Le Prix Fermat et ses lauréats

• L. Miclo

Le Prix Fermat 2015 a été attribué à Laure Saint-Raymond (École normale supérieure) et à Peter Scholze (Université de Bonn), d'une part pour le développement de théories asymptotiques d'équations aux dérivées partielles dont la limite fluide d'écoulements dilués, l'analyse multi-échelles pour des équations de la physique des plasmas et des modèles d'océans et pour la dérivation de l'équation de Boltzmann à partir de systèmes de particules en interaction, et d'autre part pour l'invention des espaces perfectoïdes et leurs applications à des problèmes fondamentaux de géométrie algébrique et de la théorie des formes automorphes. Les deux textes qui suivent décrivent plus précisément leurs contributions.

Rappelons que le Prix Fermat récompense des mathématiciens de moins de 45 ans ayant apporté des contributions majeures dans l'un des domaines où s'est illustré Pierre de Fermat : le calcul des variations et les équations aux dérivées partielles, la géométrie analytique, les probabilités et la théorie des nombres. Les récipiendaires du Prix s'engagent à publier un article de synthèse dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, exposant à un public de mathématiciens professionnels, mais pas forcément spécialistes du sujet, ce qu'apportent les résultats de la recherche récompensée. Le Prix Fermat est organisé par l'Institut de Mathématiques de Toulouse et est financé par la Région Languedoc-Roussillon-Midi-Pyrénées, avec le soutien de l'université Paul Sabatier. Cette distinction internationale est accompagnée par le Prix Fermat Junior, qui récompense des étudiants, des classes Terminales aux trois premières années universitaires, pour des contributions mathématiques originales relevant de leurs programmes. Ainsi le Prix Fermat Junior 2015 a été attribué à Gary Bécigneul et à Mehdi Trense pour leurs travaux concernant respectivement, la fréquence et la régularité d'une valeur d'adhérence et une nouvelle preuve du grand théorème de Poncelet, contributions qui seront publiées dans la revue *Quadrature*.

La cérémonie officielle de remise des Prix Fermat s'est déroulée à l'Hôtel de Région Languedoc-Roussillon-Midi-Pyrénées, le mardi 22 mars 2016. La Région était représentée par Bertrand Monthubert, l'université Paul Sabatier par son président Jean-Pierre Vinel, et l'Institut de mathématiques de Toulouse par son vice-directeur, Philippe Laurençot. La soirée s'est poursuivie par un exposé grand public d'Étienne Ghys, de l'Académie des Sciences, sur « la géométrie du ballon de football », qui a rencontré un grand succès, l'amphithéâtre de la Région ayant fait salle comble.

Rendez-vous a été pris pour le prochain Prix Fermat, décerné fin 2017. Plus d'informations, notamment concernant l'ouverture des candidatures, seront disponibles sur `http://www.math.univ-toulouse.fr/PrixFermat`

Les contributions de Laure Saint-Raymond

par Benoît Perthame

Élue à l'Académie des Sciences en 2013, Laure Saint-Raymond a obtenu des avancées déjà reconnues parmi les plus importantes depuis un siècle sur l'équation de Boltzmann. Elle a vu son parcours et ses résultats largement décrits, y compris dans la presse quotidienne. Deux aspects marquent particulièrement son œuvre scientifique. Un choix de problèmes toujours motivés par des questions issues de la physique et des sujets nécessitant l'analyse asymptotique de modèles écrits sous la forme d'équations aux dérivées partielles.

Aux lendemains de la COP21, ses travaux sur les modèles d'océanographie, même s'ils sont plus récents, méritent sans doute d'être mentionnés les premiers puisqu'ils participent à comprendre la structure des courants océaniques, un sujet important pour comprendre l'évolution du climat. Le sujet est introduit dans la communauté mathématique par J.-L. Lions au début des années 1990, lorsqu'il comprend que les sciences du climat vont se développer rapidement. Il propose ainsi d'étudier les "équations primitives" de l'atmosphère [10] puis des océans. Il s'agit de dynamique des fluides avec un caractère particulier puisque la rotation de la terre induit, dans les équations de Navier-Stokes en régime incompressible, un terme de rotation (le terme $\frac{b(x)}{\varepsilon} e_3 \wedge u$ ci-dessous) qui domine le système

$$\partial_t u + \frac{b(x)}{\varepsilon} e_3 \wedge u + u.\nabla u + \nabla p = \nu \Delta u,$$
$$\mathrm{div} u = 0,\ u \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}^3,$$

