quel que soit le nombre des ponts jetés sur le fleuve, trouver si l'on peut franchir celui-ci en passant une fois, et une seule, sur chacun des ponts.

Fig. 1.



Les ponts de Königsberg en 1759.

3° Quant au problème particulier des sept ponts de Königsberg, on pourrait évidemment le résoudre en faisant l'énumération complète de tous les parcours possibles ; on reconnaîtrait ainsi s'il existe ou non un chemin qui réponde à la question. Mais, par suite du grand nombre de permutations, cette méthode, déjà difficile et laborieuse dans le cas particulier, serait impraticable pour un plus grand nombre de ponts ; d'autre part, parmi ces permutations, beaucoup d'entre elles sont inutiles, de telle sorte qu'après avoir terminé l'opération on aurait rencontré un grand nombre de choses qui ne sont pas en question ; c'est en cela, sans aucun doute, que réside la cause d'une aussi grande difficulté (1). Donc, en laissant de côté ces considérations, j'ai recherché s'il n'était pas préférable d'imaginer une méthode qui permet de juger, au premier abord, de la possibilité ou de l'impossibilité du problème ; je pensais, en effet, qu'une telle méthode devait être beaucoup plus simple (2).

(1) C'est pour la même raison, très probablement, que l'on n'a pas encore trouvé la solution du problème des reines lorsque le nombre de celles-ci dépasse huit ; voir à ce sujet notre quatrième récréation sur le problème des huit reines au jeu des échecs. Quant aux permutations qu'il y aurait lieu de considérer ici, ce sont les permutations avec répétition.

(2) Cette remarque d'Euler comporte un très grand caractère de généralité, qu'elle ne paraît pas avoir tout d'abord. J'ai observé que, dans un grand nombre de problèmes de la Géométrie de situation, il y a souvent une différence considérable dans la manière de traiter la possibilité et l'impossibilité ; en général, l'impossibilité se manifeste plus facilement que la possibilité, ainsi que l'on pourra s'en convaincre dans les théories du solitaire, du taquin et de quelques autres jeux. Dans le paragraphe suivant, Euler ajoute que toute sa méthode repose sur une notation spéciale ; nous ferons voir encore que dans tous ces problèmes, il en est toujours ainsi. On verra, dans notre récréation sur le jeu de baguenaudier, comment la notation si ingénieuse de M. Gros simplifie considérablement la théorie de ce jeu.

4° Or, toute la méthode repose sur une manière convenable de représenter les divers chemins ; pour cela, je me sers des lettres majuscules A, B, C, D, ... pour désigner les diverses régions séparées par les bras du fleuve ; alors, si l'on passe de la région A dans la région B, soit par le pont a, soit par le pont b, je désigne ce chemin par AB ; la première lettre indique la région de départ, et la seconde la région d'arrivée. Maintenant, si le voyageur passe de la région B dans la région D, par le pont f par exemple, je désigne la seconde traversée par BD, et l'ensemble des deux passages successifs par ABD ; ainsi, la lettre intermédiaire B désigne en même temps la région d'arrivée après la première traversée, et la région de départ pour la seconde.

5° Si le voyageur passe ensuite de D en C par le pont g, je désigne l'ensemble des trois passages successifs par les quatre lettres ABDC. Ainsi, la notation ABDC signifie que le voyageur, situé primitivement dans la région A, est parvenu dans la région C, après avoir occupé successivement les régions B et D, mais, puisque ces quatre régions sont séparées les unes des autres par le bras du fleuve, le voyageur a dû franchir trois ponts ; de même, tout parcours dans lequel on traverse quatre ponts sera désigné par cinq lettres. En général, si le voyageur traverse n ponts, la notation de son parcours contiendra $n + 1$ lettres. Ainsi, dans le problème des sept ponts de Königsberg, tout chemin possible doit être désigné par huit lettres.

6° On observera que, dans cette notation, il n'est pas tenu compte de la désignation des ponts par lesquels le passage s'effectue ; il est évident, en effet, que les ponts qui réunissent les mêmes régions peuvent être, dans chaque parcours, remplacés les uns par les autres. Par conséquent, dans le problème des sept ponts, tout parcours est représenté par huit lettres ; mais, de plus, ces huit lettres doivent être disposées de telle sorte que la succession immédiate des lettres A et B, dans l'ordre AB ou BA, se présente deux fois, puisqu'il y a deux ponts qui réunissent les rives des régions A et B ; de même, le voisinage des lettres A et C doit aussi apparaître deux fois ; pour la même raison, il est nécessaire que les lettres B et D, ou C et D soient voisines une seule fois.

7° Le problème particulier se réduit donc à former avec les quatre lettres A, B, C, D une série de huit lettres, dans laquelle tous ces voisinages apparaissent autant de fois qu'il a été indiqué ; mais, avant de chercher à effectuer une telle disposition, il est bon de se demander si celle-ci est réalisable. En effet, si l'on démontrait, et c'est ce qui a lieu ici, qu'un tel assemblage de lettres est impossible, il serait inutile de continuer. Aussi ai-je trouvé une règle qui donne, pour tous les cas, la condition indispensable pour que le problème des ponts et des îles ne soit pas impossible.

8° Pour cela, je considère uniquement la région A, dont la rive est réunie à celle des autres régions

par un nombre quelconque de ponts $a, b, c, d, e, \dots$. En commençant par le pont a , j'observe que si le voyageur traverse ce pont, ou bien le voyageur se trouvait en A avant le passage, ou s'y trouvera après ; par conséquent, en franchissant le pont a dans un sens ou dans l'autre, la lettre A paraîtra une seule fois dans la notation. Supposons maintenant que trois ponts a, b, c conduisent dans la région A ; si le voyageur traverse les trois ponts, la lettre A apparaîtra deux fois dans la notation, soit qu'au début le voyageur parte de cette région ou d'une autre quelconque. De même, si cinq ponts conduisent en A , la lettre A sera comprise trois fois dans la notation du passage à travers tous ces ponts. En général, si le nombre des ponts qui aboutissent à la rive de la région A est impair (une telle région sera appelée région impaire), la lettre A apparaîtra, dans la notation du passage complet, un nombre de fois égal à la moitié du nombre des ponts augmenté d'une unité. En d'autres termes, si le nombre des ponts est $2n + 1$, le nombre d'apparitions de A sera la moitié de $2n + 2$ ou $n + 1$.

9° Dans le cas du problème de Königsberg, cinq ponts aboutissent à la région A , et trois ponts à chacune des régions B, C, D ; donc, dans la notation du parcours complet, la lettre A doit apparaître trois fois, et chacune des lettres B, C, D doit être écrite deux fois ; par conséquent, cette notation devrait renfermer neuf lettres, et non huit, ainsi que nous l'avions trouvé par d'autres considérations. Ainsi le problème de franchir une seule fois tous les ponts de Königsberg n'est pas possible.

10° On appliquera exactement le même raisonnement pour tous les cas dans lesquels le nombre des ponts qui aboutissent aux différentes régions est toujours impair ; on pourra déterminer des cas d'impossibilité du parcours. En effet, s'il arrive que le nombre total des apparitions de toutes les lettres n'égale pas le nombre de tous les ponts augmenté de l'unité, le problème est alors impossible. On observera que la règle donnée pour obtenir le nombre des répétitions de la lettre A par le nombre impair des ponts de la région s'applique toujours, soit que tous les ponts issus de la rive A aboutissent à une seule région B , soit qu'ils aboutissent à un nombre quelconque de régions.

11° Mais, lorsque le nombre des ponts issus de A est pair, on doit considérer deux cas, suivant que le voyageur est parti de A ou d'une autre région. En effet, si deux ponts conduisent en A , et si le voyageur est parti de A , alors la lettre A doit être répétée deux fois : une première fois pour le départ par l'un des ponts, et une deuxième fois pour le retour par l'autre pont ; mais si le voyageur a commencé ses pérégrinations par une autre région, la lettre A ne se trouvera écrite qu'une seule fois et désignera tout aussi bien, ainsi qu'il est convenu, l'arrivée en A par l'un des ponts et le départ par l'autre.

12° Supposons que quatre ponts conduisent dans la région A , et que le voyageur parte de celle-ci ; alors la notation du parcours contiendra trois fois la lettre A s'il passe une fois, et une seule, sur chacun de ces ponts ; mais s'il est parti d'une autre région, la lettre A ne sera répétée que deux fois. De même, lorsque six ponts aboutissent à la région A , la notation du parcours renfermera quatre fois ou trois fois la lettre A , suivant que le départ s'est effectué de la région A ou d'une autre. En général, lorsque le nombre des ponts d'une rive est pair (région paire), la notation correspondante renferme la lettre de cette région un nombre de fois égal à la moitié du nombre des ponts, si le départ s'est établi d'une autre région, et à ce nombre augmenté de l'unité, si le commencement du voyage a eu lieu dans cette région.

