4 Annexe 1 : extrait du texte de Laisant sur la figuration des nombres composés

A ces remarques sur les décompositions des nombres en facteurs, nous croyons devoir en ajouter une sur un mode de figuration fort simple et qui n'a cependant pas été signalé jusqu'ici, du moins à notre connaissance. Il y aurait peut-être lieu d'en tirer parti pour l'enseignement des premiers principes élémentaires relatifs à la décomposition des nombres en facteurs premiers, à la formation du plus grand commun diviseur et à celle du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.

Voici en quoi consiste cette figuration. Supposons que, un quadrillage indéfini étant tracé à la droite d'une ligne verticale, nous numérotions les bandes horizontales successives 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17..., en les affectant aux nombres premiers successifs. Si un nombre composé contient un facteur premier a à l'exposant i , on comptera i cases, à partir de la droite verticale, dans la bande qui représente le facteur a. L'ensemble des cases ainsi déterminées, et que l'on pourra limiter par le tracé du contour extérieur, figurera le nombre en question. Il est évident que ce tracé peut suivre parfois la ligne verticale origine, lorsque certains facteurs premiers font défaut, c'est à dire ont l'exposant zéro.

Nous nous bornons à donner comme exemple la figuration des nombres $360 = 2^3.3^2.5$ et $16500 = 2^2.3.5^3.11$ (fig. 1 et 2).

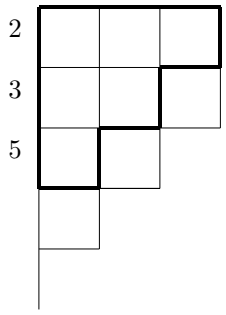

Figure 1: N = 360

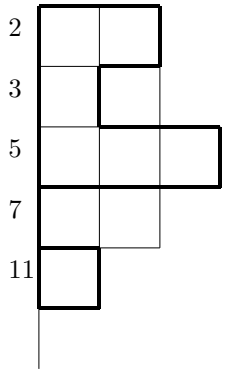

Figure 2: N = 16500

Ce mode de représentation met en relief d'une façon saisissante la formation des diviseurs, ou, ce qui revient au même, la décomposition en deux facteurs, dont nous avons parlé ci-dessus. Le nombre des diviseurs est évidemment égal au nombre des chemins différents qu'on peut suivre pour aller de la base inférieure à la base supérieure de la figure formée, en suivant toujours les lignes du quadrillage.
Le plus grand commun diviseur de deux nombres se trouve représenté par la partie commune des figures qui représentent ces deux nombres ; le plus petit commun multiple, par la figure limitée au contour extérieur dessinée par l'ensemble des deux figures. Nous donnons comme exemple (fig.3) le plus grand commun diviseur D des deux nombres $N = 1890 = 2.3^3.5.7$ et $N' = 660 = 2^2.3.5.11$, leur plus grand commun diviseur $D = 2.3.5 = 30$ et leur plus petit commun multiple $p = 2^2.3^2.5.7.11 = 41580$, en figurant les deux nombres au moyen de carrés colorés.

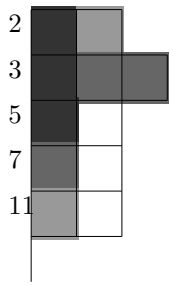

Figure 3: pgcd et ppcm

On comprend qu'en représentant par diverses valeurs plusieurs nombres, on peut ainsi figurer leurs diviseurs ou leurs multiples, soit d'ensemble, soit deux à deux. Par exemple, si trois nombres A, B, C sont figurés A en rouge, B en bleu et C en jaune, les plus grands communs diviseurs seront figurés celui de A et B par la partie violette, celui de B et C par la partie verte, celui de A et C par la partie orangée.
Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un caractère intuitif. Il suffit pour cela de remarquer que, lorsqu'un nombre A est multiple d'un autre nombre B, le contour de la figuration de A contient le contour de la figuration de B, et aussi que, lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux, les figurations des deux quelconques de ces nombres n'ont aucune partie commune.

Au fond, ce mode de figuration est en quelque sorte un système de numérotation dans lequel l'ordre d'un chiffre, à partir de la gauche par exemple, représenterait l'exposant. Ainsi, dans les exemples cités plus haut, les divers nombres s'écriraient comme suit : 360 s'écrirait 321, 16500 s'écrirait 21301, 1890 s'écrirait 1311, 660 s'écrirait 21101, 30s'écrirait 111, 41580 s'écrirait 23111.
Le produit de deux nombres, dans ce système, s'obtiendrait par l'addition des chiffres de même rang (et il est bien entendu qu'ici nous désignons par le mot *chiffres* des nombres qui peuvent devenir aussi grands qu'on voudra).
La formation du plus petit commun multiple ou du plus grand commun diviseur

est évidente ; et il apparaît non moins clairement, par exemple, que le produit de deux nombres est également le produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.
Tout nombre représenté par l'unité précédée d'un nombre quelconque de zéros est un nombre premier, et réciproquement.
Tout nombre dont les chiffres sont pairs est un carré.
Nous croyons devoir borner là ces observations, trop simples pour mériter d'être plus complètement développées.

5 Annexe 2 : L"'empilage" des valuations p-adiques"

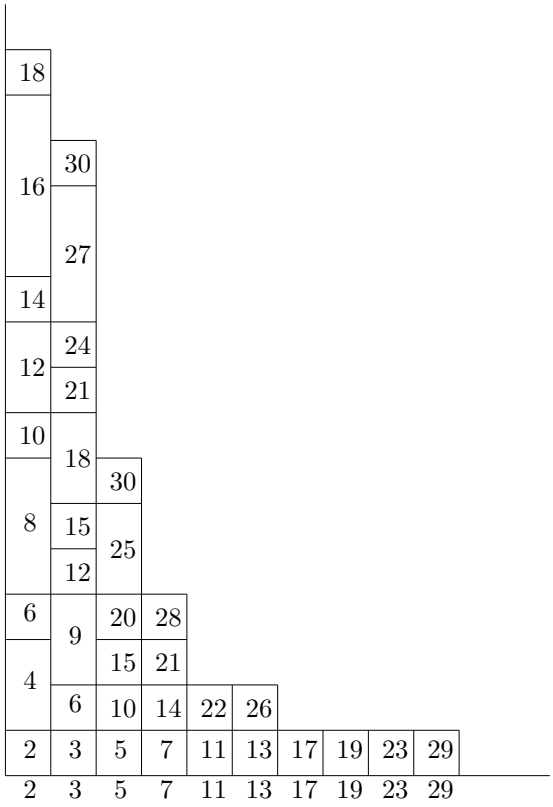

Figure 4: Courbe hyperbolique d'équation $xy = n\log(n)$