où e_3 désigne la verticale. Pour comprendre la dynamique, les océanographes ont donc proposé des analyses multi-échelles à partir du paramètre de temps ε et des échelles d'espace typiques des océans, avec une profondeur faible par rapport à leur taille horizontale. Ces analyses ont suscité de très nombreux travaux mathématiques, développant des outils d'analyse profonds [4] toujours limités au cas où le champs b est constant. Dans ce contexte, avec A.-L. Dalibard, I. Gallagher, T. Paul et C. Cheverry, L. Saint-Raymond s'est attaquée au problème majeur d'un champ de rotation inhomogène comme c'est le cas à l'échelle géophysique, [11, 5]. Cette inhomogénéité génère des singularités qui mènent à des développements particulièrement subtils dans l'analyse des couches limites et la construction de correcteurs, surtout lorsqu'il s'agit de prendre en compte des géométries et des termes de forçage généraux (pour prendre en compte l'effet du vent). Il s'agit donc des résultats les plus significatifs du domaine tant en terme de réalisme physique des modèles que de profondeur des concepts méthodologiques. Pour donner des exemples de méthodes mathématiques, notons le filtrage à la Schochet [13] qui permet de comprendre l'évolution moyenne, des développements multi-échelles généraux en l'absence d'outil aussi puissant que les développements à deux échelles en homogénéisation, et enfin l'analyse semi-classique qui permet d'analyser les petites échelles générées par la propagation d'ondes de Poincaré.

L'analyse asymptotique était déjà au cœur des premiers travaux de L. Saint-Raymond sur la théorie cinétique des gaz et de sa contribution historique au 6ème problème de Hilbert concernant la dérivation rigoureuse des équations de Navier-Stokes à partir de la théorie cinétique des gaz. Dans le cadre des solutions renormalisées de R. Di Perna et P.-L. Lions [6] pour l'équation de Boltzmann,

$$\partial_t f + v.\nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f,f),$$

qui sont globales et sans hypothèse de taille hormis l'entropie finie, elle dérive, avec F. Golse, les équations de l'hydrodynamique incompressible dans la limite simultanée d'un faible nombre de Knudsen (ε ci-dessus) et d'un faible nombre de Mach [8]. La remarquable théorie qu'ils ont développée s'affranchit de toute hypothèse de taille sur la vitesse, hormis l'énergie finie, tout comme dans la théorie de Leray qui s'applique à la limite. Démontré au tournant des années 2000, le célèbre théorème de F. Golse et L. Saint-Raymond s'inscrit dans un vaste champ, alors très actif, avec des études préliminaires de R. Esposito, J. L. Lebowitz et R. Marra pour les solutions fortes petites et de C. Bardos, D. Levermore et N. Masmoudi pour les solutions faibles globales. Ici l'analyse fonctionnelle joue un rôle important avec une version raffinée des lemmes de compacité en moyenne pour les équations cinétiques dans un cadre L^1. La subtilité de cet aspect technique a conduit à une nouvelle classe de lemmes de transfert de régularité, de la variable vitesse vers la variable spatiale [1]. En ce qui concerne la limite fluide, l'approche initiale a été largement améliorée, généralisée et se trouve maintenant dans le Lecture Notes [12].

La validité de l'équation de Boltzmann se pose également ; la question est alors de dériver l'équation de Boltzmann à partir de la dynamique de particules suivant les lois de Newton pour des potentiels répulsifs. Le paramètre asymptotique est ici le nombre de particules qui tend vers l'infini en faisant tendre vers zéro le rayon d'interaction des particules pour garder fini le nombre de collisions ou plus précisément la section efficace : c'est la limite de Boltzmann-Grad [3]. La célèbre hiérarchie de BBGKY (initiales du nom des physiciens qui ont contribué) est proposée dans les années 30, mais sans démonstration. Au début des années 70, Lanford [9] démontre un premier résultat en temps très court et le problème est revisité par plusieurs mathématiciens, dont Illner et Pulvirenti qui précisent la démonstration initiale. Dans une collaboration de longue haleine avec T. Bodineau, I. Gallagher et B. Texier, voir [7] par exemple, L. Saint-Raymond reprend et complète la limite de Landford, obtenant sur ce sujet les résultats les plus importants depuis 40 ans. Elle obtient la première démonstration complète du passage de particules newtoniennes vers d'autres dynamiques passant par l'équation de Boltzmann dans un régime linéarisé. On peut ainsi retrouver le mouvement brownien ou la dynamique de Stokes-Fourier [2]. Les méthodes utilisent encore des estimations fines typiques des équations aux dérivées partielles, mais combinées à celles de la physique statistique avec des estimations précises des collisions successives de particules via de la combinatoire sur des arbres de recollisions.