13° Mais il est évident que, dans le parcours complet, on ne peut partir que d'une seule région ; par conséquent, je prendrai toujours pour le nombre des répétitions d'une lettre la moitié du nombre des ponts pour une région paire, et la moitié du nombre des ponts augmenté d'une unité, si la région est impaire. Nous aurons alors deux cas à considérer, suivant que le départ s'effectue d'une région impaire ou d'une région paire.

Dans le premier cas, le problème sera impossible si le nombre total des répétitions des lettres ne surpasse pas d'une unité le nombre total des ponts. Dans le cas de départ d'une région paire, le problème sera impossible, si le nombre total des répétitions des lettres n'égale pas le nombre des ponts ; car, en commençant par une région paire, on devra augmenter d'une unité pour cette région, et pour celle-là seulement, le nombre des répétitions de la lettre correspondante.

14° Considérons donc une disposition quelconque des ponts et des îles d'un fleuve. Pour savoir si le parcours complet de tous les ponts n'est pas impossible a priori, on opère de la manière suivante :

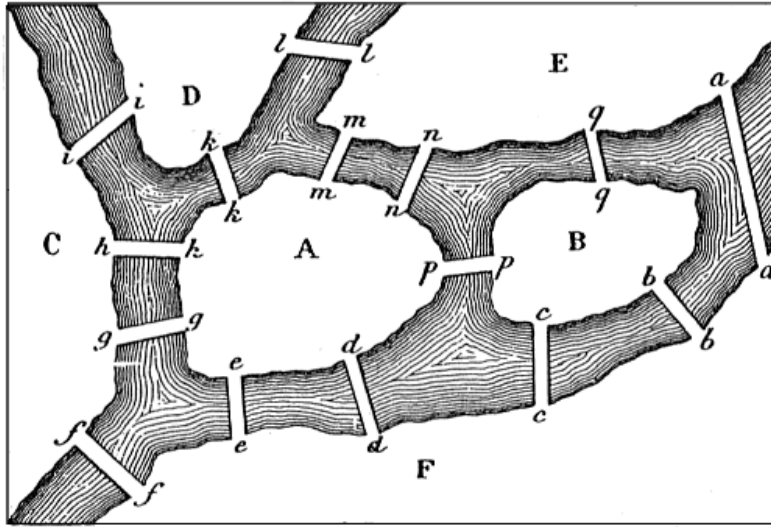
- 1° on désigne chacune des régions séparées les unes des autres par les lettres A, B, C, D ;
- 2° on prend le nombre de tous les ponts, et on le place en tête du tableau de calcul que nous allons indiquer ;
- 3° on écrit dans une colonne verticale chacune des lettres A, B, C, D, et dans une seconde colonne, le nombre des ponts qui aboutissent à ces différentes régions ;
- 4° on marque d'un astérisque les régions paires, c'est-à-dire celles auxquelles aboutissent des ponts en nombre pair ;
- 5° on écrit dans une troisième colonne verticale les moitiés des nombres pairs, et les moitiés des nombres impairs, augmentés d'une unité, de la colonne précédente ;
- 6° on fait la somme de tous les nombres de cette dernière colonne. Lorsque cette somme est égale au nombre de tous les ponts ou lui est supérieure d'une unité, le passage complet peut être effectué, sinon le problème est impossible. Mais il faut observer que, dans le premier cas, le départ doit commencer par une région paire, marquée d'un astérisque ; dans le second cas, le départ doit s'effectuer d'une région non marquée d'un astérisque, ou impaire. Ainsi l'on a, pour le problème de Koenigsberg :

Nombre des ponts : 7.

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		—
Total		9

Comme le total est plus grand que 8 ou $7 + 1$, le problème est impossible.

Fig. 2.



15° Considérons la disposition formée par deux îles A et B, réunies entre elles et aux rives d'un fleuve par quinze ponts, ainsi que l'indique la fig. 2. On demande si l'on peut voyager de manière à passer sur tous les ponts, sans jamais repasser sur l'un d'eux. D'abord, je désigne les six régions par les lettres A, B, C, D, E, F ; puis je construis le tableau d'après les explications données ci-dessus :

Nombre des ponts : 15.

A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		—
Total		16

Dans cet exemple, le problème est possible, pourvu que l'on parte de la région D, et alors on arrive à la région E, ou inversement ; le parcours pourra s'effectuer ainsi :

EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD,

ou dans l'ordre inverse ; dans cette notation, nous avons intercalé entre les lettres majuscules, qui indiquent les régions, les lettres minuscules qui désignent les quinze ponts.

16° En dehors de la méthode précédente, pour juger de l'impossibilité, nous indiquerons un moyen plus simple et plus expéditif. Nous observerons d'abord que la somme des nombres de la seconde colonne verticale du tableau est exactement égale au double du nombre des ponts ; cela tient à ce que nous avons compté chaque pont deux fois, puisque par chacune de ses extrémités, ce pont aboutit à deux régions distinctes.

17° Il résulte évidemment de cette remarque, que la somme des nombres renfermés dans la seconde colonne verticale est un nombre pair, puisque sa moitié représente le nombre des ponts.

Par conséquent, il n'est pas possible que le nombre des régions impaires soit un, trois, cinq, etc. ; ainsi dans tous les tableaux de calcul, la seconde colonne renferme toujours un nombre pair de nombres impairs ; en d'autres termes, le nombre des régions impaires est nécessairement zéro ou un nombre pair. C'est, en particulier, ce que nous avons trouvé pour le problème de Königsberg, et aussi pour le problème du n° 15.

18° Il ressort de ces considérations que le problème n'est pas impossible si toutes les régions sont paires. Alors tous les nombres de la seconde colonne verticale sont pairs, et le total des nombres de la troisième colonne est égal au nombre des ponts ; et l'on verra que le problème est toujours possible en prenant pour point de départ une région quelconque.

Ainsi, dans l'exemple de Königsberg, on pourrait franchir tous les ponts deux fois ; par exemple :

a b a b c d c d e f f g g e.

En effet, chaque pont est dédoublé, et toutes les régions deviennent paires⁴.

19° Supposons encore qu'il y ait deux régions impaires, toutes les autres étant paires ; dans ce cas, la somme des nombres de la troisième colonne surpasse d'une unité le nombre des ponts ; on s'assurera encore que le problème est possible, à la condition de prendre pour point de départ ou d'arrivée l'une ou l'autre des deux régions impaires. On voit encore que si le nombre des régions impaires était de quatre, six, huit, la somme des nombres de la troisième colonne surpasserait de deux, trois, quatre unités le nombre total des ponts ; par conséquent le problème serait impossible.

20° En résumé, étant donnée une disposition quelconque, il sera facile de savoir s'il est possible de franchir, une seule fois, tous les ponts. Le problème est impossible, lorsqu'il y a plus de deux régions impaires ; il est possible : 1° lorsque toutes les régions sont paires, et alors le point de départ peut se faire arbitrairement d'une région quelconque ; 2° lorsqu'il n'y a que deux régions impaires, et alors le parcours commence par l'une de celles-ci et finit par l'autre, ou inversement.

21° Lorsque l'on a conclu à la possibilité du problème, il reste à résoudre la question de savoir comment on doit diriger sa course ; à cet effet, je me sers de la règle suivante : "On supprime par la pensée, autant de fois qu'on le peut, les couples de ponts qui conduisent d'une région dans une autre ; de cette manière, le nombre des ponts est considérablement diminué ; on cherche ensuite la course à effectuer avec le reste des ponts. Cela fait, on rétablit les ponts supprimés, ce qui devient très facile avec un peu d'attention. Aussi je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'en dire davantage sur la loi de formation des parcours."

Ici se termine le Mémoire d'Euler. Cet illustre géomètre n'a traité pour ainsi dire que la question d'impossibilité. On trouvera dans la Note II, placée à la fin du volume, la théorie de la possibilité,

4. Ce raisonnement s'applique évidemment à une distribution quelconque des ponts et des îles dans les bras d'un fleuve, à la condition de passer deux fois sur chaque pont.

que l'on doit considérer comme la suite du Mémoire qui précède.

LES PONTS DE PARIS EN 1880.

Nous ferons maintenant l'application des règles démontrées dans ce Mémoire au problème suivant : Est-il possible de passer successivement sur tous les ponts de Paris sans passer deux fois sur l'un d'eux ?

Nous ne comprenons dans ce problème que les ponts jetés sur la Seine, sans tenir compte des canaux. Dans le parcours du fleuve à travers Paris, on ne rencontre que trois îles, à savoir : l'île Saint-Louis, la Cité et l'île des Cygnes. Par conséquent on doit compter cinq régions différentes : les deux rives et les trois îles.

Mais, parmi ces cinq régions, l'île des Cygnes et la Cité sont des régions paires ; à la première aboutissent les deux parties du Pont de Grenelle ; à la Cité aboutissent dix ponts, savoir : 1° au sud, le pont de l'Archevêché, le pont au Double, le Petit-Pont, le pont Saint-Michel et la partie méridionale du Pont-Neuf ; 2° au nord, le pont Saint-Louis, le pont d'Arcole, le pont Notre-Dame, le pont au Change et la partie septentrionale du Pont-Neuf. L'île Saint-Louis est une région impaire à laquelle aboutissent sept ponts : au sud, la partie méridionale du pont Sully, le pont de la Tournelle et le pont Saint-Louis ; au nord, la partie septentrionale du pont Sully, le pont Marie et le pont Louis-Philippe ; mais il faut ajouter l'Estacade, pont en bois qui aboutit à la rive droite. Quant aux deux rives, il n'est pas nécessaire de connaître le nombre des ponts ; il est facile de voir que l'une d'elles est une région impaire et l'autre une région paire. En effet, il a été démontré au n° 17 que le nombre des régions impaires est toujours pair ; or, sur les cinq régions, deux sont paires et une impaire ; il est donc nécessaire que l'une des rives soit le point de départ d'un nombre impair de ponts.

D'autre part, puisqu'il n'y a que deux régions impaires, le problème proposé est toujours possible. En d'autres termes, un voyageur peut disposer son parcours de telle sorte qu'il puisse passer une fois, et une seule, sur tous les ponts qui aboutissent à la Cité et à l'île Saint-Louis et sur un nombre quelconque de ponts joignant directement les deux rives de la Seine. Mais le promeneur est toujours forcé de prendre l'île Saint-Louis pour point de départ ou d'arrivée.

On observera d'ailleurs que si l'on ne tient pas compte de l'Estacade, le problème devient d'une très grande simplicité.

LES FIGURES D'UN SEUL TRAIT. – LA SIGNATURE DE MAHOMET.

On se propose quelquefois de dessiner, d'un seul trait non doublé, la figure formée par les quatre côtés d'un rectangle et ses deux diagonales. Ce problème est semblable à celui des ponts de Königsberg ; soient A, B, C, D les sommets du rectangle, E l'intersection des diagonales. On peut considérer les cinq points A, B, C, D, E comme les centres de cinq régions ; quatre d'entre elles, A, B, C, D, sont impaires ; donc le problème est impossible. Cependant on pourrait dessiner cette figure en doublant tous les traits.

Fig. 3.

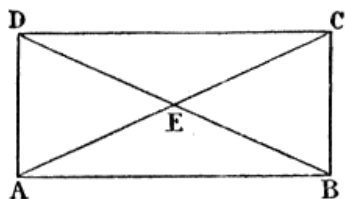
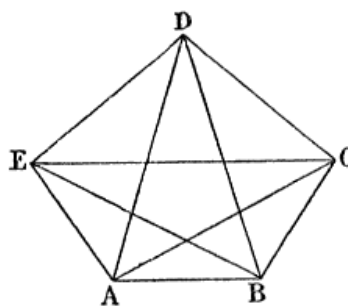
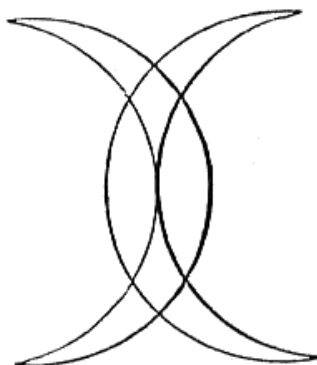


Fig. 4.



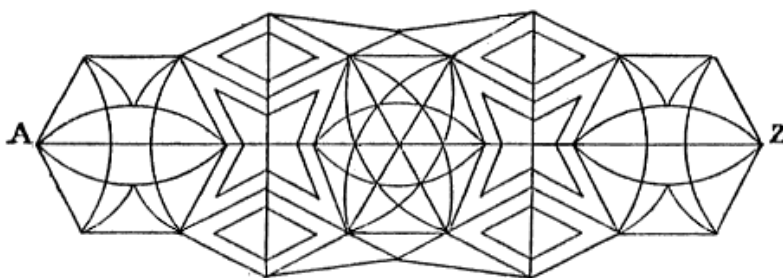
Ces considérations s'appliquent à la description par un seul trait de toutes les figures de Géométrie formées de lignes droites ou courbes, dans le plan ou dans l'espace. Ainsi on démontrera très facilement que l'on peut décrire d'un seul trait la figure formée par les côtés et toutes les diagonales d'un polygone convexe d'un nombre impair de côtés, et que le problème est impossible pour les polygones d'ordre pair, comme le carré, l'hexagone. De même, on peut décrire d'un seul trait l'ensemble des arêtes de l'octaèdre régulier, tandis qu'on ne peut le faire pour les quatre autres polyèdres réguliers convexes.

Fig. 5.



Je me suis laissé dire que Mahomet dessinait d'un seul coup, avec la pointe de son cimeterre, sa signature formée de deux croissants opposés, conformément à la fig. 5. En effet, cette figure ne contient que des points d'ordre pair, et peut se décrire d'un seul trait continu.

Fig. 6.



La fig. 6 ne contient que deux points impairs A et Z ; par conséquent, on peut la décrire d'un seul trait continu allant de A à Z ou inversement. On peut réaliser un jeu, en dessinant cette figure

en grand sur une feuille de carton ; on place de petits jetons sur le milieu de toutes les lignes qui joignent deux points voisins ; il s'agit alors de déterminer le parcours à suivre pour enlever tous les jetons successivement. Cette figure est extraite de l'opuscule ayant pour titre : Vorstudien zur Topologie, par Johann Benedict Listing ; cet ouvrage curieux m'a été gracieusement communiqué par M. Moritz Cantor, professeur à l'Université de Heidelberg.

Fig. 7.

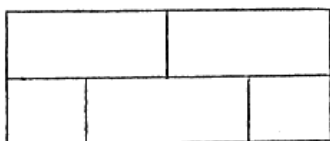
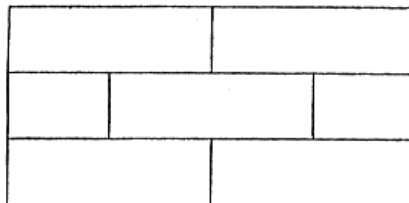


Fig. 8.



La fig. 7 contient huit points impairs et ne peut être décrite en moins de quatre traits continus ; ce théorème a été énoncé par Clausen, dans le n° 494 des *Astronomische Nachrichten*. La fig. 8 représente un fragment de mur en maçonnerie ; elle contient douze points impairs, et ne peut être décrite en moins de six traits continus.

De même, la figure qui représente l'échiquier ordinaire de soixante-quatre cases renferme vingt-huit points impairs, et ne peut être décrite en moins de quatorze traits ; la figure du damier de cent cases nécessite la succession de dix-huit traits continus.

Si l'on divise les côtés d'un triangle en n parties égales, et si l'on joint les points de division correspondants par des lignes parallèles aux côtés, on obtient une figure qui ne contient que des points d'ordre pair, et que l'on peut décrire d'un seul trait, etc.

LES VOYAGES D'UN CONTREBANDIER.

On ramène encore au problème des ponts de Königsberg celui du voyage d'un contrebandier qui se propose de traverser successivement toutes les frontières respectives des divers pays d'un continent, et de ne les traverser qu'une seule fois. Il est évident que les divers pays et leurs frontières correspondent exactement aux régions et aux bras du fleuve sur lesquels serait jeté un seul pont, pour chaque frontière commune à deux pays. Ainsi, puisque la Suède, l'Espagne et le Danemark ont des frontières en nombre impair⁵, il est impossible de traverser, une seule fois seulement, toutes les frontières des différents pays de l'Europe.

Il y a encore lieu de considérer le problème géométrique corrélatif pour les figures du plan et de l'espace. Ainsi, par un mouvement continu sur la surface, il est possible de traverser une seule fois toutes les arêtes du cube, mais non pas les arêtes des autres polygones réguliers convexes.