À travers ces trois résultats spectaculaires d'analyse de problèmes asymptotiques posés en termes d'équations aux dérivées partielles, qui ne couvrent pas tous les travaux de Laure Saint-Raymond, on devine une vision scientifique large et profonde, englobant les sciences de la terre, la physique des plasmas et la mécanique des fluides. Cette double compétence mathématiques/-physique n'est pas récente, Laure a deux masters, en physique et en mathématiques.

Les contributions de Peter Scholze

par Laurent Clozel

Les travaux de Peter Scholze portent sur la géométrie algébrique, dans sa composante arithmétique, et sur la théorie des formes automorphes.

Dans ses tout premiers articles, et dès son mémoire de *Masterarbeit* pour $GL(2)$, il a donné une démonstration nouvelle de la conjecture de Langlands locale liant représentations de degré n du groupe de Galois d'un corps p-adique et représentations irréductibles de $GL(n)$ sur ce corps. Ce théorème avait été démontré par Harris et Taylor en 2000 (une autre démonstration avait ensuite été donnée par Henniart). Comme celle d'Harris et Taylor, la démonstration de Scholze repose sur l'analyse des représentations galoisiennes apparaissant dans la cohomologie de certaines variétés de Shimura ; mais elle est plus simple, grâce à l'utilisation d'élégants résultats concernant les cycles évanescents. Elle évite le recours, jusqu'ici nécessaire, à la *conjecture de Langlands numérique* démontrée auparavant par Henniart et montrant que les deux ensembles en correspondance ont le même cardinal. Elle donne par ailleurs une démonstration directe de la formule donnant (en termes de fonctions L de formes automorphes) la fonction zêta de Hasse-Weil d'une variété de Shimura de type convenable, montrant l'importance de la notion de *fonctions zêta semi-simplifiée* de son directeur de recherche, Michael Rapoport. Dans la démonstration de ce dernier résultat, la conjecture de monodromie-poids de Deligne apparaît naturellement. Cette conjecture est ancienne de plus de trente ans ; elle complète les conjectures de Weil concernant les variétés sur les corps finis ou p-adiques, en spécifiant les *poids* des valeurs propres de l'opérateur de Frobenius dans le cas de mauvaise réduction. Deligne la démontrait dans le cas d'égale caractéristique. Il est vraisemblable que cela a été une des motivations de Scholze pour le développement suivant.

Ce travail, spectaculaire, concerne les *espaces perfectoïdes*, inventés par Scholze. Il s'agit de la construction d'une nouvelle catégorie d'espaces similaires aux espaces analytiques rigides de la géométrie analytique p-adique, mais plus généraux et munis de structures plus riches. En particulier, Scholze démontre une propriété remarquable de *basculement* (*tilting*) qui donne une équivalence de catégories entre de tels espaces sur un corps de caractéristique zéro et un corps de caractéristique p. C'est une extension extraordinaire d'une construction inaugurée par Fontaine et développée par Fontaine et Wintenberger : Scholze passe du cas d'un corps, i.e. d'un point, au cas d'un espace arbitraire. Dans son premier article sur les perfectoïdes, cette méthode est utilisée pour démontrer la conjecture de monodromie-poids, en caractéristique nulle, pour des variétés qui sont des intersections complètes dans des espaces projectifs (ou, plus généralement, dans des variétés toriques.) De fait, grâce au *basculement*, de nombreuses propriétés géométriques peuvent être démontrées par passage à la caractéristique p.

Dans deux articles ultérieurs, Scholze a appliqué sa théorie des espaces perfectoïdes aux problèmes connexes de la théorie de Hodge p-adique et des groupes p-divisibles. La théorie de Hodge p-adique est un analogue de la théorie de Hodge pour les variétés sur les corps p-adiques qui joue, dans le cadre des variétés sur des corps de nombres, un rôle crucial pour comprendre les représentations galoisiennes associées du groupe de Galois local en une place p-adique On sait que la théorie de