5. Ont des frontières en nombre impair

Les frontières ont changé depuis que cela a été écrit en 1882 : par ex. La Suède est alors unie à la Norvège.

Version latine initiale du texte d'Euler "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis", provenant des *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, 1736, (p. 128–140 + Planche VIII).

Ce célèbre article au sujet des ponts de Königsberg, en Prusse-Orientale, est généralement considéré comme l'acte fondateur de la théorie des graphes. Dans l'original, les trois figures sont imprimées sur une planche séparée, mais dans cette version en ligne, elles ont été intégrées au texte.

La ville de Königsberg a été annexée par la Russie après la Seconde Guerre mondiale et porte aujourd'hui le nom officiel de Kaliningrad.

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.
S. 1.

Praeter illam Geometriae partem, quae circa quantititates versatur, et omni tempore summo studio est exulta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit Leibnitzius, quam Geometriam situs vocauit. Ista pars ab ipso in solo, situ determinando, situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur ; in quo negotio neque ad quantitatas respiciendum, neque calculo quantitatum vtendum sit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc situs Geometriam pertineant, et quali methodo in iis resoluendis vti oporteat, non satis est definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio esset facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque solutionem calculi quantitarum ope admitteret, id ad geometriam situs referre haud dubitavi : praesertim quod in eius solutione solus situs in considerationem veniat, calculus vero nullius prorsus sit vsus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata soluenda inueni, tanquam specimen Geometriae situs hic exponere constitui.

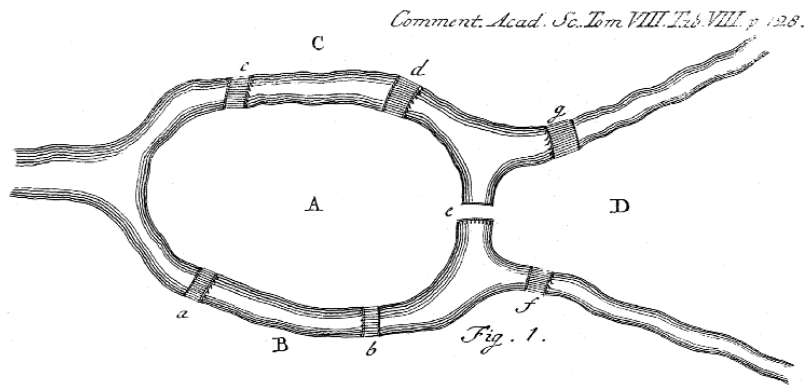


Figura 1 §. 2. Problema autem hoc, quod mihi satis notum esse perhibebatur, erat sequens : Regio-monti in Borussia esse insulam A der Kneiphof dictam, fluuiumque eam cingentem in duos diuidi

ramos, quemadmodum ex figura videre licet : ramos vero huius fluuii septem instructos esse pontibus, a, b, c, d, e, f, et g. Circa hos pontes iam ista proponebatur quaestio, num quis cursum ita instituere queat, vt per singulos pontes semel et non plus quam semel transeat. Hocque fieri posse, mihi dictum est, alios negare alios dubitare ; neminem vero affirmare. Ego ex hoc mihi sequens maxime generale formaui problema ; quaecunque sit fluuii figura et distributio in ramos, atque quicunque fuerit numerus pontium, inuenire, vtrum per singulos pontes semel tantum transiri queat, an vero secus ?

§. 3. Quod quidem ad problema Regiomontanum de septem pontibus attinet, id resolui posset facienda perfecta enumeratione omnium cursuum, qui institui possunt ; ex his enim innotesceret, num quis cursus satisfaceret, an vero nullus. Hic vero soluendi modus propter tantum combinationum numerum et nimis esset difficilis atque operosus, et in aliis quaestionibus de multo pluribus pontibus ne quidem adhiberi posset. Hoc porro modo si operatio ad finem perducatur multa inueniuntur, quae non erant in quaestione ; in quo procul dubio tantae difficultatis causa consistit ⁶. Quamobrem missa hac methodo, in aliam inquisiui, quae plus non largiatur, quam ostendat, vtrum talis cursus institui queat an secus ; talem enim methodum multo simpliciore fore sum suspicatus ⁷.

§. 4. Innititur autem tota mea methodus idoneo modo singulos pontium transitus designandi, in quo vtor litteris maiusculis A, B, C, D, singulis regionibus adscriptis, quae flumine sunt separatae. Ita si quis ex regione A in regionem B transmigrat per pontem a siue b, hunc transitum denoto litteris AB, quarum prior praebet regionem ex qua exierat viator, posterior vero dat regionem in quam pontem transgressus peruenit. Si deinceps viator ex regione B abeat in regionem D per pontem f, hic transitus repraesentabitur litteris BD ; duos autem hos transitus successiue institutos AB et BD denoto tantum tribus litteris ABD, quia media B designat tam regionem, in quam primo transitu peruenit, quam regionem ex qua altero transitu exit.

§. 5. Simili modo si viator ex regione D progrediatur in regionem C per pontem g, hos tres transitus successiue factos quatuor litteris ABDC denotabo. Ex his enim quatuor litteris ABDG intelligitur viatorem prima in regione A existentem transiisse in regionem B, hinc esse progressum in regionem D, ex hacque vltra esse profectum in C : cum vero hae regiones fluuiis sint a se inuicem separatae, necesse est vt viator tres pontes transierit. Sic transitus per quatuor pontes successiue instituti quinque litteris denotabuntur ; et si viator trans quotcunque pontes eat, eius migratio per litterarum numerum, qui vnitate est maior quam numerus pontium, denotabitur. Quare transitus per

6. Tantae difficileatis causa consistit / cela constitue la cause de tant de difficultés

[Note de E. Lucas, Récréations Mathématiques, vol. 1, p. 23, n. 1 ; tr. MB]

C'est la raison, très probablement, pourquoi personne n'a encore trouvé la solution du problème des reines quand leur nombre dépasse huit ; voir à ce sujet notre quatrième récréation sur le problème des huit reines en échecs. Quant aux permutations qui devraient être considérées ici, elles sont des permutations avec répétition.

7. Multi simpliciore fore / Ce serait beaucoup plus simple

[Note de E. Lucas, Récréations Mathématiques, vol. 1, p. 23, n. 2 ; tr. MB]

Cette remarque d'Euler est beaucoup plus largement applicable qu'il n'y paraît à première vue. J'ai remarqué que, dans un grand nombre de problèmes dans la géométrie de la position, il y a souvent une différence considérable dans la manière de traiter la possibilité et l'impossibilité ; en général, l'impossibilité est prouvée plus facilement que la possibilité, comme cela apparaîtra dans les théories du solitaire, le glissant 15-puzzle et quelques autres jeux. Dans le paragraphe suivant, Euler ajoute que toute sa méthode est basée sur une notation appropriée ; nous allons continuer à montrer qu'il en est de même dans tous ces problèmes. On le verra, dans notre récréation sur les anneaux chinois (baguenaudier), comment la notation ingénieuse de M. Gros simplifie considérablement la théorie de ce jeu.

septem pontes ad designandum octo requirit litteras.

§. 7. Quaestio ergo huc reducitur, vt ex quatuor litteris A, B, C et D series octo litterarum formetur, in qua omnes illae successiones toties occurrant quoties est praeceptum. Antequam autem ad talem dispositionem opera adhibeatur, ostendi conuenit, vtrum tali modo hae litterae disponi queant an non. Si enim demonstrari poterit talem dispositionem omnino fieri non posse, inutilis erit omnis labor, qui ad hoc efficiendum locaretur. Quamobrem regulam inuestigauī, cuius ope tam pro hac quaestione, quam pro omnibus similibus, facile discerni queat, num talis litterarum dispositio locum habere queat.

Figura 2 §. 8. Considero ad huiusmodi regulam inueniendam vnica regionem A, in quam quotcunque pontes a, b, c, d etc. conducant. Horum pontium contemplor primo vnicum a, qui ad regionem A ducat; si nunc viator per hunc pontem transeat vel ante transitum esse debuit in regione A vel post transitum in A perueniet; quare in supra stabilito transitus designandi modo oportet vt littera A semel occurrat. Si tres pontes puta a, b, c in regionem A conducant, et viator per omnes tres transeat, tum in designatione eius migrationis littera A bis occurret, siue ex A initio cursum instituerit siue minus. Simili modo si quinque pontes in A conducant, in designatione transitus per eos omnes littera A ter occurrere debet. Atque si numerus pontium fuerit quicunque numerus impar, tum si is vnitate augeatur, eius dimidium dabit, quot vicibus littera A occurrere debeat.

§. 10. Simili modo de omni alio casu pontium si quidem numerus pontium, qui in quamque regionem conducit fuerit impar, iudicari potest, an per singulos pontes transitus semel fieri queat. Si enim euenit, vt summa omnium vicium, quibus singulae litterae occurrere debent, aequalis sit numero omnium pontium vnitate aucto, tum talis transitus fieri potest; sin autem vt in nostro exemplo

accidit, summa omnium vicium maior fuerit numero pontium vnitate aucto, tum talis transitus nequaquam institui potest. Regula autem quam dedi pro numero vicium A ex numero pontium in regionem A deducendum inueniendo aequae valet; siue omnes pontes ex vna regione B, vt in figura Figura 2 repraesentitur, ducant, siue ex diuersis; tantum enim regionem A considero, et inquiero quot vicibus littera A occurrere debeat.

§. 11. Si autem numerus pontium, qui in regionem A conducunt, fuerit par, tum circa transitum per singulos notandum est, vtrum initio viator cursum suum ex regione A instituerit an non. Si enim duo pontes in A conducant, et viator ex A cursum inceperit, tum littera A bis occurrere debet, semel enim adesse debet ad designandum exitum ex A per alterum pontem, et semel quoque ad designandum reditum in A per alterum pontem. Sin autem viator ex alia regione cursum inceperit, tum semel tantum littera A occurret, semel enim posita tam aduentum in A quam exitum inde denotabit, vt huiusmodi cursus designare statui.

§. 12. Conducant iam quatuor pontes in regionem A, et viator ex A cursum incipiat, tum in designatione totius cursus littera A ter adesse debebit, si quidem per singulos semel transierit. At si ex alia regione ambulare inceperit, tum bis tantum littera A occurret. Si sex pontes ad regionem A conducant, tum littera A, si ex A initium eundi est sumtum, quater occurret, at si non ex A initio exierit viator, tum ter tantum occurrere debebit. Quare generaliter si numerus pontium fuerit par, tum eius dimidium dat numerum vicium, quibus littera A occurrere debet, si initium non est in regione A sumtum; dimidium vero vnitate auctum dabit numerum vicium, quoties littera A occurrere debet, initio cursus in ipsa regione A sumto.

§. 13. Quia autem in tali cursu nonnisi ex vna regione initium fieri potest ⁸, ideo ex numero pontium, qui in quamvis regionem deducunt, ita numerum vicium, quoties littera quamque regionem denotans occurrere debet, definio, vt sumam numeri pontium vnitate aucti dimidium, si numerus pontium fuerit impar; ipsius vero numeri pontium medietatem, si fuerit par. Deinde si numerus omnium vicium adaequet numerum pontium vnitate auctum, tum transitus desideratus succedit, at initium ex regione, in quam impar pontium numerus ducit, capi debet. Sin autem numerus omnium vicium fuerit vnitate minor, quam pontium numerus vnitate auctus, tum transitus succedet incipiendo ex regione, in quam par pontium numerus ducit, quia hoc modo vicium numerus vnitate est augendus.

§. 14. Proposita ergo quacunque aquae pontiumque figura, ad inuestigandum, num quis per singulos semel transire queat, sequenti modo operationem instituo. Primo singulas regiones aqua a se inuicem diremtas litteris A, B, C etc. designo. Secundo sumo omnium pontium numerum, eumque vnitate augeo, atque sequenti operationi praefigo. Tertio singulis litteris A, B, C etc. sibi subscriptis, cuilibet adscribo numerum pontium ad eam regionem deducendum. Quarto eas litteras, quae pares adscriptos habent numeros signo asterisco. Quinto singulorum horum numerorum parium dimidia

8. nonnisi ex vna regione initium fieri potest / Le départ peut être fait dans une seule région

Comme le point peut ne pas être tout à fait clair, l'explication suivante est suggérée, dans laquelle "même la région" est abrégée "région avec un nombre pair de ponts qui y mènent." Ici (§13) Euler additionne le nombre de lieux de lettres en appliquant les règles trouvées dans les deux paragraphes précédents. Dans le §12, il souligne que pour une région égale, nous devons prendre la moitié du nombre de ponts si la marche ne commence pas dans cette région, mais la moitié du nombre plus 1 si elle le fait. Puisque le deuxième cas ne peut se produire qu'une seule fois, voire pas du tout, nous prenons simplement la moitié du nombre de ponts pour chaque même région, et puis, si la promenade commence dans une région uniforme, ajoutez un 1 supplémentaire à la fin.

adiicio, imparium vero vnitate auctorum dimidia ipsis adscribo. Sexto hos numeros vltimo scriptos in vnam summam coniicio, quae summa, si vel vnitate minor fuerit vel aequalis numero supra praefixo, qui est numerus pontium vnitate auctus, tum concludo transitum desideratum perfici posset. Hoc vero est tenendum, si summa inuenta fuerit vnitate minor, quam numerus supra positus, tum initium ambulationis ex regione asteristico notata fieri debere, contra vero ex regione non signata si summa fuerit aequalis numero praescripto. Ita ergo pro casu Regiomontano operationem instituo, ut sequitur :

Numerus pontium 7, habetur ergo 8

Pontes	
A, 5	3
B, 3	2
C, 3	2
D, 3	2

Quia ergo plus prodiit quam 8, huiusmodi transitus nequaquam fieri potest.

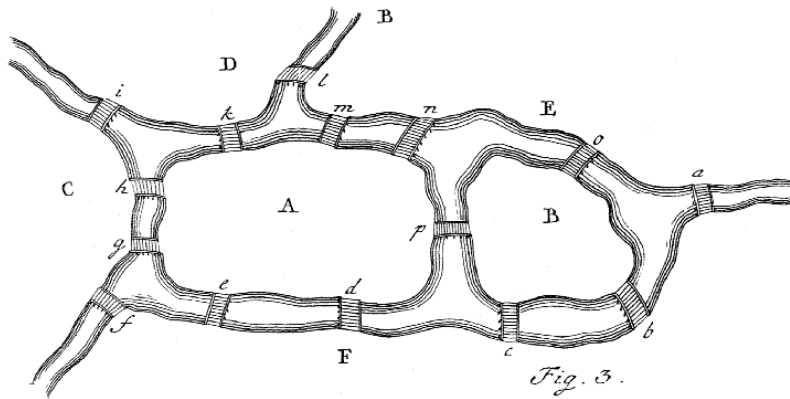


Figura 3 §. 15. Sint duae insulae A et B aqua circumdatae, quacum aqua communicent quatuor fluuii, quemadmodum figura repraesentat. Traiecto porro sint super aquam insulas circumdantem et fluuios quindecim pontes a, b, c, d, etc. et quaeritur, num quis cursum ita instituere queat, vt per omnes pontes transeat, per nullum autem plus quam semel. Designo ergo primum omnes regiones, quae aqua a se inuicem sunt separatae litteris A, B, C, D, E, F cuiusmodi ergo sunt sex regiones. Dein numerum pontium 15 vnitate augeo, et summam 16 sequenti operationi praefigo.

		16
		—
A*	—8	4
B*	—4	2
C*	—4	2
D	—3	2
E	—5	3
F*	—6	3
		—
		16

Tertio litteras A, B, C etc. sibi inuicem subscribo, et ad quamque numerum pontium, qui in eam regionem ducunt pono, ut ad A octo ducunt pontes, ad B quatuor etc. Quarto litteras, quae pares adiunctos habent numeros asterisco noto. Quinto in tertiam columnam scribo parium numerorum dimidia, impares vero vnitatem augeo, et semisses appono. Sexto tertiae columnae numeros inuicem addo, et obtineo summam 16. quae cum aequalis sit numero supra posito 16, sequitur transitum desiderato modo fieri posse, si modo cursus vel ex regione D vel E incipiatur, quippe quae non sunt asterisco notatae. Cursus autem ita fieri poterit EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD vbi inter litteras maiusculas pontes simul collocaui, per quos sit transitus.

§. 16. Hac igitur ratione facile erit in casu quam maxime composito iudicare, vtrum transitus per omnes pontes semel tantum fieri queat, an non. Hoc tamen adhuc multo faciliorem tradam modum idem dignoscendi, qui ex hoc ipso modo non difficulter eruatur, postquam sequentes observationes in medium protulero. Primo autem obseruo omnes numeros pontium singulis litteris A, B, C adscriptos simul sumtos duplo maiores esse toto pontium numero. Huius rei ratio est, quod in hoc computo, quo pontes omnes in datam regionem ducentes numerantur, quilibet pons bis numeretur; refertur enim quisque pons ad vtramque regionem, quas iungit.

§. 17. Sequitur ergo ex hac observatione summam omnium pontium, qui in singulas regiones conducunt, esse numerum parem, quia eius dimidium pontium numero aequatur. Fieri ergo non potest, vt inter numeros pontium in quamlibet regionem ducentium vnus sit impar; neque etiam vt tres sint impares, neque quinque, etc. Quare si qui pontium numeri litteris A, B, C, etc. adscripti sunt impares, necesse est vt eorum numerus sit par, ita in exemplo Regiomontano quatuor erant pontium numeri impares litteris regionum A, B, C, D adscripti, vti ex §. 14. videre licet; atque in exemplo praecedente §. 15, duo tantum sunt numeri impares, litteris D et E adscripti.

§. 18. Cum summa omnium numerorum litteris A, B, C etc. adiunctorum aequet duplum pontium numerum, manifestum est illam summam binario auctam, et per 2 diuisam dare numerum operationi praefixum. Si igitur omnes numeri litteris A, B, C, D etc. adscripti fuerint pares, et eorum singulorum medietates capiantur ad numeros tertiae columnae obtinendos, erit horum numerorum summa vnitatem minor, quam numerus praefixus. Quamobrem his casibus semper transitus per omnes pontes fieri potest. In quacunque enim regione cursus incipiatur, ea habebit pontes numero pares ad se conducentes, vti requiritur. Sic in exemplo Regiomontano fieri potest, vt quis per omnes pontes bis transgrediatur, quilibet enim pons, quasi in duos erit diuisus, numerusque pontium in quamuis regionem ducentium erit par.

§. 19. Praeterea si duo tantum numeri litteris A, B, C etc. adscripti fuerint impares, reliqui vero omnes pares, tum semper desideratus transitus succedet, si modo cursus ex regione ad quam pontium impar numerus tendit incipiatur. Si enim pares numeri bisecentur atque etiam impares vnitatem aucti vti praeceptum est, summa harum medietatum vnitatem erit maior quam numerus pontium, ideoque aequalis ipsi numero praefixo. Ex hocque porro perspicitur, si quatuor vel sex vel octo etc. fuerint numeri impares in secunda columna, tum summam numerorum tertiae columnae maiorem fore numero praefixo, eumque excedere vel vnitatem, vel binario vel ternario etc. et idcirco transitus fieri nequit.

§. 20. Casu ergo quocunque proposito statim facillime poterit cognosci, vtrum transitus per omnes

pontes semel institui queat an non, ope huius regulae. Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus est impar, tum certo affirmari potest, talem transitum non dari. Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus est impar, tunc transitus fieri poterit, si modo cursus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum transitus desiderato modo institui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati proposito plenissime satisfit.

§. 21. Quando autem inuentum fuerit talem transitum institui posse, quaestio superest quomodo cursus sit dirigendus. Pro hoc sequenti vtor regula; tollantur cogitatione quoties fieri potest, bini pontes, qui ex vna regione in aliam ducunt, quo pacto pontium numerus vehementer plerumque diminuetur, tum quaeratur, quod facile fiet, cursus desideratus per pontes reliquos, quo inuento pontes cogitatione sublatis hunc ipsum cursum non multum turbabunt, id quod paululum attendenti statim patebit; neque opus esse iudico plura ad cursus reipsa formandos praecipere.

SOLUTION D'UN PROBLÈME
APPARTENANT À LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION,
PAR LEONHARD EULER ;
TRADUIT DU LATIN, PAR M. ÉMILE COUPY,
Professeur au collège militaire de la Flèche.

Le problème dont je hasarde ici la traduction est inséré dans les Commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, tome VIII, page 128, année 1736. M. Poinsot⁹, dans son célèbre Mémoire de 1810 sur les Polygones et les Polyèdres étoilés, et Lhuillier, de Genève, dans son Algèbre, l'ont mentionné tous deux. Ce problème intéressant, d'une solution fort ingénieuse, n'a été traduit, que je sache, dans aucun recueil français, et se trouve enfoui maintenant dans une volumineuse collection à la portée seulement des personnes qui habitent la capitale. J'ai pensé qu'on lirait, au moins avec curiosité, ce problème ; c'est ce qui m'a décidé à publier cette traduction que j'ai faite, il y a quelques années, à Paris.

1. Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complètement inconnue, dont Leibniz a fait le premier mention et qu'il appela géométrie de position. D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position ; dans ce travail, il n'est besoin, ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer ; mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre ; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendait, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.

2. Or ce problème, qu'on me disait être assez connu, était le suivant : à Königsberg, en Prusse, il y a une île A appelée le Kneiphof, entourée d'un fleuve qui se partage en bras, comme on peut le voir sur la figure, mais les bras de ce fleuve sont garnis de 7 ponts a, b, c d, e, f, g, h et l'on proposait cette question sur ces ponts : une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement ? Les uns affirmaient que cela était possible, d'autres niaient, d'autres en doutaient ; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général :

Quelle que soit la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre des ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont.

3. Pour ce qui regarde les 7 ponts de Königsberg, on pourrait résoudre le problème en faisant l'énumération complète de toutes les manières de passer qui peuvent avoir lieu, car on verrait par là quelle est celle qui satisfait, ou bien on reconnaîtrait qu'il n'y en a aucune. Mais ce mode de solution, à cause du si grand nombre de combinaisons, serait trop difficile et trop laborieux, et ne

9. Voir tome VIII, page 139.

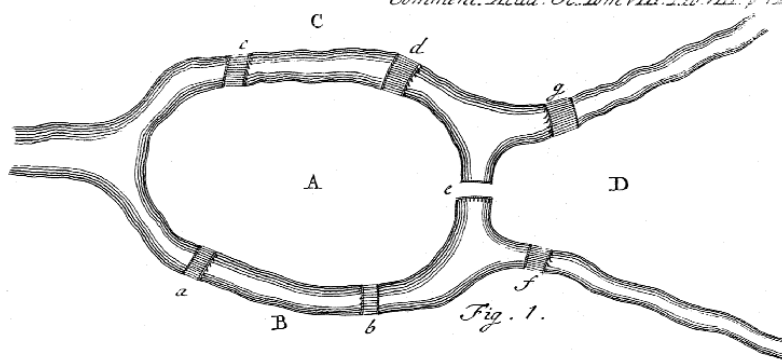
pourrait même plus s'appliquer dans les autres questions où il y aurait beaucoup plus de ponts. Au reste, si par ce moyen, l'opération était conduite jusqu'au bout, on trouverait beaucoup de manières de passer qui ne satisfont pas à la question, et c'est en cela sans doute que consiste la cause d'une si grande difficulté. Ayant donc laissé de côté cette méthode, j'en ai cherché une autre qui me donne non pas toutes les manières de passer, mais me montre seulement celle qui satisfait à la question ; et je regarde une pareille méthode comme de beaucoup plus simple que la précédente.

4. Toute ma méthode se fonde sur une manière particulière de représenter chaque passage de pont, dans laquelle j'emploie les lettres majuscules A, B, C, D, qui sont écrites à chaque région que sépare le fleuve. Ainsi, si quelqu'un va de la région A à la région B, en passant sur le pont a ou sur le pont b, je désigne ce passage par les lettres AB. La première marque la région d'où sort le voyageur ; la seconde, la région dans laquelle il est parvenu après avoir passé le pont. Si ensuite le voyageur s'en va dans la région D par le pont f, ce passage sera représenté par les lettres BD, et je représente ces 2 passages successifs AB et BD seulement par 3 lettres ABD, celle du milieu B représentant, tant la région où il est parvenu par un premier passage que celle d'où il est sorti pour un second passage.

5. Par un moyen semblable, si le voyageur s'avance de la région D dans la région C par le pont g, je représenterai ces 3 passages faits successivement par 4 lettres ABDC, car on comprendra par ces 4 lettres ABDC, que le voyageur étant d'abord dans la région A, a passé dans la région B, de là s'est avancé dans la région D, et enfin, de là a passé dans la région C ; et puisque ces régions sont séparées mutuellement par l'eau les unes des autres, il est nécessaire que le voyageur ait passé sur 3 ponts. De même, les passages faits successivement sur 4 ponts seront représentés par 5 lettres, et si le voyageur continue sa marche autant qu'il y a de ponts, son voyage sera représenté par un nombre de lettres supérieur d'une unité au nombre de ponts. C'est pourquoi il faut 8 lettres pour représenter les passages sur 7 ponts.

6. Dans ce mode de notation, je ne considère point par quels ponts le passage se fait ; mais si le même passage d'une région à une autre peut se faire par plusieurs ponts, peu importe par quel pont on passe d'abord pour arriver dans la région désignée. On comprend, d'après cela, que si le voyageur peut continuer sa course sur les 7 ponts de la figure 1, de manière à passer une fois sur chacun d'eux, et jamais deux fois sur aucun, cette course pourra se représenter par 8 lettres, et ces lettres devront être disposées de telle sorte que la succession immédiate des lettres A et B se présente deux fois puisqu'il y a 2 ponts a et b qui joignent ces régions A, B : de même, la succession des lettres A et C devra aussi se trouver deux fois dans cette série de 8 lettres et pour la même raison, ensuite la succession des lettres A et D devra s'y trouver une seule fois, et, enfin, il faudra semblablement que la succession des lettres B et D, et celle des lettres C et D s'y trouvent chacune une fois.

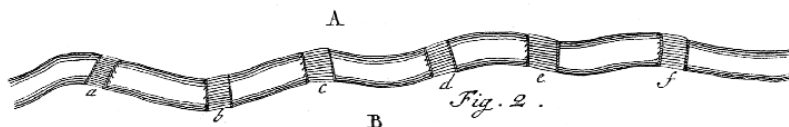
7. La question est donc ramenée à former avec 4 lettres A, B, C, D, une série de 8 lettres dans laquelle toutes ces successions se présentent autant de fois qu'il vient d'être trouvé. Mais avant de chercher une telle disposition, il convient de faire voir si ces lettres peuvent ou non être disposées d'une telle manière. Car si l'on pouvait démontrer qu'une telle disposition des 4 lettres A, B, C, D est tout à fait impossible, tout travail qui aurait pour but de la chercher, serait évidemment inutile. C'est pourquoi j'ai inventé une règle par le secours de laquelle, tant pour cette question que pour toutes celles du même genre, il est facile de discerner si un tel arrangement des lettres peut ou non avoir lieu.



8. Pour trouver cette règle, je considère une région unique A (fig. 2) à laquelle conduisent autant de ponts qu'on veut, a, b, c, d, je prends d'abord un seul de ces ponts qui conduisent à la région A, par exemple a. Si maintenant le voyageur passe sur ce pont, ou bien il devra être avant le passage dans la région A, ou bien il parviendra après le passage dans cette région A ; c'est pourquoi, dans la manière établie ci-dessus de représenter les passages, il faut que la lettre A se trouve une fois. Si vous supposez 3 ponts a, b, c conduisant dans la région A, et que le voyageur ait traversé ces 3 ponts, alors dans la représentation de ce voyage la lettre A se trouvera deux fois, soit que ce voyage ait commencé en partant de A, soit qu'il ait commencé en y allant. De même, si 5 ponts conduisent en A, dans la représentation du passage sur tous ces ponts, la lettre A devra se trouver trois fois ; et, en général, si le nombre des ponts est un nombre impair quelconque, en augmentant ce nombre de 1, et prenant la moitié, on aura le nombre de fois que la lettre A doit se trouver dans la représentation du passage.

9. Dans ce cas donc des ponts de Königsberg (fig. 1), puisque 5 ponts a, b, c, d, e conduisent dans l'île A, il est nécessaire que dans la représentation du passage sur ces ponts, la lettre A se trouve trois fois. Ensuite la lettre B, puisque 3 ponts conduisent dans la région B, devra se trouver deux fois ; de même la lettre D ainsi que la lettre C, devra se trouver deux fois et pour la même raison. Donc, dans la série des 8 lettres représentant le passage sur les 7 ponts, la lettre A devrait se trouver trois fois, et les lettres B, C, D, chacune deux fois, ce qui, dans une série de 8 lettres, est complètement impossible. Il suit clairement de là que sur les 7 ponts de Königsberg, le passage demandé est impossible.

10. Par un procédé semblable, on peut dans tout autre cas, pourvu toutefois que le nombre de ponts qui conduisent dans chaque région soit impair, on peut reconnaître si le passage une seule fois sur chaque pont est possible. Car s'il arrive que la somme de toutes les fois que chaque lettre doit se trouver, soit égale au nombre de tous les ponts augmenté de 3, alors le passage demandé sera possible. Mais si, au contraire, il arrive, comme dans notre exemple, que cette somme soit plus grande que le nombre total des ponts augmenté de 1, alors le passage demandé ne pourra s'effectuer d'aucune manière. Mais la règle que j'ai donnée pour déduire du nombre de ponts conduisant dans la région A le nombre de fois que la lettre A doit s'écrire, s'applique également, soit que tous les ponts conduisent d'une seule région B comme le représente la figure 2, en A, soit qu'ils conduisent de plusieurs, car je considère seulement la région A et je recherche combien de fois la lettre A doit se trouver.



11. Mais si le nombre des ponts qui conduisent dans la région A est pair, alors il faudra distinguer, pour le passage sur chaque pont, si le voyageur a commencé ou non sa course en partant de la région A. En effet, si 2 ponts conduisent en A et que le voyageur ait commencé sa course en partant de A, alors la lettre A devra se trouver deux fois ; une fois, elle représentera la sortie de A par l'un des ponts et encore une fois, pour représenter le retour en A par l'autre point. Mais si, au contraire, le voyageur avait commencé sa course en partant de l'autre région, alors la lettre A ne se présentera plus qu'une fois ; car écrite une fois, elle représentera, d'après ma manière de représenter ces courses, tant l'arrivée en A que la sortie de cette même région.

12. Que 4 ponts conduisent dans la région A et que le voyageur commence sa course en partant de A ; alors, dans la représentation de sa marche complète, la lettre A devra se trouver trois fois, pourvu toutefois qu'il n'ait passé qu'une seule fois sur chaque pont. Mais s'il a commencé à marcher en partant de l'autre région, la lettre A se trouvera seulement deux fois. S'il y a 6 ponts qui conduisent dans la région A, alors la lettre A se trouvera quatre fois, si le voyageur a commencé par partir de A, sinon elle ne se trouvera que trois fois, et généralement si le nombre des ponts est pair, la moitié donne le nombre de fois que la lettre A doit se trouver si l'on n'a pas commencé à partir de A ; et cette moitié, augmentée de 1, sera le nombre de fois que A devra s'écrire, en commençant la course de la région A elle-même.

13. Voici de quelle manière je déduis du nombre de ponts qui conduisent à une région, le nombre de fois que cette région, présentée par une lettre, devra s'écrire dans la course désirée. Je prends la moitié du nombre des ponts augmenté de 1, si ce nombre de ponts est impair, et la moitié de ce même nombre s'il est pair. Ensuite, si le nombre de fois que toutes les lettres doivent s'écrire est égal au nombre des ponts augmenté de 1, alors le passage désiré a lieu, mais on doit commencer à marcher d'une région à laquelle conduisent un nombre impair de ponts ; mais si ce nombre de fois est inférieur de 1 au nombre des ponts augmenté de 1, alors le passage a lieu en commençant par une région à laquelle conduise un nombre pair de ponts, parce que par ce moyen le nombre des fois qu'on doit écrire les lettres est augmenté de 1.

14. Étant donc proposée une rivière quelconque, garnie de ponts comme on voudra, pour trouver si une personne peut passer sur chaque pont une fois seulement, j'établis l'opération de la manière suivante : 1° je représente chacune des régions séparées mutuellement les unes des autres par l'eau, respectivement par A, B, C, D. ; 2° je prends le nombre total des ponts que j'augmente de 1, et je note ce nombre pour l'opération suivante ; 3° à côté de chacune des lettres A, B, C, écrites l'une au-dessous de l'autre, j'écris le nombre de ponts conduisant à la région marquée par la lettre que je considère ; 4° je marque d'un astérisque les lettres qui ont un nombre pair écrit à côté d'elles ; 5° j'écris les moitiés de tous ces nombres pairs et les moitiés des nombres impairs, augmentés de 1, dans une même colonne, chacune de ces moitiés dans la même ligne horizontale que la lettre d'où elle dépend ; 6° je fais la somme des nombres écrits en dernier lieu. Si cette somme est inférieure de 1, ou égale au nombre trouvé dans le 2°, qui est le nombre total des ponts augmenté de 1, j'en conclurai que le passage cherché est possible. Mais pour que cela soit possible, quand la somme

trouvée est inférieure de 1 au nombre écrit en haut de sa feuille, on doit partir d'une région marquée d'un astérisque ; mais, au contraire, on devra partir d'une région non astérisquée, quand la somme sera égale au nombre précité. Ainsi, par exemple, pour le cas des ponts de Königsberg, j'établis l'opération comme il suit :

Nombre des ponts : 7 ; j'ai donc 8.

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		—
Total		9

Et comme la somme 9 de la seconde colonne est 8, le passage demandé est impossible.

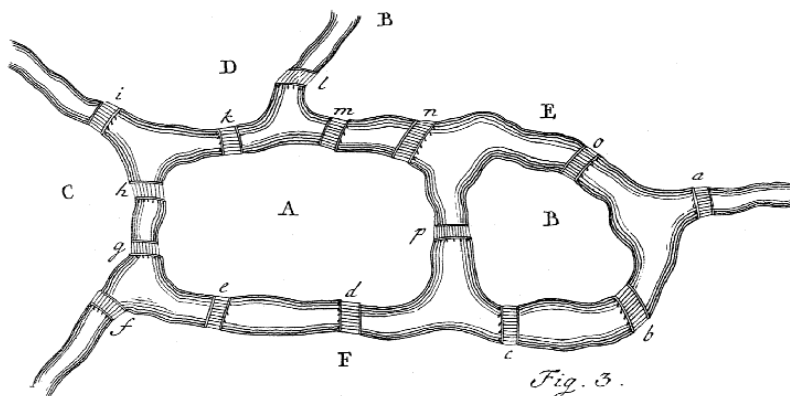
15. Soient 2 îles A et B entourées d'eau, avec lesquelles communiquent 4 fleuves, comme le représente la figure 3 ; 15 ponts sont jetés sur ces fleuves, et l'on demande si une personne peut s'arranger de manière à passer une fois et une seule fois sur chacun de ces ponts. Je désigne d'abord 1° toutes les régions séparées mutuellement par l'eau, par les lettres A, B, C, D, E, F : j'ai donc de la sorte 6 régions ; ensuite 2° j'augmente de 1 le nombre total des ponts, et j'écris le nombre 16 :

		16
		—
A*	—8	4
B*	—4	2
C*	—4	2
D	—3	2
E	—5	3
F*	—6	3
		—
		16

3° j'écris les lettres A, B, C,..., les unes au-dessous des autres, et à côté de chaque lettre le nombre de ponts conduisant à la région que marque la lettre. Ainsi 8 ponts conduisant à A, 4 à B, etc. ; 4° je marque d'un astérisque les lettres à côté desquelles se trouve un nombre pair ; 5° j'écris dans une troisième colonne verticale les moitiés des nombres pairs, j'augmente de 1 les nombres impairs, et j'écris de même les moitiés de ces nombres impairs ainsi augmentés de 1 ; 6° j'additionne les nombres de cette troisième colonne, et j'ai une somme 16 égale au nombre 16 écrit en haut : il en résulte que le passage peut être fait de la manière voulue, en partant soit de la région D, soit de la région E, car ces lettres ne sont pas marquées d'une étoile ; la course pourra se faire de la manière suivante :

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD,$$

notation dans laquelle j'ai placé entre les lettres majuscules les ponts sur lesquels le passage a lieu.



16. Il sera donc très facile par ce procédé de reconnaître dans chaque cas proposé, si le passage unique sur tous les ponts peut ou non s'effectuer. Cependant je donnerai encore un moyen beaucoup plus facile de reconnaître cela, lequel se déduira sans difficulté de ce qui précède, après que j'aurai exposé quelques observations que voici. Je remarque d'abord que la somme des nombres de ponts écrits à côté de chaque lettre A, B, C, D,..., est double du nombre total des ponts ; la raison en est que dans le calcul qui donne tous les ponts conduisant à une région donnée, un pont quelconque est compté deux fois, c'est-à-dire que chaque pont est rapporté à l'une et l'autre des deux régions qu'il joint.

17. Il suit de cette observation que le nombre total des ponts qui conduisent dans chaque région est toujours un nombre pair, puisque la moitié de cette somme est égale au nombre des ponts. Il ne peut donc pas se faire que parmi les nombres de ponts conduisant à une région quelconque, il n'y en ait qu'un seul d'impair, ou trois, ou cinq, etc. C'est pourquoi, si des nombres de ponts adjoints aux lettres A, B, C,..., sont impairs, il est nécessaire que le nombre de ces nombres impairs soit pair. Ainsi, dans l'exemple de Königsberg, les nombres impairs adjoints aux lettres des régions A, B, C, D,..., étaient au nombre de quatre (voyez n° 14), et dans l'exemple précédent du n° 15, il y a seulement deux nombres impairs, adjoints aux lettres D et E.

18. Puisque la somme de tous les nombres adjoints aux lettres A, B, C,..., égale le double du nombre des ponts, il est manifeste qu'en augmentant cette somme de 2 et en en prenant la moitié, on aura le nombre établi au commencement de l'opération. Si donc tous les nombres adjoints aux lettres A, B, C,..., sont pairs, et qu'on prenne la moitié de chacun d'eux pour former les nombres de la troisième colonne, la somme de ces nombres sera inférieure de 1 au nombre que nous savons. C'est pourquoi, dans ces cas, le passage sur tous les ponts pourra toujours s'effectuer ; car, en quelque région que la course commence, on sera conduit en cette région par un nombre pair de ponts, ainsi qu'il est requis. Par exemple, dans le problème de Königsberg, on peut s'arranger de manière à passer deux fois sur tous les ponts, car ce serait comme si chaque pont eût été divisé en deux, et alors le nombre des ponts conduisant dans une région quelconque sera pair.

19. Maintenant, si l'on suppose qu'il y a seulement deux nombres impairs adjoints aux lettres A, B, C,... (on sait qu'il ne peut pas y en avoir un seul), et que tout le reste soit pair, alors la course demandée est possible, pourvu que l'on parte d'une des régions à laquelle conduit un nombre impair de ponts. Car, si, selon la règle, on prend la moitié des nombres pairs, et la moitié des nombres impairs augmentés de 1, la somme de toutes ces moitiés sera supérieure de 1 au nombre de ponts, et

par conséquent égale au nombre précité lui-même, et l'on voit par là que s'il y a ou quatre, ou six, ou huit... nombres impairs dans la deuxième colonne, alors la somme des nombres de la troisième sera plus grande que le nombre précité, et le surpassera ou de 1, ou de 2, ou de 3,... unités, et que, par conséquent, le passage demandé sera impossible.

20. Quel que soit donc le cas proposé, on pourra très facilement reconnaître sur-le-champ, au moyen de la règle suivante, si le passage une seule fois sur tous les ponts est ou non possible.

S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra. Cette règle satisfait donc pleinement au problème proposé.

21. Mais, quand on aura reconnu que la question est possible, il restera encore à trouver comment la marche doit être dirigée. Je me sers pour cela de la règle suivante : qu'on néglige par la pensée, autant de fois qu'on peut le faire, 2 ponts conduisant d'une région à une autre ; par cette abstraction, le nombre des ponts se trouvera généralement de beaucoup réduit ; qu'on cherche alors, ce qui sera facile, la course demandée pour les ponts qui restent, et cela trouvé, les ponts enlevés par la pensée ne troubleront pas beaucoup le résultat obtenu, comme il est aisé de le voir avec un peu de réflexion ; et je crois inutile d'insister davantage pour trouver la marche qu'on devra suivre pour répondre à la question proposée.

Note du traducteur. Une application intéressante du problème d'Euler peut être faite à Paris, sur les ponts nombreux qui garnissent la Seine, depuis le pont d'Iéna jusqu'au pont d'Austerlitz, et joignent les îles de la Cité et Saint-Louis. En jetant les regards sur un plan de Paris, en appelant D la rive droite, G la rive gauche, A et B les îles de la Cité et Saint-Louis, on reconnaît que 11 ponts conduisent en A, 8 en B, 14 en G, 15 en D ; donc le problème est possible, d'après la règle du n° 20, pourvu qu'on parte de la Cité ou de la rive droite, et il est très facile de trouver effectivement la marche à suivre. Il est clair que dans ce problème, le pont Neuf et celui de la Réforme doivent compter chacun pour deux ; car l'un mène de D en A et de A en G, et l'autre mène de D en B et de B en A.

Un autre problème célèbre de situation est celui du cavalier aux échecs, donné aussi par Euler, pour la première fois (*Mémoires de Berlin*, 1759) et dont Vandermonde donna depuis une solution plus simple, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour 1771, page 566. M. Volpicelli s'est occupé récemment de ce problème. (*Comptes rendus*, 1850, tome XXXI, page 314.)